

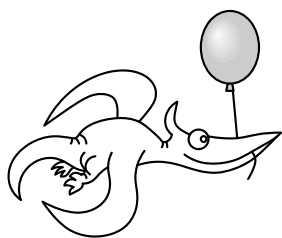
Milí řešitelé!

Se zadáním čtvrté série FYKOSu si vás dovoluujeme pozvat na Jeden den s fyzikou, což je akce pořádaná naší fakultou ve čtvrtek 2. února pro všechny středoškoláky i jejich učitele. Na této akci si budete moci prohlédnout mnoho fyzikálních pracovišť fakulty v areálu Karlova, exkurze připravují odborní pracovníci. Uvidíte také spoustu zajímavých fyzikálních experimentů. Připraveny jsou rovněž populární přednášky z mnoha oborů fyziky. Podrobnější informace najdete na www.mff.cuni.cz/verejnost/jdf/.

Přejeme vám veselé Vánoce a mnoho úspěchů v roce 2006.

A nyní s námi pojdte do β -kvadrantu na planetu Balónků ...

Organizátoři



Zadání IV. série

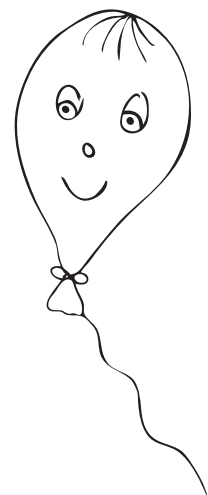


Termín odeslání: 20. února 2006

Úloha IV.1 ... turnaj Balónků

Kdesi v dalekém vesmíru za 1001 hvězdami a jednou černou dírou byla nebyla planeta Balónků. Tyto inteligentní duté bytosti každý rok pořádají soutěž „Čím výš, tím líp“.

Každý z balónků si přiváže provázek, aby bylo možné určit jeho výšku. Aby se mohli Balónci účastnit soutěže, musí mít všichni stejné parametry. Kupodivu nikdo zatím nikdy nevyhrál. Délková hustota provázku je 11 luftíků na špurgl, hustota atmosféry je 110101 luftíků na krychlový špurgl, poloměr každého z balónků je 10 špurglů, hmotnost Balónka je 10 luftíků. Při pádu tělesa v tíhovém poli na planetě Balónků se za každý temp jeho rychlost zvýší o 111 špurglů za temp. Určete, jakou maximální výšku Balónka hlavní rozhodčí soutěže naměří a jak se bude Balónek pohybovat po dosažení této výšky. Nezvednutá část provázku každého Balónka leží volně na zemi. Závody Balónků probíhají v malých výškách, kde je hustota atmosféry přibližně konstantní.



Nápověda: Každý balónek má maximálně jeden provázek.

Úloha IV.2 ... výprava na planetu Balónků

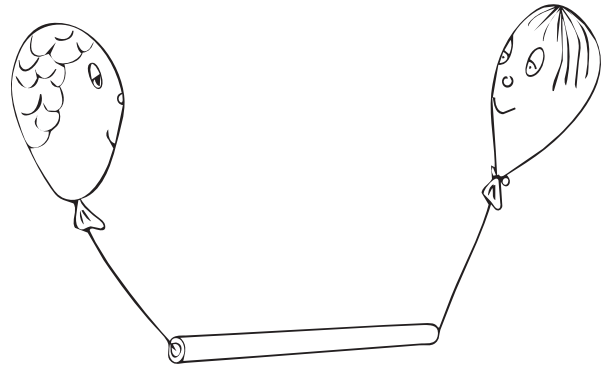
NASA chystá velkou výpravu na planetu Balónků za účelem navázání komunikace s tamními inteligentními dutými bytostmi. Špiónům se podařilo zjistit od místních informátorů následující údaje: atmosféra je složena z plynu o muškové hmotnosti 10001 luftíků na mušku, počet molekul atmosféry v jedné mušce je 10^{1101} , tloušťka atmosféry je 10^{10001} špurglů a srovnáním teploměrů obou civilizací špióni určili, že sedmi pozemským kelvinům odpovídá jeden luftík krát špurgl čtverečný na temp čtverečný.

Určete teplotu na povrchu planety a rozhodněte, zda by si měli kosmonauti vzít spíše tričko či kožich. Při řešení se vám můžou hodit i údaje z již zmíněné soutěže.

Úloha IV.3 ... Balónci na kolotoči

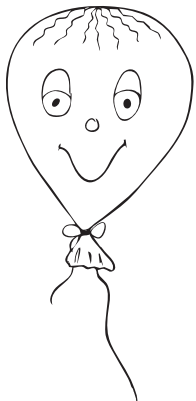
V hlavním městě planety Balónků Medicinbaldorfu se jednou za debrecinský megatemp koná pouť. Hlavní atrakcí je speciální balónkovský kolotoč, který se Funík s Pískalem rozhodli navštívit.

Dutou tyčí délky L je provlečen provázek délky $l > L$. Na jeden konec provázku se přivázal Funík, na druhý konec Pískal. Oba kamarádi by měli vážit stejně, Funík ale ke snídani snědl kousek rozemleté traverzy a je o trošku těžší. Poté se tyč začne točit kolem svislé osy na ní kolmé. Určete polohu osy tak, aby vodorovná vzdálenost mezi Balónky byla co největší.



Úloha IV.4 ... svatba Balónka a Balónky

... a už zní svatební síní slavnostní pískot a fukot. Ano, je to tak, Pískal s Foukalkou si dnes řeknou své písk. A už je tu první novomanželský polibek, při němž se spojí svými otvory. Poté kněz slavnostně rozváže provázky a dojde k propojení. Popište, co bude následovat. Nezapomeňte, že všichni svobodní Balónci mají stejné parametry.



Úloha IV.P ... Balónek uprchlík

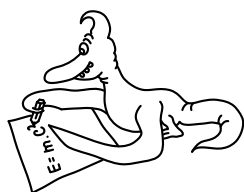
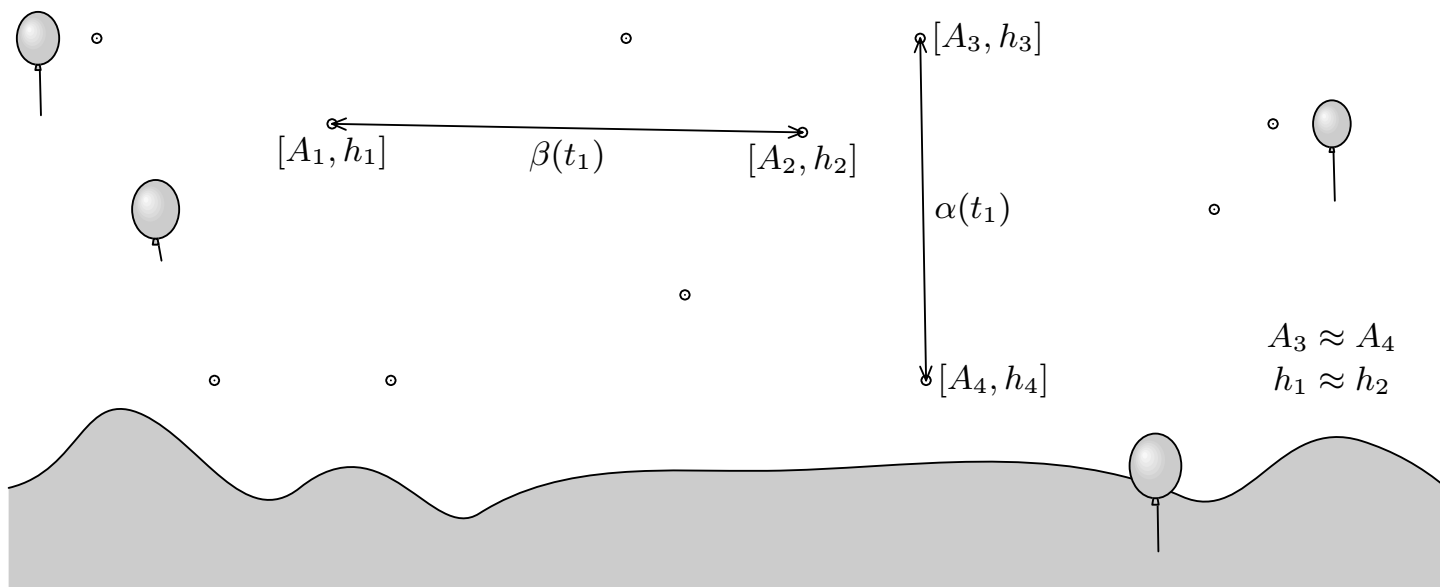
Na planetě Balónků došlo k revoluci a k moci se dostali fundamentalisté, kteří zakázali jíst traverzy se šlehačkou. Jelikož šlo o Funíkovo oblíbené jídlo, nezbylo mu nic jiného, než odejít do dobrovolné emigrace.

Při příletu na Zem byl Funík zavřen do karantény a byl mu změřen objem V a teplota T . Imigrační úřad však rozhodl, že nedostane azyl, pokud nezmění svůj objem na V' a teplotu na T' . Funík nemůže v karanténě přijímat ani odevzdávat žádné teplo, měnit počet částic, ze kterých je složen, i na traverzy se šlehačkou si prozatím musí nechat zajít chuť. Poradte Funíkovi, jak to má udělat, aby mohl na Zemi prožít šťastný a spokojený život.

Úloha IV.E ... jak oči Balónka klamou

Balónci při pozorování oblohy často soudí, že se jim souhvězdí vysoko nad hlavou zdají menší, než když si je prohlížejí nízko nad obzorem. Proveďte pozorování na Zemi a měřením ověřte, zda jde skutečně o klam. Změřte úhlovou vzdálenost $\alpha(t_1)$ dvou vybraných hvězd, které jsou přibližně nad sebou (mají stejný azimut A), a úhlovou vzdálenost $\beta(t_1)$ jiných dvou hvězd, které jsou ve stejné výšce h nad obzorem, (tzn. kontrola v obou nezávislých směrech) v okamžiku, kdy se tyto hvězdy nacházejí *co nejnižše nad obzorem*. Až později stejné dvojice hvězd najdete v co největší výšce, měření obou úhlových vzdáleností $\alpha(t_2)$, $\beta(t_2)$ zopakujte. Snažte se pochopitelně měřit co nejpřesněji!

Zvlášť oceníme, pokud ze znalosti katalogizovaných souřadnic hvězd přesně vypočítáte jejich teoretickou úhlovou vzdálenost. Nezapomeňte popsat použité pomůcky a zamyslet se nad jejich výhodami a nevýhodami (resp. diskutovat přesnost měření), uvést důležité podmínky měření a určit zkoumané hvězdy – alespoň načrtněte mapku hvězdného okolí a uveďte směr (např. jih) a čas měření. Vyhodnoťte chyby měření a v diskusi srovnajte výsledky.



Řešení II. série

Úloha II.1 ... propiska na šňůrce (4 body; průměr 2,58; řešilo 59 studentů)

Ve stojící tramvaji visí u svislé desky na niti délky l propiska o hmotnosti m . Tramvaj se rozjede se zrychlením a , které můžeme považovat za konstantní. Vypočítejte, kam až toto kyvadlo vykývne (jaký maximální úhel bude nit svírat s deskou) a kdy tužka opět ťukne do desky.

Úloha z prvního ročníku FYKOSu.

Na začátku se dohodněme, že propisku budeme považovat za hmotný bod, neboť její rozměry nemají na řešení problému vliv. (Představme si propisku přivázanou za těžiště). Dále budeme uvažovat malou výchylku, obdobně jako u matematického kyvadla. Tato výchylka bude nejvýše asi 5° , což odpovídá zrychlení cca $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, na tramvaj až dost.

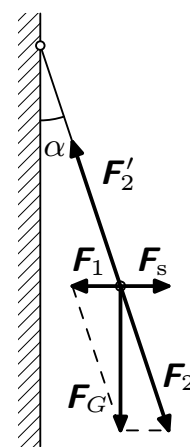
Úlohu budeme řešit v neinerciální vztažné soustavě – v soustavě spojené s tramvají. Nejprve musíme zjistit úhel φ , pro který bude propiska ve stabilní rovnovážné poloze. Tíhovou sílu \mathbf{F}_G si rozložíme na \mathbf{F}_2 a \mathbf{F}_1 (viz obr. 1).

Aby propiska zůstala v rovnováze, musí být výsledná síla nulová. Síla \mathbf{F}_2 bude vyrušena reakcí lanka \mathbf{F}'_2 , nemusíme se jí tedy dále zabývat. Zbývá síla \mathbf{F}_1 , jejíž velikost se musí rovnat velikosti setrvačné síly \mathbf{F}_s . Dostaneme tedy rovnost (pro malé φ platí $\text{tg } \varphi \doteq \sin \varphi \doteq \varphi$)

$$mg \text{tg } \varphi = ma \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{arctg } \frac{a}{g}.$$

Jak se vlastně propiska pohybuje? Na začátku je u stěny. Poté, co se tramvaj začne rozjíždět, propiska bude mít tendenci dostat se do své nové stabilní polohy. Její pohyb tedy lze chápat jako pohyb kyvadla s maximální výchylkou odpovídající úhlu φ v tíhovém poli, které uděluje zrychlení $\sqrt{a^2 + g^2}$.

Maximální úhel, který svírá lanko s deskou, potom bude 2φ .



Obr. 1

Kdy propiska zase ťukne o desku? Protože se jedná o harmonický pohyb, propiska narazí zpět na desku právě za jednu periodu. Perioda takovýchto kmitů matematického kyvadla je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

Došlá řešení byla vesměs správná. Někteří řešitelé si neuvědomili, že úloha se dala zjednodušit na kyvadlo, a řešili příklad pomocí zákona zachování energie, který špatně použili.

Roman Fiala

roman@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.2 ... funicí lokomotiva (4 body; průměr 3,16; řešilo 69 studentů)

Lokomotiva s osmi vagóny o hmotnosti 40 t se rozjíždí na dráze 1 km na rychlost 120 km/h. Jaká musí být minimální hmotnost lokomotivy tohoto vlaku, aby se vlak rozjel bez prokluzování kol na kolejnicích?

Počítejte se součinitelem klidového tření $f = 0,2$. Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.

Úlohu navrhl Jirka Franta.

Nejdříve si musíme ujasnit, jaké síly nesmíme zanedbat při řešení této úlohy. Jelikož nevíme zhola nic o počtu kol jednotlivých vagónů, natož o jejich momentech setrvačnosti, spokojíme se s tím, že vagony se pohybují a zrychlují bez jakéhokoliv odporu. Takže vagony působí na lokomotivu jen a pouze svou setrvačnou silou F_V . Na lokomotivu samozřejmě také působí její setrvačná síla F_L . Tíhová síla působící na lokomotivu F_G je vyrovnána reakční silou od kolejnic. Na vyrovnání obou setrvačných sil nám zbývá jedině statická smyková třecí síla F_T mezi koly lokomotivy a kolejnicemi. Jelikož hledáme hraniční případ, kdy nastane prokluz u kol lokomotivy, budeme počítat s maximální velikostí této třecí síly, tedy

$$F_T = f F_G.$$

Setrvačné síly musí být v rovnováze s touto třecí silou

$$F_T = F_V + F_L.$$

Ze zadání lze snadno vypočítat, s jakým zrychlením se vlak pohyboval, když předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb.

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

Víme tedy, jak velké byly setrvačné síly vagónů a lokomotivy.

$$F_V = m \frac{v^2}{2s},$$

$$F_L = M \frac{v^2}{2s}.$$

Tímto končí fyzikální úvahy a přichází na řadu matematické řemeslo v podobě dosazení do rovnice rovnováhy sil a následovných ekvivalentních úprav, kterými dostaneme

$$M = m \frac{v^2}{2fgs - v^2}.$$

Nyní nastává bod, ve kterém se správná řešení rozcházela – dosazení číselných hodnot. Kvůli nešťastně formulovanému zadání někteří počítali, že 40 t váží všechny vagony dohromady. Ale zadání bylo myšleno tak, že 40 t váží každý z osmi vagonů. Jelikož tato chyba byla z velké části na naší straně, nestrhávali jsme za ni body. Když tedy dosadíme zadané údaje, získáme

$$M \approx 130 \text{ t}.$$

Jak uvedl *Juraj Hartman*, tuto podmínku splňuje například velká lokomotiva ČD řady 181.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... spektrální analýza (4 body; průměr 2,21; řešilo 48 studentů)

Ve spektru jisté hvězdy byla pozorována emisní čára hélia, která má běžně vlnovou délku 587,563 nm. Nebylo však vinou použitého spektroskopu, že byla rozmazána přibližně v rozmezí 587,60 nm až 587,67 nm. Pokuste se odhadnout teplotu hvězdy a její rychlost v prostoru. Čím je rozmazání spektrální čáry způsobeno? Úloha z archivu, doformuloval Pavol Habuda.

Každá spektrální čára má nenulovou šířku. Tato nenulová šířka je způsobena spolupůsobením více faktorů. Nejdůležitější jsou:

- *Přirozená šířka čáry* – vzniká díky principu neurčitosti; hladiny, na kterých se nachází elektron, mají jakoby rozmazanou energii.
- *Instrumentální profil* – vzniká ve spektrografu, rozšíří i čáru o nulové tloušťce; podle zadání jej nebudeme dále uvažovat.
- *Teplotní rozšíření a rozšíření turbulencí* – obojí vzniká díky Dopplerovu jevu. Dají se od sebe odlišit podle toho, jak silně působí na částice o různých molekulových hmotnostech. Protože světlo k nám přichází z celé hvězdy a turbulence v atmosféře nejsou příliš silné, turbulenci zanedbáme. Naopak **teplotní rozšíření** budeme v dalším řešení uvažovat.
- *Rozšíření srážkami* – srážky deformují atomový obal, a tedy i energetické hladiny, na kterých se nachází elektrony. Díky tomu energetické rozmazání hladin způsobí, že fotony mají energie různé od energie nedeformované hladiny.
- *Rozšíření elektrickým (Starkův jev) a magnetickým polem (Zeemanův jev)* – elektromagnetické pole působí na elektricky nabitý elektron obíhající kolem atomu. To má za následek dodatečnou sílu působící na e^- , která způsobuje rozštěpení spektrálních čar. Různé atomy jsou různě citlivé na elektrické a magnetické pole. Protože většina hvězd nemá dostatečně silné pole na celém povrchu, které by čáru významně rozšiřovalo, nebudeme se jím dále zabývat.
- *Rozšíření rotací* – hvězdy rotují kolem své osy, často velice rychle. Protože část povrchu hvězdy se pohybuje směrem k nám a část od nás, spektrální čára se tímto díky Dopplerovu jevu rozšiřuje.

U různých čar se uplatňují jednotlivé faktory různě. To, co způsobilo rozšíření spektrální čáry, zjistíme podrobným průzkumem celého spektra. To my nemáme k dispozici, omezme se proto na to, co víme. Předpokládejme, že čára hélia je ve spektru výrazná – to znamená, že patří horké hvězdě s povrchovou teplotou 30 000 K a víc. Dále nic nevíme o rotaci hvězdy,

předpokládejme, že se díváme na hvězdu směrem od pólu, a tedy žádnou rotaci pozorovat nebudeme¹. Zbývá nám tedy pouze rozšíření způsobené tepelným pohybem molekul.

Podle zadání je čára široká 0,07 nm. Polovina atomů se pohybuje od pozorovatele, polovina k němu². Polovina šířky čáry (nebo také 1/2 FWHM – full width at half maximum – šířka čáry v polovině největší intenzity) je 0,035 nm. Z Dopplerova jevu pak dostaneme

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad v = 18 \text{ km/s}.$$

Podle ekvipartičního teorému³ platí

$$E = \frac{1}{2} m_{\text{He}} v^2 = \frac{1}{2} kT. \quad (1)$$

Každý atom má pouze jeden stupeň volnosti, protože k Dopplerovu jevu přispívá pouze pohyb ve směru k pozorovateli. Pohyb kolmo k pozorovateli pozorovatelný Dopplerův jev nevyvolá.

Tento vztah se dá odvodit i následovně. Rychlost libovolné molekuly lze rozložit na složky tak, že $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Žádný směr rychlosti není preferován, platí tedy, že $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, kde $\langle v_x^2 \rangle$ je střední hodnota v_x^2 . Rovněž platí, že $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Pak ale musí platit

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_z^2 \rangle.$$

Jestliže platí $\frac{1}{2} m_{\text{He}} v^2 = \frac{3}{2} kT$, rovněž musí platit

$$E = \frac{1}{2} m_{\text{He}} v_z^2 = \frac{1}{2} kT,$$

¹) Článek o tom, jak rychle rotují hvězdy, můžete najít na <http://www.astro.cz/clanek/987>. Velice horké hvězdy podle něj rotují velice rychle, až na hranici své stability. Jelikož jsou horké hvězdy i hmotné, dosahuje obvodová rychlost hvězdy až 300 km/s.

²) Rozšíření spektrální čáry vlivem teploty vzniká z Maxwellova rozdělení rychlostí

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \frac{dv}{v},$$

kde v_0 je nejpravděpodobnější rychlost. Z této rovnice pak integrací dostaneme přesnější výsledek, než jsme odvodili za jednodušších podmínek

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2RT}{M_m}},$$

což je poloviční výsledek, než jsme dostali za zjednodušených podmínek. Neberte to ale tak, že jednodušší řešení je špatně. V praxi často řešíme problémy jednodušeji, než bychom – buď proto, že úplné řešení neznáme, z principu nejde vypočítat nebo by to bylo zbytečně zdlouhavé. O výsledku pak víme, že je přibližný, že se na něj nemůžeme plně spolehnout.

³) Ekvipartiční teorém říká, že na každý stupeň volnosti připadá stejné množství energie. Dalším stupněm volnosti se rozumí, že částici musíme popsat další souřadnicí, abychom přesně věděli, jaká je její poloha. Atom má tři stupně volnosti (pohyb v osách x , y , z). Kdybychom žili pouze v dvourozměrném prostoru, měl by atom pouze dva stupně volnosti, jelikož by se mohl pohybovat pouze ve směrech x a y . Jestliže se chcete o stupních volnosti dozvědět více, informace najdete v každé lepší knížce o termodynamice.

což je rovnice identická s (1), protože v_z je námi pozorovanou rychlostí, kterou změříme spektroskopem. Rychlosti v_x a v_y nepřispívají k Dopplerovu jevu.

Po dosazení zjistíme povrchovou teplotu hvězdy 160 000 K. To je trochu víc, než jsme očekávali, rozdíl je způsoben např. nepřesným modelem nebo tím, že úloha nevyhází z naměřených dat. Nebo také tím, že jsme skutečně pozorovali spektrum výjimečně horké hvězdy. Která možnost je správná, bychom zjistili analýzou tvaru spektrální čáry.

Střed héliové čáry 587,563 nm je posunut o 0,072 nm, to znamená, že hvězda se vůči pozorovateli pohybuje. Protože čára je posunuta k červenému konci spektra, hvězda se od nás vzdaluje. Opět podle Dopplerova zákona vypočítáme rychlost vzdalování.

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 37 \text{ km/s}.$$

Tato rychlost nám udává pouze to, jak rychle se od nás hvězda vzdaluje, ale ne její rychlost tangenciální. Přesněji, jak rychle se vzdaluje od Země, ne od Slunce. Země, jak víme, obíhá kolem Slunce rychlostí 30 km/s. Proto bez znalosti souřadnic hvězdy a okamžiku, kdy jsme spektrum pořídili, nemůžeme zjistit rychlost v prostoru. Tangenciální rychlost pomocí spektroskopie nemůžeme vůbec zjistit, musíme ji určovat pomocí změny její polohy na obloze za dlouhé časové období. Nejrychlejší hvězdy se vůči pozadí pohnou i o několik obloukových sekund za rok.

Komentáře k řešení

Jestliže někomu vyjde rychlost $3 \cdot 10^{20}$ m/s, což je 10^{12} -krát více než rychlost světla, zřejmě něco není v pořádku. Prosím, čtete po sobě to, co napíšete. Je to vaše vizitka.

Dvojhvězda spektrální čáru rozštěpí, ale nerozšíří. U málo disperzního (slabého) spektrografu může dojít k rozšíření čáry vlivem oběhu obou složek kolem společného těžiště, ale rozšíření je na hranici přesnosti měření.

Červený posun, který by způsobilo gravitační pole hvězdy, je zanedbatelný.

Hélium v atmosféře nepochází z jaderných reakcí ve vnitru hvězdy. Zhruba 20 % atmosféry je tvořeno héliem vzniklým při Velkém třesku.

Na závěr – jestliže jste pochopili, jak se středuji veličiny, můžete se pokusit vypočítat koeficient pro rotaci hvězdy. Jestliže jste dobře počítali, vyjde vám 1/3.

Pavol Habuda

bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.4 ... tepelná vodivost kovu (5 bodů; průměr 2,05; řešilo 21 studentů)

Odvodte, jakým způsobem závisí tepelná vodivost kovu na teplotě, pokud znáte závislost jeho elektrické vodivosti na teplotě.

Pro vodivostní elektrony můžete použít model ideálního plynu, tj. elektrony se pohybují volně (přítomnost iontových zbytků vůbec neuvažujeme) a přímočaře až na občasné srážky s jinými elektrony, které změni směr i velikost jejich rychlosti.

Teplo přenesené krystalovou mřížkou kovu je zanedbatelné oproti teplu přenesenému vodivostními elektrony. Každý elektron má tepelnou kapacitu c , která nezávisí na teplotě.

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení učebnice pevných látek.

Úlohu vyřešíme v rámci Drudeho teorie kovů, která pochází z přelomu 19. a 20. století. Budeme předpokládat, že když přiblížíme atomy tak, aby vytvořily kovový krystal, stanou se valenční elektrony nevázanými a budou se moci volně pohybovat skrze krystal. Tyto elektrony budeme nazývat *vodivostní*. Iontové zbytky tvoří krystalovou mřížku a představují prakticky veškerou hmotu krystalu, proto pohyb iontů vzhledem k pohybu vodivostních elektronů zanedbáme.

Přestože mezi elektrony navzájem a mezi elektrony a ionty působí silná elektromagnetická interakce, na vodivostní elektrony aplikujeme kinetickou teorii ideálního plynu s jen drobnými modifikacemi. Hlavní předpoklady jsou:

1. *Aproximace nezávislých a volných elektronů.* Mezi srážkami je interakce vodivostních elektronů mezi sebou navzájem a s ionty zanedbána. To znamená, že se elektrony mezi srážkami pohybují rovnoměrně přímočaře nebo podle druhého Newtonova zákona, pokud se kov nachází ve vnějším silovém poli.
2. Srážky elektronů jsou okamžité události, které skokově změni směr a velikost rychlosti vodivostních elektronů. Pro pochopení vodivosti je jedno, zda se jedná o srážky mezi elektrony nebo o srážky elektronů s ionty.
3. Střední doba mezi srážkami⁴ τ nezávisí na poloze ani rychlosti elektronu. V teorii pevných látek se ukazuje, že tento předpoklad je překvapivě dobrý v celé řadě aplikací.
4. Elektrony dosahují tepelné rovnováhy s okolím jenom prostřednictvím srážek. Tento proces lze jednoduše popsat: okamžitě po každé srážce má elektron rychlost, která nijak nezávisí na jeho rychlosti před srážkou, náhodného směru a velikosti, která odpovídá teplotě v místě srážky.

Číselnou hustotu vodivostních elektronů budeme značit n , tyto hustoty jsou typicky tisíckrát větší než u ideálního plynu při normálním tlaku a teplotě.

Elektrická vodivost kovů

Diferenciální Ohmův zákon⁵

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

říká, že proud tekoucí kovem je přímo úměrný vnějšímu elektrickému poli. Konstantu úměrnosti σ nazýváme *elektrická vodivost*, směr vektoru proudové hustoty \mathbf{j} je rovnoběžný se směrem proudu v daném místě a jeho velikost odpovídá velikosti proudu vztaženého na jednotku plochy kolmé na směr tečení proudu.

⁴⁾ Střední doba od poslední srážky je τ a střední doba do následující srážky je rovněž τ .

⁵⁾ Tento zákon můžeme odvodit z Ohmova zákona $U = RI$, pokud sejmeme závislost této rovnice na tvaru vodiče.

V každém bodě krystalu kovu se elektrony pohybují různými rychlostmi, jejich průměrnou rychlost v daném bodě označme \mathbf{v} . Za nepřítomnosti vnějšího elektrického pole a při tepelné rovnováze by tato rychlost byla ve všech bodech nulová. Za přítomnosti vnějšího pole \mathbf{E} však elektrony budou mít nenulovou průměrnou rychlost opačného směru, než je směr vnějšího elektrického pole. Pro proudovou hustotu můžeme napsat

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}.$$

Zrychlení elektronu v době mezi srážkami je podle druhého Newtonova zákona $-e\mathbf{E}/m$. Je-li t doba od poslední srážky a \mathbf{v}_0 jeho rychlost okamžitě po srážce, pak pro rychlost elektronu máme $\mathbf{v}_0 - e\mathbf{E}t/m$. Jelikož předpokládáme, že elektron má po srážce náhodný směr rychlosti, nepřispěje \mathbf{v}_0 nijak do průměrné rychlosti, ta je proto dána střední hodnotou $-e\mathbf{E}t/m$. Jenomže střední hodnota t je τ , proto

$$\mathbf{v} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m} \Rightarrow \mathbf{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E}.$$

Pro elektrickou vodivost jsme tedy dostali

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (2)$$

Tepelná vodivost kovů

Je dobře známo, že elektrické vodiče vedou teplo mnohem lépe než izolátory. To Drude vysvětluje tím, že tepelná energie je přenášena elektrony mnohem spíše než ionty.

Představte si kovovou tyč, která má jeden konec teplý a druhý chladný. Díky tepelné vodivosti se bude teplejší konec ochlazovat a chladnější ohřívat, dokud se jejich teploty nevyrovnají. Tok tepelné energie je tedy způsoben rozdílem (gradientem) teplot. Pokud budeme chladný konec ochlazovat stejně rychle, jako se zahřívá, a teplý konec zahřívá, stejně rychle jako se ochlazuje, dosáhneme rovnovážného stavu, kde gradient teploty i tok tepelné energie jsou konstantní. Definujeme hustotu toku tepla \mathbf{j}_q jako vektor rovnoběžný se směrem toku tepla, jehož velikost odpovídá tepelné energii přenesené za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr toku tepla. Pro malé teplotní gradienty je hustota toku tepla přímo úměrná rozdílu teplot (Fourierův zákon)

$$\mathbf{j}_q = -\kappa \text{grad } T.$$

Konstantu úměrnosti κ nazýváme tepelná vodivost.

Pro kvantitativní odhad tepelné vodivosti budeme uvažovat jednorozměrný model, ve kterém se elektrony mohou pohybovat jen podél osy x . Teplota se mění spojitě podél osy x , takže platí $j_q = -\kappa dT/dx$. Připomeňme, že rychlost elektronu po srážce odpovídá teplotě mřížky v bodě srážky. Elektrony přicházející z teplejší strany budou mít vyšší energii než elektrony, přicházející z chladnější strany. V daném bodě x přichází polovina elektronů zleva a polovina zprava.

Označíme-li $\mathcal{E}(T)$ tepelnou energii na elektron v kovu, který je v tepelné rovnováze a má teplotu T , potom elektron, jehož poslední srážka se odehrála na souřadnici x' , bude mít tepelnou energii $\mathcal{E}(T[x'])$. Elektron přicházející zleva měl srážku v průměru na souřadnici $x - v\tau$, a nese proto průměrnou tepelnou energii $\mathcal{E}(T[x - v\tau])$. Podobně elektron přicházející zprava nese průměrnou tepelnou energii $\mathcal{E}(T[x + v\tau])$. Celkovou hustotu toku tepla dostaneme jako

počet elektronů na jednotku objemu krát jejich rychlost⁶ krát energie přenášená jedním elektronem

$$j_q = \frac{1}{2}nv[\mathcal{E}(T[x - v\tau]) - \mathcal{E}(T[x + v\tau])].$$

Za předpokladu, že střední volná dráha $v\tau$ je velice malá, provedeme rozvoj kolem bodu x

$$j_q = nv^2\tau \frac{d\mathcal{E}}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right).$$

Při přechodu do třech dimenzí musíme nahradit rychlost v x -ovou složkou rychlosti \mathbf{v} elektronu. Jelikož pro střední hodnotu x -ové složky (i ostatních) rychlosti platí $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}v^2$, kde v^2 je střední kvadratická rychlost, máme

$$\mathbf{j}_q = -\frac{1}{3}v^2\tau c \text{ grad } T,$$

kde c je měrná tepelná kapacita elektronového plynu

$$c = \frac{1}{V} \frac{dE}{dT} = \frac{N}{V} \frac{d\mathcal{E}}{dT} = n \frac{d\mathcal{E}}{dT}.$$

Pro tepelnou vodivost jsme tedy dostali

$$\kappa = \frac{1}{3}v^2\tau c. \quad (3)$$

Elektrická i tepelná vodivost závisí lineárně na střední době mezi srážkami τ , jejich podíl tedy na této veličině, o které bychom těžko uměli něco říci, nezávisí

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\frac{1}{3}cmv^2}{ne^2}. \quad (4)$$

Dále se pokusíme odvodit, jak tento podíl závisí na teplotě. Vyjdeme z Drudeho modelu, tj. použijeme zákony pro ideální plyn

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad c = \frac{3}{2}nk, \quad (5)$$

kde k je Boltzmannova konstanta. Výsledek je

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Poměr tepelné a elektrické vodivosti je přímo úměrný teplotě, což je hledaný výsledek, na který jsme se v zadání ptali. Říká se mu Wiedemannův-Franzův zákon.

Poslední vztah dává Lorentzovo číslo

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}. \quad (6)$$

⁶⁾ Můžete namítnout, že jsme přehlédli skutečnost, že elektron přicházející zleva má jinou střední rychlost než elektron přicházející zprava (ze stejného důvodu přenášejí různou tepelnou energii). Rigorózním postupem lze však ukázat, že naše chyba se kompenzuje s jiným přehlédnutím (střední doba τ závisí na rychlosti), a náš výsledek je proto správnější.

Toto číslo je konstanta nezávislá na teplotě a stejná pro všechny kovy. Jeho hodnota je asi poloviční než typické hodnoty Lorentzova čísla uvedené v následující tabulce. Ve svém původním

	$\kappa/\sigma T$ [$10^{-8} \text{ W}\cdot\Omega\cdot\text{K}^{-2}$] při teplotě 273 K	$\kappa/\sigma T$ [$10^{-8} \text{ W}\cdot\Omega\cdot\text{K}^{-2}$] při teplotě 373 K
Cu	2,20	2,29
Ag	2,31	2,38
Fe	2,61	2,88
Zn	2,28	2,30
Al	2,14	2,19
Sn	2,48	2,54
Bi	3,53	3,35

Experimentální hodnoty Lorentzova čísla $\kappa/\sigma T$ pro vybrané kovy při dvou různých teplotách.

chybném výpočtu (vodivost (2) mu vyšla poloviční) došel Drude k dvojnásobné hodnotě, než je (6), což bylo ve výjimečném souhlasu s experimentem. Jenomže se experimentálně nepovedlo ověřit elektronový příspěvek $c = 3nk/2$ k tepelné kapacitě kovu. Dokonce se zdálo, že elektrony k tepelné kapacitě nijak nepřispívají.

Správné vysvětlení dala až kvantová mechanika, podle které stavy elektronu s ostrou hodnotou energie mají pouze diskrétní spektrum. Elektrony jsou fermiony, proto se navíc v každém takovém stavu může nacházet nejvýše jeden elektron. Rozdělení energie elektronů potom popisuje Fermiho-Diracova statistika, která pro volné elektrony dává zcela jiné výsledky než (5)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{E}_F, \quad c = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{\mathcal{E}_F} \right) nk,$$

kde \mathcal{E}_F je Fermiho energie⁷. Pak dosazením do (4) dostaneme

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\Omega\cdot\text{K}^{-2}.$$

Tato hodnota Lorentzova čísla již odpovídá experimentálním datům.

Je vlastně náhoda, že ač Drudeho model nedokázal předpovědět správnou hodnotu Lorentzova čísla, vysvětlil, že nezávisí na teplotě.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.P ... dechové nástroje (4 body; průměr 2,69; řešilo 39 studentů)

Pokuste se vysvětlit, proč je možné příčnou flétnu „přefouknout“ o oktávu výše (tj. zahrát stejným hmatem i tón s dvojnásobnou frekvencí), zatímco u klarinetu toho dosáhnout nelze.

Úloha z FYKOSího archivu.

Zvuk, který slyšíme, je periodická změna tlaku vzduchu. U flétny naráží proud vzduchu z úst na hranu otvoru, tím vznikají víry, nehomogenity v tlaku. Dochází k různým odrazům vlnění, přičemž nejvýrazněji se uplatní frekvence, při které sloupec vzduchu rezonuje. Flétnu se všemi dírkami ucpanými si můžeme představit jako trubici na obou koncích otevřenou, protože

⁷⁾ Energie elektronu v nejvyšším zaplněném stavu při teplotě 0 K.

hráč vždy nechává část vstupního otvoru nezakrytou. Vzniká stojaté vlnění, na obou koncích trubice leží kmitny (ve skutečnosti se kvůli okrajovým jevům nalézají přibližně o 0,6 poloměru trubice od okraje směrem vně flétny). Vlnová délka základního tónu je dvojnásobná než délka flétny (viz obr. 3), jeho frekvenci určíme ze vztahu

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l},$$

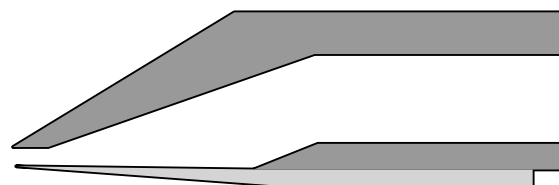
kde v je rychlost vlny v trubici.

Podmínce kmiten na obou koncích však také vyhovují ostatní vlny na obr. 3. Pro vlnu, jejíž délka je stejná jako délka flétny, platí

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{l} = 2f_0,$$

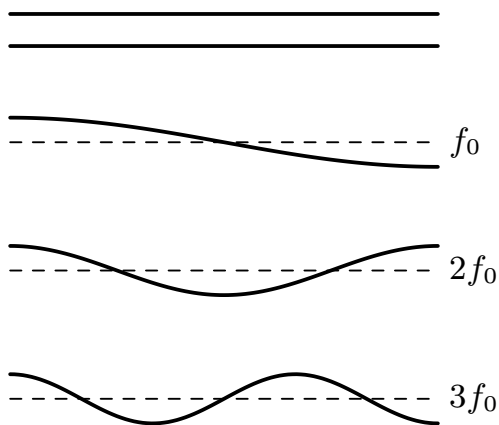
jedná se tedy o druhou harmonickou frekvenci. Vznikne, pokud je proud vzduchu dostatečně silný.

Konstrukce klarinetu je odlišná. Tento nástroj obsahuje klínovitý plátek (jazýček), mezi nímž a stěnami trubice je úzká mezera (obr. 2). Silný proud vzduchu vyvolá v této mezeře podtlak, jazýček se nadzdvihne, čímž tuto mezeru ucpe. Tím se reguluje proud vzduchu přicházející do trubice. Zvuková vlna rozkmitává jazýček, který budí další kmity vzduchového sloupce v trubici.

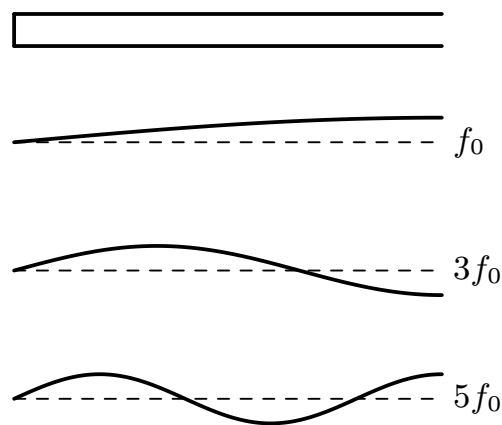


Obr. 2. Jazýček klarinetu

Při vhodném umístění a tlumení plátku je přefouknutí přeci jen možné, nesetkáváme se však se všemi harmonickými frekvencemi. Protože je mezera u jazýčku velmi malá, můžeme trubici považovat na tomto konci za uzavřenou, na druhém (vzdálenějším) konci za otevřenou. Rozšíření trubice na vzdálenějším konci zanedbáme. Vznikají stojaté vlny, které mají na jednom konci kmitnu a na druhém uzel (viz obr. 4).



Obr. 3. Vyšší harmonické u flétny



Obr. 4. Vyšší harmonické u klarinetu

Vlnová délka základního tónu je $\lambda = 4l$, odpovídající frekvence je

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l}.$$

Následující vlna má uvnitř nástroje ještě jeden uzel a jednu kmitnu, pro její frekvenci proto platí

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l/3} = 3f_0.$$

Obdobnou úvahou dospějeme k tomu, že mohou vzniknout pouze liché násobky základní frekvence. Třetí harmonické frekvence lze snadněji dosáhnout také otevřením otvoru ležícího přibližně ve třetině délky rezonanční trubice, změna hmatu ale nebyla v zadání povolena.

To, co jsme v tomto řešení nastínili, byl jen přibližný model těchto nástrojů, ve skutečnosti bude vznik tónu ovlivňovat více faktorů. Pokud vás více zajímá akustika těchto hudebních nástrojů, můžete se poučit např. na <http://www.phys.unsw.edu.au/~jw>.

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. E ... načechraná šlehačka (8 bodů; průměr 4,00; řešilo 42 studentů)

Změřte tlak plynu v sifonové bombičce. Bombička je buď plněná CO_2 a prodává se pro plnění sifonu v desetikusovém balení, nebo je plněná N_2O pro výrobu šlehačky.

Úlohu našel na internetu Karel Tůma.

Abych vás motivoval ke čtení, na úvod prozradím, že naprosto správné řešení nám došlo pouze jedno (od *Jirky Šperky*).

Nejjednodušší řešení této experimentální úlohy je přesto poměrně snadné. Tedy až na pár drobností, které si člověk musí předem uvědomit. Jednou z nich je, že vzhledem k dosti velikým hodnotám tlaku v sifonové bombičce už nelze použít při řešení stavovou rovnici ideálního plynu a z ní plynoucí souvislost mezi tlakem a hustotou. Později si ukážeme proč.

Prozatím zkusíme úlohu vyřešit s použitím van der Waalsovy rovnice, která popisuje chování reálného plynu o něco lépe. Znění této rovnice je

$$\left[p + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right] \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT,$$

odkud pro tlak plyne

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \left(\frac{n}{V} \right)^2. \quad (7)$$

Na výpočet tlaku p tedy potřebujeme znát hodnotu univerzální plynové konstanty R , konstanty pro uvažovaný plyn a , b , které snadno najdeme v tabulkách (vyslov [in'ternet]), látkové množství plynu v bombičce, vnitřní objem bombičky a teplotu, při které experiment probíhal. Poslední tři z uvedených veličin musíme zjistit experimentálně.

Při určení látkového množství si opět pomůžeme tabulkami – tentokrát chemickými. Budeme potřebovat molární hmotnost plynu v bombičce. V našem případě to byl obyčejný CO_2 na výrobu sody. Z molární hmotnosti CO_2 ($M_{\text{CO}_2} = 44 \text{ g/mol}$) a hmotnosti plynu v bombičce se pak dá určit látkové množství n plynu v bombičce jako

$$n = \frac{m_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2}},$$

kde n je látkové množství a m_{CO_2} hmotnost plynu.

Hmotnost plynu uvnitř bombičky snadno vypočítáme jako rozdíl hmotností bombičky před a po vypuštění plynu. Výrobce udává 8 gramů. Vážení na váze s přesností 0,1 g tento údaj nepotvrdila.

č. m.	Hmotnost před [g]	Hmotnost po [g]	m_{CO_2} [g]	n [mol]
1	30,6	24,9	$5,7 \pm 0,1$	$0,129 \pm 0,002$
2	32,0	25,5	$6,5 \pm 0,1$	$0,148 \pm 0,002$
3	34,4	25,3	$9,1 \pm 0,1$	$0,207 \pm 0,002$

Hmotnosti CO_2 v různých bombičkách a hodnoty n .

Zbývá tedy určit vnitřní objem bombiček. Jak se ukázalo, tento úkol byl na provedení (s rozumnou přesností) ze všeho nejkomplicovanější. Zvolili jsme metodu změření vnějšího objemu a dopočtení vnitřní dutiny ze známé hmotnosti prázdné bombičky a hustoty oceli. Zádrhel této operace tkví v tom, že je potřebné určit, o jaký druh oceli se jedná. Není totiž ocel jako ocel. Domníváme se, že ocel použitá na výrobu sifonových bombiček má hustotu $(7,85 \pm 0,10) \text{ g/cm}^3$. Zanedbali jsme hmotnost plynu uvnitř (která je použitými prostředky naprosto neměřitelná) a různou hustotu malé mosazné čepičky na každé sifonové bombičce. Objem mosazi v ní totiž nepřevyšuje $0,5 \text{ cm}^3$ a hustota oceli a mosazi je natolik podobná, že vzniklá chyba se blíží přesnosti měření.

č. m.	Hmotnost [g]	Objem [cm^3]	Dutina [cm^3]
1	$24,9 \pm 0,1$	16 ± 1	13 ± 1
2	$25,5 \pm 0,1$	18 ± 1	15 ± 1
3	$25,3 \pm 0,1$	17 ± 1	14 ± 1

Tabulka shrnuje výsledky měření vnitřního objemu sifonových bombiček.

Zmíněné konstanty pro CO_2 mají hodnoty $a = 0,396 \text{ Pa}\cdot\text{m}^3$, $b = 42,69 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}$. Experiment probíhal při pokojové teplotě $T = (293 \pm 3) \text{ K}$. Dosazením dat z tabulek do rovnice (7) dostaneme výsledky kolem 30 MPa, což je špatně.

A teď slíbené vysvětlení, proč nemůžeme použít stavovou rovnici *ideálního plynu*. Problém je ve slovíčku „ideální“. Možná si z hodiny fyziky pamatujete, jaké zjednodušující předpoklady byly učiněny při odvozování stavové rovnice ideálního plynu. Ideální plyn předpokládá nulové interakce mezi částicemi kromě dokonale pružných srážek. Částice navíc mají nulový objem. Ani jeden z těchto předpokladů tady neplatí. V reálném plynu (obzvláště při vysokém tlaku) se projevuje vlastní objem částic (koeficient b ve van der Waalově rovnici) a odpudivé síly mezi částicemi (koeficient a). Díky těmto odpudivým silám je vnitřní energie stlačeného plynu (ač stejné teploty) vyšší a mění se s objemem.

Někde na konci odvození stavové rovnice pro ideální plyn bývá v učebnicích malými písmeny poznámka, že vlastnosti reálných plynů se od ideálního poněkud liší, avšak při tlacích a teplotách uvažovaných ve většině případů si s ní vystačíme. Přibližná hodnota tlaku, ke které dospěla většina z vás měřením a dopočtením klasickou metodou, byla kolem 40 MPa, což je asi 400 atmosfér. Při tak vysoké hodnotě tlaku nám už ale nebude stačit ani van der Waalova rovnice.

S ohledem na částicovou strukturu plynu je jasné, že objem, tlak a teplota budou vzájemně svázané vztahem

$$Z = \frac{pV_m}{RT}, \quad (8)$$

kde V_m je molární objem a R , T a p jsou plynová konstanta, termodynamická teplota a tlak. Avšak $Z \neq 1$ (const.) jako ve stavové rovnici pro ideální plyn. Obecně je tzv. *kompresibilitní faktor* Z funkcí tlaku a v limitě $p \rightarrow 0$ se blíží 1. S rostoucím tlakem klesá a po dosažení

jisté hodnoty pak zase stoupá. Při vysokých tlacích je jeho hodnota pro všechny plyny větší než 1, což znamená, že jsou méně stlačitelné než ideální plyn, protože působí odpudivé síly mezi molekulami.⁸

Chování reálného plynu se v technice popisuje tzv. *virialní stavovou rovnicí*

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right),$$

ve které tři tečky značí další členy, které vedou k přesnějším výsledkům, ale pro vyšší mocniny V_m ve jmenovateli jsou většinou zanedbatelné. Pro námi uvažovaný molární objem je už $C/V_m^2 \ll B/V_m$. Viriální koeficienty B , C a případné další závisí na teplotě plynu. Existuje hodnota teploty, pro kterou má koeficient B hodnotu 0 a tato rovnice se blíží rovnici (8) se $Z = 1$. Chování plynu se pak podobá ideálnímu, ale opět jen do jisté meze. Hodnota této *Boylvy teploty* je pro CO_2 asi 715 K.

Jak se tedy bude chovat reálný plyn při izotermickém stlačení? Experimenty ukazují, že hodnota tlaku bude stoupat až do dosažení jistého kritického bodu. Pak začne plyn kondenzovat na kapalinu. Objem plynu se bude dále zmenšovat, ale tlak zůstane konstantní. Tento tlak se nazývá *tlak nasycených par kapaliny* při dané teplotě. Množství kapaliny se bude zvyšovat, až dokud všechen plyn nezmění skupenství, a pak se zmenšujícím se objemem poroste tlak velmi rychle. Pro příjemných 20°C, ve kterých probíhal experiment, je kritický tlak p_c oxidu uhličitého asi 60 atm.

Pro vyřešení úlohy budeme potřebovat ještě jednu kritickou konstantu pro oxid uhličitý, a to molární objem kapalného CO_2 při kritickém tlaku V_c . Ten je roven 78 cm³/mol. Snadným výpočtem ($V = nV_c$) si lze ověřit, že objem CO_2 ve všech bombičkách byl menší než objem příslušného množství kapalného CO_2 (tedy bombičky neobsahovaly stlačenou kapalinu), a proto tlak ve všech bombičkách byl roven $p_c \doteq 60$ atmosfér.

Tudíž ponaučení plynoucí z této úlohy je – vždy provést diskusi. Na to naprostá většina z vás zapoměla. Fyzika není jen hraní si se vzorečky. Je také třeba rozumět jim a vědět, kdy je můžeme použít. Je třeba zvážit, kdy ještě zjednodušení, která jsme použili, vedou k akceptovatelným výsledkům.

Bodování vychází z faktu, že za dobře teoreticky vyřešenou úlohu bez experimentu je jenom polovina bodů. Pak také za provedený experiment se špatným teoretickým zdůvodněním dostala většina z vás jenom polovinu z možných bodů. Pokud se vyskytly případné další chyby (naprosto špatný výsledek nebo neuvedené chyby měření), strhával jsem další body. Pouze sedm z celkového počtu přes 50 řešitelů si uvědomilo, že CO_2 v sifonové bombičce není v plynném skupenství. Za diskusi řešení a přiznání nereálnosti výsledku měřeného „klasickým“ způsobem jsem přidával 2 body. Za náznak řešení, obzvláště za užití výrazu „tlak nasycených par“ jsem přidával další bod a za správný výsledek byl plný počet. Očekával jsem porovnání objemu kapalného CO_2 a vnitřku sifonové bombičky. Obecně nejlépe obstáli řešitelé, kteří se pokusili změřit tlak v bombičce přímo.

Peter Greškovič
grepe@fykos.mff.cuni.cz

⁸⁾ Průběh hodnoty kompresibilitního faktoru souvisí právě se vzájemnými silami, kterými na sebe molekuly působí. Ty jsou nejdřív přitažlivé a rostou (faktor klesá), ale jak se vzdálenosti mezi molekulami snižují, začnou být odpudivé (faktor stoupá).

Úloha II. S ... aparát statistické fyziky (5 bodů; průměr 3,43; řešilo 7 studentů)

- a) Jaký je vztah mezi počtem mikrostavů $\Omega(E)$ termostatu s energií $\leq E$ a veličinou $\eta(E)$ (tj. počtem mikrostavů s energií v intervalu $E \pm \Delta$) pro malá Δ ?
- b) Mějme systém N nezávislých harmonických oscilátorů, přičemž energie každého oscilátoru může nabývat hodnot $n\hbar\omega$ s $n = 0, 1, \dots$ (zanedbáváme energii nulových kmitů). Jaký bude mít tvar veličina $\eta(E)$ a $\beta(E)$ pro velká N a E ?
- c) Najděte stejné veličiny jako v předchozím příkladu pro systém N neinteragujících volných elektronů uvězněných na úsečce, (*) ve čtverci, (**) v krychli.

Nápověda. Použijte de Broglieho relace mezi hybností a vlnovou délkou de Broglieho vlny. Na úsečce se musí vejít celý počet půlvln. De Broglieho vlny ve čtverci si lze představit coby součin vln ve směru osy x a osy y , kvantovací podmínka je podobná jako pro úsečku.

Zadal autor seriálu Matouš Ringel.

- a) Veličina $\eta(E)$ byla definována jako počet mikrostavů termostatu s energií v intervalu $E \pm \Delta$, kde Δ je malé v porovnání s energií E . Veličinu $\Omega(E)$ jsme definovali coby počet mikrostavů termostatu s energií $\leq E$. Pokud si toto uvědomíme, nepodivíme se nad rovnicí

$$\eta(E) = \Omega(E + \Delta) - \Omega(E - \Delta).$$

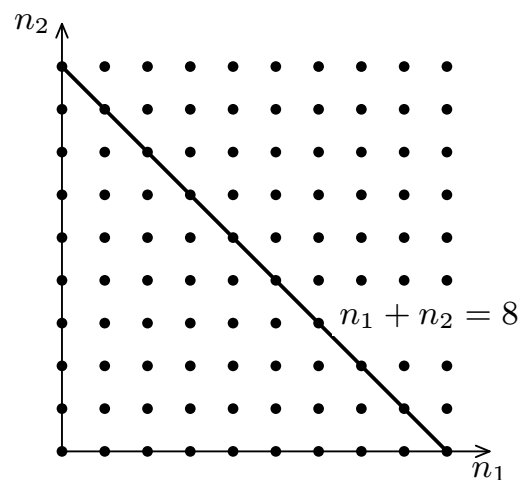
Pokud je Δ dostatečně malé, můžeme veličinu Ω přibližně vyjádřit pomocí diferenciálu, odkud získáme vztah

$$\eta(E) = \left(\Omega(E) + \frac{d\Omega}{dE} \cdot \Delta \right) - \left(\Omega(E) + \frac{d\Omega}{dE} \cdot (-\Delta) \right) = \frac{d\Omega}{dE} \cdot 2\Delta.$$

- b) Úlohu nejdříve vyřešíme pro $N = 2$. Nejprve vypočítáme veličinu $\Omega(E)$. Jelikož energie nabývá pouze celočíselných hodnot, $\Omega(E)$ se zřejmě změní skokem vždy, když E dosáhne celočíselné hodnoty. Energie se musí rozdělit mezi dva oscilátory s energetickými hladinami $\hbar\omega n$. Počet mikrostavů $\Omega(E)$, kde $E = \hbar\omega n$, se tedy bude rovnat počtu způsobů, kterými lze číslo n rozdělit na součet dvou celých čísel, $n = n_1 + n_2$. Do grafu si znázorníme všechny možné dvojice (n_1, n_2) a nakreslíme přímku $n = n_1 + n_2$. Snadno si rozmyslíme, že přípustné dvojice s energií $\leq E$ budou ležet v části prvního kvadrantu omezené zkonstruovanou přímkou (včetně bodů na přímce ležících). V tomto konkrétním případě je můžeme snadno vypočítat přímo.

Pro obecný případ však bude vhodnější použít malý trik. Všimneme si, že každý puntík lze ztotožnit s jedním čtverečkem vzniklé čtvercové mříže. Plocha každého čtverečku je rovna jedné. Počet puntíků je proto roven ploše všech čtverečků pod přímkou a těsně nad ní. Avšak při dostatečně velkých n neuděláme velkou chybu, pokud zanedbáme plochu čtverečků ležících v těsném okolí přímky a za celkovou plochu čtverečků prohlásíme plochu pod přímkou. To proto, že plocha pod přímkou roste jako n^2 , kdežto plocha čtverečků v těsném okolí přímky roste pouze jako n a $n/n^2 \rightarrow 0$. Pro $N = 2$ tedy dostáváme výsledek

$$\Omega(E) = \Omega(\hbar\omega n) \approx \frac{n^2}{2}.$$



Obr. 5

V obecném případě budeme analogicky počítat N -rozměrný objem pod plochou $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$. Není příliš jasné, jak jej vypočítat. Nicméně nás zajímala pouze závislost na energii (tj. na n). Snadno si uvědomíme obecnou charakteristiku objemu v k -rozměrném prostoru. Totiž že zvětšíme-li těleso λ krát, jeho objem se zvětší λ^k krát, což můžete snadno ověřit pro 1D (délku úsečky), 2D (plochu obrazce) i 3D (objem tělesa). Počet rozdělení čísla n je tedy přibližně úměrný jeho N -té mocnině. Veličina $\Omega(E)$ proto musí splňovat úměrnost

$$\Omega(E) = \Omega(\hbar\omega n) \sim n^N \sim E^N.$$

Zájemci se mohou pokusit vypočítat konstantu úměrnosti. S ní je pak výsledek roven $\Omega(\hbar\omega n) = n^N/N!$.

Z předchozího příkladu víme, že veličina $\eta(E)$ je úměrná derivaci $\Omega(E)$, čili

$$\eta(E) \sim E^{N-1}.$$

V seriálu bylo definováno $\beta(E) = d \ln \eta(E) / dE$, takže platí $\beta(E) = (N-1)/E$. energii E celého systému napíšeme ve tvaru $E = \varepsilon N$, kde ε má význam jakési střední energie jednoho oscilátoru. Vztah pro β můžeme přepsat do tvaru $\beta(E) = \beta(N\varepsilon) \approx 1/\varepsilon$. V tomto tvaru je jasně vidět, že $\beta(E)$ závisí pouze na průměrné energii jednoho oscilátoru a nikoliv na jejich počtu.

Z odvozených vztahů můžeme vyzorovat jeden zajímavý jev. Zkoumejme počet mikrostavů s energií mezi E a $E - \delta$. Z výše uvedeného pro tento počet dostáváme vzorec $\Omega(E) - \Omega(E - \delta) \sim E^N - (E - \delta)^N$. Ten pro velká N upravíme užitím definice funkce e^x ($e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$)

$$\Omega(E) - \Omega(E - \delta) \sim E^N - (E - \delta)^N = E^N \left(1 - \left(1 - \frac{\delta}{N\varepsilon} \right)^N \right) \approx E^N \left(1 - e^{-\delta/\varepsilon} \right).$$

Tento výraz je díky exponenciále podstatně odlišný od jedničky jen v oblasti s šířkou δ řádově rovnou ε . To znamená, že téměř všechny mikrostavy s energií $\leq E$ mají energii v okolí o šířce zhruba střední energie ε jednoho oscilátoru, což je poměrně překvapivý výsledek.

- c) Jak je (by mělo být) známo ze školy, de Broglieho relace svazují hybnost elektronu, resp. energii elektronu s vlnovou délkou, resp. frekvencí příslušné de Broglieho vlny. Pro jedno-rozměrný elektron uvězněný na úsečce mají tvar

$$\frac{h}{\lambda} = \hbar k = p \quad \text{a} \quad \hbar\omega = E.$$

Bohrova kvantovací podmínka požaduje, aby na hranicích oblasti, ve které je elektron uvězněný, byl uzel de Broglieho vlny. Na úsečku se proto může umístit jen celý počet půlvln. Vlnová délka proto musí být rovna $\lambda = 2L/n$, kde $n > 0$ je počet půlvln na úsečce délky L . Pro přípustné hybnosti dostáváme $p_n = \hbar n/2L$. Klasická energie volného elektronu je rovna kinetické energii

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2}.$$

Tímto jsme vypočítali energetické spektrum elektronu uvězněného na úsečce.

De Broglieho vlna elektronu na čtverci o straně L je (jak bylo napovězeno) součinem vln ve směru x a y . Kvantovací podmínka požaduje nulovou amplitudu na stranách čtverce,

vlna v příslušném směru musí mít tedy na hraně uzel. Proto pro hybnosti ve směru x a y píšeme

$$p_{x,n_x} = \frac{hn_x}{2L} \quad \text{a} \quad p_{y,n_y} = \frac{hn_y}{2L}.$$

Kinetická energie elektronu je rovna $p^2/2m = (p_x^2 + p_y^2)/2m$, takže energetické spektrum bude

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2).$$

Kdo ví, o čem jde řeč, nebude překvapen spektrem

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

pro trojrozměrný elektron uvězněný v krychli o straně L .

Dále budeme postupovat podobně jako v bodě b). Pro jednoduchost budeme uvažovat jednorozměrný elektron. Energie N elektronů popsaných kvantovými čísly n_1, \dots, n_N bude součtem energií jednotlivých elektronů, tj.

$$E_k = \frac{h^2}{8mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2) = \frac{h^2 k^2}{8mL^2}.$$

Počet mikrostavů $\Omega(E)$ bude roven počtu N -tic přirozených čísel, jejichž součet druhých mocnin je $\leq k^2$.

Pro $N = 2$ si nakreslíme podobný diagram jako v bodě b) (obr. 6). Do něj znázorníme čtvrtkružnici $n_1^2 + n_2^2 = k^2$. Všechny přípustné kombinace (puntíky) se nacházejí uvnitř čtvrtkruhu. Téměř každému opět koresponduje jeden čtvereček o jednotkové ploše, počet rozdělení proto bude přibližně roven ploše čtvrtkruhu, tedy $\pi k^2/4$, a příslušné

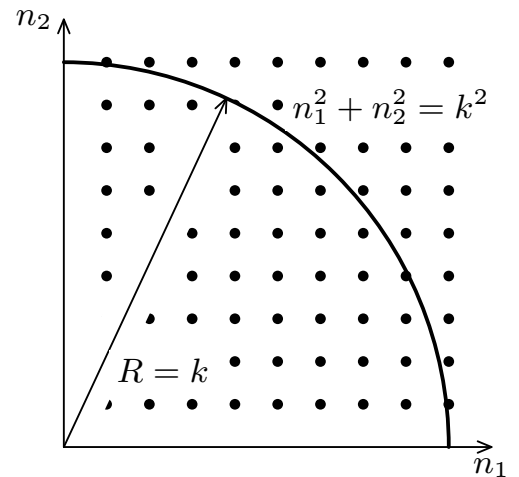
$$\Omega(E) = \pi k^2/4 = \frac{2\pi mL^2}{h^2} E.$$

Pro obecné N bude počet mikrostavů $\Omega(E)$ roven počtu N -tic čísel n_1, \dots, n_N , splňujících nerovnost $n_1^2 + \dots + n_N^2 \leq k^2$. Tento počet je přibližně roven objemu N -rozměrné „čtvrtkoule“ o poloměru k . Již v úloze b) jsme vyjasnili, že objem libovolného N -rozměrného tělesa je úměrný jeho charakteristickému rozměru na N -tou. Proto

$$\Omega(E) \sim k^N \sim E^{N/2}.$$

V tomto případě již není jednoduché vypočítat konstantu úměrnosti. Vypočítáme ještě veličinu $\eta(E) \sim E^{N/2-1}$ a veličinu $\beta(E) = (N/2 - 1)/E$.

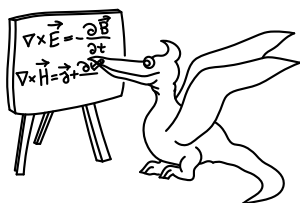
Každý teď jistě snadno odvodí závislost $\Omega(E)$ pro 2D elektron ($\Omega(E) \sim E^N$) i pro 3D elektron ($\Omega(E) \sim E^{3N/2}$).



Obr. 6

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Díl čtvrtý

V tomto díle seriálu navážeme na příklady z minulého dílu a vyřešíme několik dalších problémů. Tentokrát to budou otázky (nejen) historické důležitosti, které v minulém století ukázaly na rozpor předpovědi klasické fyziky se skutečností a nakonec vedly až k formulaci kvantové mechaniky. Konkrétně půjde o vysvětlení poklesu tepelné kapacity plynů a kovů při nízkých teplotách a o vysvětlení tvaru spektra záření černého tělesa.

Klasické předpovědi

Nejprve se však podíváme, co vlastně předpovídá klasická fyzika. Především v klasické mechanice se dá energie zapsat jako součet kinetické a potenciální energie, kde kinetická energie závisí jenom na hybnostech a potenciální energie na hybnostech nezávisí. Dá se ukázat (prostředky z druhého dílu seriálu), že každý stupeň volnosti systému (např. x -ová složka hybnosti j -té částice) přispívá k střední kinetické energii hodnotou $kT/2$. Například jedna částice má tři stupně volnosti, takže její střední kinetická energie bude $3kT/2$. Teď již umíme určit střední kinetickou energii libovolného systému.

Dále potřebujeme určit střední potenciální energii systému. Zde hraje důležitou roli takzvaný *virialový teorém*, jenž ji svazuje se střední hodnotou kinetické energie. Virialový teorém tvrdí, že pokud potenciální energie závisí lineárně na kvadrátech poloh⁹, je střední potenciální energie připadající na jeden stupeň volnosti rovna střední kinetické energii připadající na jeden stupeň volnosti, tedy $kT/2$. Čili například jednorozměrný (tj. s jedním stupněm volnosti) harmonický oscilátor by měl střední hodnotu potenciální energie rovnu $kT/2$.

Tyto vztahy mají dosti obecnou platnost. Můžeme je například použít pro odhad velikosti fluktuací světelné stopy zrcátkových přístrojů; to jsou zrcátka zavěšená na vláknech, která se vychylují podle velikosti měřené veličiny, například magnetického pole (pak se na vlákno zavěsí ještě kalibrovaný magnetek). Na zrcátko svítíme a z polohy odraženého paprsku vyvozujeme měřenou veličinu. Stopa se ale i po odstranění všech vibrací bude chvět, neboť do zrcátka naráží molekuly vzduchu. Zrcátko se při malých odchylkách φ od aktuální rovnovážné polohy chová jako harmonický oscilátor s potenciální energií $V = q\varphi^2/2$, kde q je „tuhost“ vlákna. Podle předchozích odstavců víme, že střední potenciální energie jednoho stupně volnosti je $kT/2$. Proto střední kvadratická odchylka (fluktuace) stopy od správné polohy bude $\langle \varphi^2 \rangle = kT/q$. Fluktuaci tedy můžeme zmenšit snížením teploty nebo použitím tužšího vlákna, případně úplným odčerpáním vzduchu.

Pro naše účely je důležitý spíše jiný příklad. Představme si krystalovou mřížku plnou atomů kmitajících kolem svých rovnovážných poloh. Pokud tyto kmity nejsou příliš velké, můžeme kmitání považovat za harmonické. Střední kinetická energie jednoho atomu je $3kT/2$ (atom má tři stupně volnosti), střední potenciální energie bude taktéž $3kT/2$ (atom kmitá ve třech směrech), střední celková energie proto bude $3kT$. V jednom molu látky je N_A částic, takže

⁹⁾ Přesněji pokud je potenciální energie kvadratickou formou poloh (může tedy lineárně záviset krom členů typu x_i^2 i na součinech typu $x_i x_j$).

celková energie by měla být $3N_A kT = 3RT$. Molární tepelná kapacita je definována jako množství tepla potřebného na ohřátí krystalu o 1 K, $c = dQ/dT$. Poněvadž krystal nekoná práci, je dodané teplo přímo rovno změně vnitřní energie, která je, jak víme, rovna $3RT$. Proto by molární tepelná kapacita krystalu měla být

$$c = 3R.$$

Tento vztah se nazývá *Dulongův-Petitův zákon*; tepelná kapacita podle něj nezávisí na teplotě. Ovšem experimentálně bylo zjištěno, že tepelná kapacita jde se snižující se teplotou k nule. Navíc je to nutné, pokud chceme udržet postulát o existenci nejmenší teploty, absolutní nuly, jíž nejde dosáhnout.

Téměř shodný je i problém poklesu tepelné kapacity víceatomových plynů. Molekulu plynu si klasicky představíme jako obrazec, v jehož vrcholech je rovnovážná poloha částic, jež jsou k ní vázány lineární vratnou silou, tj. potenciálem harmonického oscilátoru. Vypočítáme střední energii pro jednoduchost dvouatomové molekuly (stejnou úvahu je analogicky možné provést pro libovolně složité molekuly). Molekula se může pohybovat jako celek, na což případně energie $3kT/2$, dále může rotovat ve dvou kolmých směrech (nikoliv tedy podél osy molekuly) (příspěvek kT) a nakonec mohou molekuly harmonicky kmitat v jednom směru kolem rovnovážných poloh. Tomu odpovídá příspěvek $kT/2$ za kinetickou energii a $kT/2$ za potenciální. Dohromady to dělá $7kT/2$, odpovídající tepelná kapacita 1 molu plynu by měla být

$$c = 7R/2.$$

Ani tato závislost není správná. Pro některé plyny hodnota c přijatelně souhlasí s experimentem při pokojových a vyšších teplotách, avšak při nižších teplotách dochází k poklesu tepelné kapacity. Je zajímavé, že nejdříve dojde k poklesu střední energie molekuly o kT , kde se hodnota na nějaký čas zastaví a teprve pak klesá až k nule. Pokud kT identifikujeme jako příspěvek od kmitání, dochází zřejmě k jakémusi „zamrznutí“ kmitání.

Kvantový harmonický oscilátor

Naším úkolem je vysvětlit pozorovanou závislost. Jak jsme již naznačili, nesrovnalosti leží v nekvantovém popisu situace. Pohyb těžiště relativně těžkého objektu, jako je molekula lze popisovat klasicky i při dosti nízkých teplotách. Hůře je na tom rotace molekuly, ale i tu lze klasicky popisovat až do teplot řádově 10 K (kromě izotopů vodíku). Avšak klasický popis mikroskopického harmonického oscilátoru je možný až při teplotách v řádech tisíců kelvinů. Musíme tedy určit statistické vlastnosti souboru nezávislých (neboť jednotlivé atomy v molekule jsou téměř nezávislé) kvantových harmonických oscilátorů.

Jelikož jsou oscilátory nezávislé, stačí uvažovat jen jeden. Již dříve jsme zmínili, že kvantový harmonický oscilátor se může nacházet jen ve stavech s energií $E_n = \hbar\omega n$, kde $n = 0, 1, \dots$ ¹⁰ Abychom mohli určit tepelnou kapacitu, musíme nejdříve znát střední energii. Tu můžeme vypočítat metodou uvedenou ke konci druhého dílu seriálu. Pro připomenutí ji tu znovu odvodíme na našem konkrétním případě.

Pravděpodobnost, že oscilátor bude ve stavu s energií E_n , je podle Boltzmannova vzorce

$$p_n = \frac{\exp(-\beta E_n)}{Z} = \frac{\exp(-\beta E_n)}{\sum_i \exp(-\beta E_i)}.$$

¹⁰⁾ Správně bychom měli psát $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, avšak zanedbání nulové energie zde nehraje žádnou roli.

Střední hodnota energie je proto

$$U = \sum_n E_n p_n = \frac{\sum_n E_n \exp(-\beta E_n)}{\sum_n \exp(-\beta E_n)}.$$

Dosadíme-li za E_n , dostaneme

$$U = \frac{\sum_n \hbar\omega n \exp(-\beta\hbar\omega n)}{\sum_n \exp(-\beta\hbar\omega n)} = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n},$$

kde $x = \exp(-\beta\hbar\omega) < 1$. Úkolem je sečíst vzniklé řady. Spodní řada nám jistě nečiní potíže, neboť jde o obyčejnou geometrickou řadu se součtem $1/(1-x)$. Horní je však o něco složitější. Ve druhém díle jsme prozradili šikovný trik, jak ji vypočítat¹¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Vraťme se však k fyzice. Pokud použijeme předchozí výsledky v rovnici pro U , dostaneme

$$U = \hbar\omega \frac{x}{1-x} = \frac{\hbar\omega}{x^{-1}-1} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega)-1} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}.$$

Pokud je teplota dostatečně velká (a tedy $\hbar\omega \ll kT$), můžeme pomocí vztahu $e^x \approx 1+x$ platného pro $x \rightarrow 0$ přibližně položit $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1+\hbar\omega/kT$, čímž pro U dostaneme $U \approx kT$, tedy výsledek v souladu s předpovědí klasické fyziky.

Nyní již víme, jak závisí střední energie oscilátoru na teplotě. Vypočítejme ještě tepelnou kapacitu takového oscilátoru

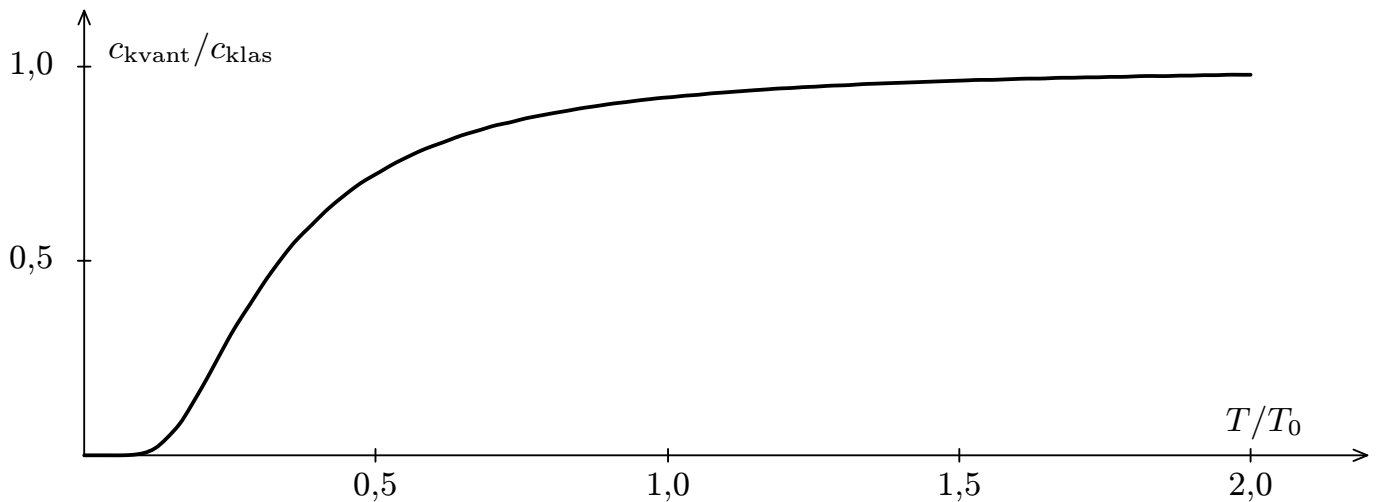
$$c = \frac{dU}{dT} = \frac{\hbar^2\omega^2}{kT^2} \frac{\exp(\hbar\omega/kT)}{(\exp(\hbar\omega/kT)-1)^2} \approx k \left(1 + \frac{\hbar\omega}{kT}\right) \rightarrow k.$$

Aproximace v pravé části jsou založeny na stejných vztazích jako aproximace výše a platí opět při dostatečně velké teplotě. Graf závislosti si můžete prohlédnout na obrázku 7. V něm je vyneseno poměry kvantové a klasické tepelné kapacity v závislosti na poměru teploty a jakési charakteristické teploty $T_0 = \hbar\omega/k$ (tento poměr musí mít rozměr teploty, protože v exponenciále může stát jen bezrozměrné číslo). Při teplotách podstatně větších než T_0 jsou kvantové efekty naprosto zanedbatelné, při teplotách srovnatelných se již nedají dobře zanedbat.

¹¹⁾ Pro zajímavost zde ukážeme, jak odvodit následující vztah (skoro) čistě algebraicky. Začneme jednodušší řadou, geometrickou $S = 1+x+x^2+\dots$. Když od této řady odečteme jedničku, dostaneme $S-1 = x+x^2+\dots$. Nabízí se vytknout x , odkud získáme $S-1 = x \cdot (1+x+x^2+\dots) = x \cdot S$. Z této rovnice již snadno spočítáme $S = 1/(1-x)$. Podobně budeme postupovat i v případě řady $P = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \dots$. Nyní však nebudeme odečítat jedničku, nýbrž celou geometrickou řadu $x \cdot S = x+x^2+\dots$. Takto dostaneme $P-xS = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + \dots$. Opět se nabízí vytknout x a získat rovnici $P-xS = x \cdot (1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \dots) = x \cdot P$. Odtud již plyne výsledek

$$P = \frac{xS}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Abychom získali představu o konkrétních číslech, uvedeme hodnotu charakteristické teploty T_0 pro dusík (3300 K) a kyslík (2200 K).



Obr. 7. Poměr kvantové a klasické předpovědi pro závislost tepelné kapacity plynu na teplotě.

Odvozená závislost velice dobře vystihuje pokles tepelné kapacity plynů v širokém rozmezí teplot. S vysvětlením tepelné kapacity krystalu je to již horší. Náš (vlastně Einsteinův) jednoduchý model nezávislých harmonických oscilátorů předpovídá příliš rychlý pokles tepelné kapacity s teplotou. Pokud se přesto pokusíme nafitovat odvozenou závislost na experimentální data, dostaneme hodnoty charakteristické teploty T_0 řádově stovku K (pro cín) a řádově tisíc K pro diamant. Odtud plyne, že diamant bude mít za pokojové teploty tepelnou kapacitu podstatně menší, než předpovídá Dulongův-Petitův zákon. Příčinu nepřilíhající shody s experimentem můžeme hledat v předpokladu nezávislosti oscilátorů. Vždyť dané atomy přeci interagují s okolními atomy, a to obzvláště při nízkých teplotách, kdy se všeobecně objevuje sklon ke kolektivnímu chování. Jsou-li atomy mezi sebou vázány lineární vratnou silou, můžeme se na krystal podívat jako na celek a najít přípustné módy kmitání atomů (podobně jako třeba módy na struně). Energetické spektrum pak bude složitější.

Záření černého tělesa

Dále budeme zkoumat módy kmitání elektromagnetického pole v krychlové krabici o straně L . Jednomu módu odpovídá jeden foton. Pokusíme se vypočítat rozdělení počtu fotonů v závislosti na energii. Musíme si uvědomit jednu důležitou věc. Totiž že fotonů v krabici není nějaké neměnné množství, fotony mohou vznikat a zanikat. Jejich střední počet v rovnováze je dán statistickou fyzikou.

Jelikož jsme se již trochu rozcvičili, budeme postupovat svižněji. Nechť se fotony mohou nacházet ve stavech s energiemi E_1, E_2, \dots , přičemž v každém stavu může být libovolně mnoho fotonů. Jestliže je v těchto stavech právě n_1, n_2, \dots fotonů, bude celková energie rovna $E = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots$. Příslušná partiční suma (definice partiční sumy Z viz druhý díl seriálu ke konci) pak bude dána vztahem

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \exp(-\beta(n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots)) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \exp(-\beta n_1 E_1) \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp(-\beta n_2 E_2) \cdots,$$

což se dá napsat jako součin

$$Z = \prod_k \left(\sum_{n_k=0}^{\infty} \exp(-\beta n_k E_k) \right).$$

Vnitřky součinu jsou geometrické řady vůči n_k , takže je zaměníme za jejich známý součet a dostaneme

$$Z = \prod_k [1 - \exp(-\beta E_k)]^{-1}.$$

Postupem vyvinutým na konci druhého dílu, jehož speciálním případem je postup použitý k určení střední energie harmonického oscilátoru, vypočítáme střední počet fotonů v k -tém stavu

$$\langle n_k \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial(\beta E_k)} = -\frac{\partial}{\partial(\beta E_k)} \left(-\sum_i \ln(1 - \exp(-\beta E_i)) \right) = \frac{1}{\exp(\beta E_k) - 1}.$$

Kdybychom věděli, jaké jsou k dispozici hladiny E_k , znali bychom odteď spektrum černého tělesa.

K získání odpovědi použijeme podobnou metodu jako při určování počtu mikrostavů pro elektron v krabici (což bylo předmětem úlohy k druhému dílu seriálu). Jeden foton – mód vlnění – o frekvenci ω má energii $\hbar\omega$. Módy se do krabice mohou naskládat jedinečně tak, že příslušné vlny mají uzly na stěnách krabice. Tyto vlny si lze představit jako součin vln ve směrech x , y a z . Naše požadavky si vynucují, aby se v každém směru vyskytoval celý počet půlvln. Označíme-li $k_x = 2\pi/\lambda_x$ vlnové číslo ve směru x , kvantovací podmínka $n\lambda/2 = L$ pro něj zní $k_x = n_x\pi/L$; podobně pro ostatní směry. Vektorově zapsáno

$$\mathbf{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{\pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$$

Jak jistě snadno nahlédneme, pro fotony (elektromagnetické vlny) platí disperzní vztah $\omega = kc$. Energie fotonu je úměrná frekvenci ω , závisí tedy přímo úměrně na velikosti k vlnového vektoru \mathbf{k} . Tu ovšem snadno vypočítáme, platí

$$k^2 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Při dostatečně vysokých teplotách je vybuzeno mnoho módů; potom místo diskrétních stavů můžeme uvažovat jako o kontinuu stavů, ve kterém se n_i mění spojitě. Určíme počet mikrostavů s vlnovým číslem $\leq k$ (a tedy energií $\leq \hbar ck$). Tento počet $\Omega(k)$ (resp. trik sloužící k jeho nalezení) jsme odhalili ve zmiňované úloze k druhému dílu. Jde vlastně o objem „osminokoule“, v níž může ležet koncový bod vektoru \mathbf{k} . Tato „osminokoule“ má poloměr $R = Lk/\pi$, takže její objem jest

$$\Omega(k) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{Lk}{\pi} \right)^3.$$

Počet částic s velikostí vlnového vektoru mezi k a $k + dk$ je potom zřejmě roven $\Omega(k + dk) - \Omega(k) \approx (d\Omega/dk) dk = g(k) dk$. Veličina $d\Omega/dk = g(k)$ má zřejmě význam jakési hustoty stavů. Ze vzorce pro $\Omega(k)$ dostaneme explicitní vyjádření $g(k)$

$$g(k) dk = \frac{d\Omega(k)}{dk} = L^3 \frac{k^2 dk}{2\pi^2} = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}.$$

Záměna $L^3 = V$ reflektuje skutečnost, že výraz nezávisí na tvaru krabice (jak se dá dokázat). Nyní v rovnici pomocí výše uvedeného vztahu $E = \hbar kc$ dosadíme za k

$$g(E) dE = V \frac{E^2 dE}{2\pi^2 \hbar^3 c^3}.$$

Ještě jsme zapomněli, že vlnu kromě směru šíření charakterizuje i polarizace. V případě fotonu je to projekce momentu hybnosti na směr pohybu. V každém případě existují dva nezávislé směry polarizace (u fotonu dvě opačné projekce), takže náš výsledek musíme pronásobit dvěma

$$g(E) dE = V \frac{E^2 dE}{\pi^2 \hbar^3 c^3}.$$

Tolik je mikrostavů s energií mezi E a $E + dE$.

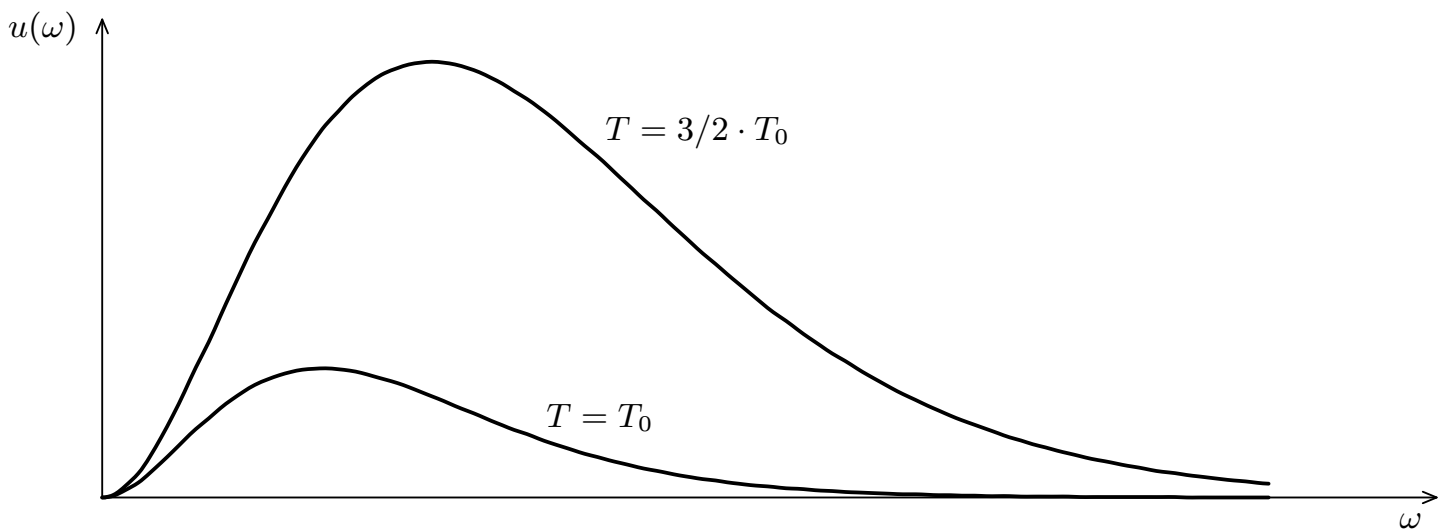
Všechny stavy z tohoto okolí mají energii přibližně E , pro střední počet fotonů $\langle n_k \rangle$ v jednom takovém stavu jsme výše odvodili jistý vzorec. Tento vzorec stačí pronásobit nalezeným počtem $g(E) dE$ a tím dostaneme kýžený výsledek, střední počet fotonů ve stavech s energií mezi E a $E + dE$

$$n(E) dE = \langle n \rangle \cdot g(E) dE = \frac{1}{\exp(\beta E) - 1} \cdot V \frac{E^2 dE}{\pi^2 \hbar^3 c^3} = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{E^2}{\exp(\beta E) - 1} dE.$$

Názornější možná bude rozdělení celkové energie v krabici podle energie, které získáme prostým přenásobením vztahu výše energií. Pokud do něj pro energii E jednoho fotonu dosadíme $E = \hbar\omega$, dostaneme rozdělení energie podle frekvencí. Toto rozdělení napíšeme jako $u(\omega) d\omega$, kde u hraje roli spektrální hustoty energie. Rozdělení se nazývá *Planckův vyzařovací zákon* a má tvar

$$u(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} d\omega.$$

Planckův zákon je známý i ze středoškolské fyziky jako vztah pro spektrální rozdělení intenzity záření černého tělesa. Pojem černého tělesa je idealizace, má reprezentovat záření v tepelné rovnováze, nicméně pokud záření uniká do prostoru, není v tepelné rovnováze. V každém případě lze experimentálně uskutečnit dobrou aproximaci záření černého tělesa, vezmeme-li naši krabici se zářením a do ní uděláme malou díрку. Unikající záření bude mít spektrum velice přesně popsané Planckovým vztahem. Energie, která projde za sekundu dírkou (vztažená na jednotkovou plochu), se nazývá intenzita záření a můžeme ji velice snadno určit ze znalosti vnitřní energie. Za sekundu totiž jednotkovou plochou projde záření o objemu $1 \cdot c$, kde c je rychlost šíření záření, v tomto případě rychlost světla. Intenzita pak bude $I = c \cdot U/V$ a spektrální intenzita $I(\omega) d\omega = c \cdot u(\omega)/V d\omega$.

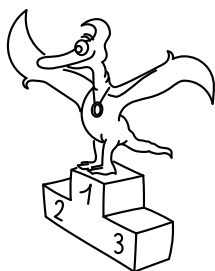


Obr. 8. Spektrální rozdělení intenzity záření černého tělesa při dvou různých teplotách.

Úloha IV . S ... čtvrtý díl

- a) Jakou tepelnou kapacitu plynu složeného z tříatomových molekul s atomy uspořádanými do vrcholů trojúhelníku předpovídá klasická fyzika? Na jakou hodnotu tato kapacita poklesne při snížení teploty na 100 K?
- b) Zjistěte chování výrazů pro vnitřní energii krystalu a energetické spektrum záření černého tělesa pro malé teploty. Odvoďte dále tzv. Wienův posunovací zákon. Ten říká, že frekvence ω_m , pro níž má závislost intenzity záření černého tělesa na teplotě maximum, je přímo úměrná teplotě.
- c) Vypracujte lepší teorii tepelné kapacity krystalu, aby uvažovala kolektivní kmity atomů. Případné integrály nemusíte počítat.

Nápověda. Uvědomte si, že se krystalem šíří zvukové vlny (jak příčné, tak podélné, a to různými rychlostmi). Počet módů nemůže být větší, než je počet stupňů volnosti $3N$ krystalu (N je počet částic).



Pořadí řešitelů po II. sérii

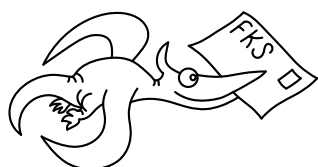


Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	4	8	5	34	100	68
1. <i>Marek Pechal</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	4	4	4	5	3	4	5	29	94	64
2. <i>Tomáš Bednárik</i>	Masarykovo G Vsetín	4	4	4	5	4	6	3	30	85	58
3. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	4	4	2	2	4	4	–	20	75	44
4.–5. <i>Roman Derco</i>	G dukl. hrdinů, Svidník	4	4	4	1	–	3	–	16	74	40
<i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	2	4	2	–	4	7	–	19	82	40
6. <i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	2	4	2	2	2	5	2	19	70	39
7.–8. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	2	3	0	–	1	4	–	10	66	38
<i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	4	4	2	–	–	3	–	13	84	38
9. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	5	4	2	1	1	4	–	17	59	35
10. <i>Vojtěch Molda</i>	Masarykovo G Vsetín	3	4	1	–	3	3	–	14	64	34
11.–12. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	1	3	–	–	3	6	–	13	71	29
<i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	2	4	2	1	–	–	–	9	63	29
13. <i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	2	4	–	–	3	4	–	13	69	25
14. <i>Zuzana Pôbišová</i>	G Tajovského, B. Bystrica	2	2	–	–	–	–	–	4	65	24
15.–16. <i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	4	–	–	–	4	–	8	75	21
<i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	–	–	–	–	3	8	–	11	88	21
17.–19. <i>Miroslav Hrubý</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	69	20
<i>Ján Mikuláš</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	80	20
<i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	2	2	2	–	–	–	–	6	69	20
20. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	2	–	3	–	2	–	–	7	68	17
21.–22. <i>Rushil Goel</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	76	16
<i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	4	–	2	–	4	–	–	10	76	16
23. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	3	0	0	–	–	–	3	34	13
24. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	2	2	4	–	–	4	–	12	60	12
25. <i>Lukáš Stráiteský</i>	Masarykovo G Vsetín	2	4	2	–	–	–	–	8	67	8
26. <i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	–	2	–	–	–	–	–	2	58	7
27.–28. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
<i>Jakub Klener</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	1	3	–	–	2	–	–	6	50	6
29. <i>Ladislav Štěpánek</i>		–	4	–	–	–	–	–	4	100	4

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	4	8	5	34	100	68
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	4	4	3	6	3	5	5	30	90	61
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	4	4	3	2	4	5	2	24	79	50
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	2	4	5	1	3	5	–	20	76	48
4. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	4	2	3	3	3	1	–	16	73	46
5. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	5	4	3	–	4	4	–	20	79	42
6. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	4	4	3	3	2	1	–	17	64	38
7. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	4	4	1	–	1	–	–	10	74	37
8. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	4	–	–	–	6	–	14	83	34
9. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	4	–	–	1	4	–	11	65	30
10. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové Brno	4	4	3	1	–	–	–	12	67	28
11. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové Brno	2	2	3	0	–	–	–	7	62	26
12.–13. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	3	4	0	–	–	4	–	11	67	24
<i>Jana Przccková</i>	G Komenského Havířov	2	2	1	2	–	4	–	11	44	24
14.–15. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	4	–	–	1	–	–	5	79	22
<i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	2	4	–	–	2	4	–	12	59	22
16.–17. <i>František Batysta</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	100	17
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	68	17
18. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	1	4	1	–	–	1	–	7	38	16
19.–20. <i>Lukáš Novotný</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	82	14
<i>Martin Štys</i>	COP Hronov	2	1	1	–	–	–	–	4	44	14
21. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	2	1	1	–	–	–	–	4	43	12
22.–24. <i>Matěj Korvas</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	59	10
<i>Jan Stránský</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	45	10
<i>Jakub Vodňanský</i>	G Broumov	2	2	–	–	3	3	–	10	50	10
25. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	89	8
26. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	1	1	–	–	–	1	–	3	29	7
27. <i>Ján Hreha</i>	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	0	46	6
28. <i>Jakub Loucký</i>	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
29. <i>Hana Lesáková</i>	G Konstantinova Praha	0	–	–	–	3	–	–	3	38	3
30.–31. <i>Petr Dvořák</i>	G V.Makovského, N. Město n. M.	–	2	–	–	–	–	–	2	50	2
<i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	2	–	–	–	–	–	2	50	2



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	4	8	5	34	100	68
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	3	4	4	5	4	7	6	33	97	66
2. <i>Lukáš Vítovec</i>	PČG Karlovy Vary	4	4	2	1	–	4	–	15	65	36
3. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	4	4	3	–	3	–	–	14	76	34
4. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	–	3	1	3	3	–	12	63	32
5. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	4	4	3	–	–	4	–	15	82	31
6. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	4	4	–	–	–	–	–	8	93	27
7. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	74	25
8. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	1	4	1	–	–	–	–	6	53	20
9.–11. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	3	3	–	3	6	–	18	66	19
<i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	–	3	1	–	–	1	7	44	19
<i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	1	4	2	0	1	1	–	9	33	19
12. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	2	1	–	–	1	–	4	52	17
13. <i>Juraj Hartman</i>	G Náchod	4	4	0	–	4	–	–	12	75	12
14. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	2	4	–	–	–	4	–	10	63	10
15. <i>Matěj Bitnar</i>	COP Hronov	–	–	–	–	3	3	–	6	36	9
16. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	–	–	–	–	5	–	5	54	7
17. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	2	1	–	–	–	–	6	50	6
18. <i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	2	1	–	–	–	–	–	3	25	5
19.–20. <i>Lucie Kadrmanová</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	33	3
<i>Vojtěch Špulák</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	23	3
21.–22. <i>Vlastimil Daníček</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Jiří Sedlák</i>	G Boskovice	1	1	–	–	–	–	–	2	25	2
23. <i>Martin Flíger</i>	COP Hronov	0	0	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	4	8	5	34	100	68
1. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	2	1	1	–	–	5	–	9	39	21
2. <i>Alžběta Černeková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	4	2	–	–	–	–	8	61	20
3. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	2	–	–	3	–	–	5	50	17
4. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	4	2	–	1	–	–	7	50	14
5.–6. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	4	–	–	–	–	–	4	75	12
<i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	4	–	–	–	–	–	4	75	12
7. <i>Jan Šedek</i>	COP Hronov	–	4	–	–	3	–	–	7	55	11
8. <i>Petr Motloch</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	3	5	–	8	67	8
9. <i>Lukáš Vrablic</i>	SPŠ Hradec Králové	–	2	–	–	3	–	–	5	24	6
10. <i>Vojtěch Kaluža</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	–	–	–	–	–	4	100	4
11.–14. <i>Ondřej Chvostek</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	3	–	3	38	3
<i>Petr Kaděra</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	3	–	–	–	–	3	75	3
<i>Jakub Moškoř</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	3	–	–	–	–	3	75	3
<i>Jiří Novák</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	10	3
15. <i>Ondřej Masný</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	2	–	–	2	50	2
16. <i>Jan Mertlík</i>	COP Hronov	–	1	–	–	–	–	–	1	6	1
17. <i>Martin Konečný</i>		0	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.