19. ročník, úloha III . 2 ... nájezd na čočku *(4 body; průměr 2,90; řešilo 49 studentů)*

Mějme spojku o ohniskové vzdálenosti f. Zdroj světla je na ose ve vzdálenosti $a > f$ od čočky, za kterou vzniká jeho obraz. Zdrojem začneme pohybovat určitou rychlostí směrem k čočce. Určete, jak rychle se pohybuje obraz. Rozhodněte, zda tato rychlost může být i nadsvětelná. Bylo by to v rozporu s principy speciální teorie relativity?

Vymyslel Jarda Trnka, když psal studijní text z optiky.

Ačkoliv je úloha velmi nevinně zadaná, skrývá mnohé nástrahy. Problém je v tom, že nejsou splněny předpoklady pro použití geometrické optiky.

Zkusme úlohu vyřešit nejdříve zcela naivně použitím zobrazovací rovnice. Pro polohu předmětu platí $a = a_0 - vt$, kde a_0 je počáteční poloha předmětu a v jeho rychlost. Pro polohu obrazu potom dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{(a_0 - vt)f}{a_0 - vt - f}\,.$$

Rychlost pohybu obrazu vypočítáme jako derivaci polohy podle času

$$v' = \frac{\mathrm{d}a'}{\mathrm{d}t} = \frac{f^2 v}{(a_0 - vt - f)^2} = v\left(\frac{f}{a - f}\right)^2\,.$$

Vidíme tedy, že rychlost může nabývat libovolné velikosti, tedy i nekonečné (pokud jmenovatel jde k nule). Zde ale narážíme na zásadní problém. Toto řešení je zjevně špatně, neboť zobrazovací rovnice byla odvozena za předpokladu nekonečné rychlosti světla.

Pokud položíme před čočku předmět, bude chvíli trvat, než vznikne za čočkou obraz. Fotony tam musí chvíli letět a jejich rychlost není nekonečná, jak dobře víme. Ve statickém případě by to moc nevadilo, neboť by po nějaké chvíli obraz vznikl a poté už by stále existoval (tedy byl by zachytitelný na stínítku). Pro případ pohybujícího se předmětu to ale nejde. Rychlost obrazu, jak jsme ji vypočítali, totiž neodpovídá ničemu reálnému (jedná se pouze o virtuální bod, kam paprsky doletí někdy v budoucnosti). Pokud nás zajímá obraz, který by šel zachytit na stínítku (tj. který by byl skutečně vidět), musíme konečnou rychlost světla započítat.

Pokud je v čase $t_1 = 0$ předmět umístěn v poloze $x = a$, vytvoří paprsek obraz v čase $t'_1 = (a + a')/c$. O chvilku později v čase $t_2 = \mathrm{d}t$ je předmět umístěn v poloze $x = a - \mathrm{d}a$ a obraz se utvoří v čase $t'_2 = (a - \mathrm{d}a + a' + \mathrm{d}a')/c + dt$. Obraz se tedy posune o $\mathrm{d}a'$ za čas $t'_2 - t'_1$. Pro rychlost obrazu máme

$$v' = \frac{\mathrm{d}a'}{t'_2 - t'_1} = \frac{\mathrm{d}a'}{(\mathrm{d}a' - \mathrm{d}a)/c + \mathrm{d}t}\,.$$

Po dosazení za $\mathrm{d}a = v\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}a' = vf^2/(a - f)^2\,\mathrm{d}t$ dostaneme po úpravách

$$v' = \frac{vf^2}{(a - f)^2 - va(a - 2f)/c}\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že takto vypočítaná rychlost je omezená rychlostí světla. Takže by se zdálo být vše v pořádku. Problémy však nekončí.

Tento výsledek totiž platí pouze pro bodový zdroj a hlavně pouze pro paprsky, které jdou po ose (taková totální paraxiální aproximace). Paprskům (přesněji fotonům), které nejdou po ose, trvá déle, než se na místo určení dostanou. To znamená, že nemůže vzniknout ostrý obraz, protože jeho jednotlivé části vzniknou v různých časech (příslušné fotony tam doletí postupně). Výsledkem tedy je, že v případě pohybujícího se předmětu nevznikne ostrý obraz. Naopak, obraz se bude postupně rozmazávat, a to tím víc, čím bude rychlost pohybu obrazu větší.

Pár slov k došlým řešením. Většina řešitelů správně určila rychlost obrazu v případě nekonečné rychlosti světla. Část řešitelů také odhalila, že konečná rychlost světla bude činit jisté potíže. Ti, kteří provedli korekci i početně, obdrželi bonus bod.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.