21. ročník, úloha I . 3 ... *vážíme si Slunce* *(4 body; průměr 3,08; řešilo 38 studentů)*

Navrhněte několik metod ke stanovení (odhadu) hmotnosti Slunce, dostatečně je vysvětlete a vypočtěte podle nich hmotnost naší nejbližší hvězdy.

K zahřátí mozků do nového ročníku FYKOSu zadal Pavel Brom.

Hmotnost Slunce určíme nejsnáze z pozorování gravitačního působení Slunce na jeho oběžnice. Jelikož většina z vás dokáže odvodit třetí Keplerův zákon pro pohyb po kružnici, ukážeme si, že stejně platí i pro pohyb po elipse, a nakonec určíme samotnou hmotnost Slunce. V celém řešení budeme značit hmotnost Slunce M a hmotnost hmotného bodu kolem Slunce obíhajícího pak m.

Označme si plošnou rychlost v_p, periodu oběhu T. Plocha elipsy je rovna πab (a je velikost hlavní poloosy, b pak velikost vedlejší). Z významu plošné rychlosti pak vyplývá, že

$$v_\mathrm{p}T = \pi ab\,. \tag{1}$$

Potřebujeme vyjádřit plošnou rychlost. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu vzhledem ke středu centrální síly (Slunci) je konstantní (moment síly jakožto vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je nulový a zároveň je časovou derivací momentu hybnosti), tedy i jeho velikost $L = rmv\sin\alpha$ (α značí úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$). Výraz $rv\sin\alpha/2$ je konstantní a odpovídá plošné rychlosti v_p. Spojením posledních dvou rovnic dostáváme 2. Keplerův zákon, tedy že plošná rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{L}{2m}$$

je konstantní. Po dosazení do rovnice (1) získáme

$$LT = 2\pi mab\,. \tag{2}$$

Elipsa, po které těleso obíhá, se dá zapsat v polárních souřadnicích takto

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi - k)}\,.$$

Geometrický význam p je poměr mezi čtvercem velikosti malé poloosy a velikostí velké poloosy. Fyzikální význam je však ještě jiný, nicméně jeho kompletní odvození sahá za rámec tohoto výkladu[1]. Jedná se o vztah

$$p = \frac{L^2}{Gm^2M}\,.$$

Ze zmíněných významů p plyne, že

$$L^2 = \frac{b^2}{a}Gm^2M\,.$$

Zbývá už jen dosadit do vztahu (2) a rovnici upravit na konečný tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,.$$

[1] Zájemcům jej samozřejmě můžeme zaslat (vychází ze zákona zachování mechanické energie), případně je uvedeno například v Havránkově *Klasické mechanice I.*, kapitola 4.3.

Pro hmotnost Slunce platí

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}$$

a stačí již dosadit příslušnou periodu oběhu a velikost hlavní poloosy. Jelikož se nemusíme omezovat na planety obíhající přibližně po kružnicích, počítejme s Halleyovou kometou. Doba jednoho oběhu je 75,3 roku, její hlavní poloosa pak 17,3 AU. Po převedení na jednotky SI a dosazení vychází hmotnost Slunce

$$M = 1{,}98 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\,.$$

Navrhovali jste mnohé další metody, od těch jednodušších využívajících hustotu a objem, přes volné pády až po relativistické efekty. Nevýhodou většiny metod je jejich naprostá neproveditelnost, a i proto se jako nejlepší metoda jeví výše uvedená. Nicméně jsme uvítali všechny vaše návrhy a žádný nezůstal neohodnocen.

Kryštof Touška
`krystof@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.