

21. ročník, úloha I. P ... orosená odměna aneb ať vám kozel neuteče (4 body; průměr 2,56; řešilo 32 studentů)

Chováte neposlušného kozla, jehož oblibou je přeskakovat plot k sousedům. Nahánění kozla už máte pokr, proto jste nakoupili vyšší pletivo, kterým chcete svůj pozemek nově oplotit. Místo, kde má plot stát, je ve svahu, a tak je situace trochu komplikovanější. Vy si ale jistě poradíte. Pod jakým úhlem plot vzhledem ke svahu postavit tak, aby bylo pro kozla co možná nejobtížnější jej přeskocit?

Napadlo Honzu Prachaře na návštěvě příbuzných majících podobný problém.

Pro jednoduchost uvažujme, že kozel je hmotný bod a přeskočením plotu myslíme, že překoná krajní bod plotu. Kozel taktéž nemůže po plotu lézt, byť by to ve skutečnosti mohlo být možné.

V zadání není jasně řečené, jak pozemek vypadá a jak je situován. Budeme předpokládat, že ohrada je obdélníková a celá leží ve svahu o sklonu φ . Kozel si tedy může vybrat, jestli přeskocí tu část ohrazení, která leží ve vrstevnici, nebo se pokusí zdolat ohradu kolmou na vrstevnici. Se stranami plotu vystavěnými kolmo na vrstevnice nebudeme mít velkou práci. Kozel se k nim blíží po rovině, tudíž máme případ známý z běžné praxe. Jak postavit plot, aby ho bylo co nejtěžší přeskocit? Sami snadno odpovíme, že jediné kolmo, protože kdybychom použili jakýkoliv jiný úhel, jen by se snížila celková výška plotu, což by kozlovi pomohlo.

Zaměříme se nyní na spodní okraj ohrady. Na kozla působí jediná síla – tíhová síla. Toto působení můžeme snadno rozložit do dvou směrů, tečného (rovnoběžného se svahem)

$$F_t = mg \sin \varphi$$

a normálového (kolmého na svah)

$$F_n = mg \cos \varphi.$$

Díky působení těchto sil se kozlovi zdá, jakoby ho něco popostrkovalo dopředu a také trochu nadlehčovalo (což je přesně ten pocit, který zažijete, když si stoupnete do svahu se zavazanými očima). Tečná síla kozlovi vůbec nevádí, ba naopak, je to ta síla, která mu pomáhá se pořádně rozběhnout. Jediné, co musí ve skutečnosti překonávat je normálová složka tíhové síly. Nejhůře si proto povede, pokud bude donucen přeskakovat překážku, která má vrchol co nejdále od roviny svahu. Touto úvahou jsme převedli příklad na případ plotu v rovině a už víme, že odpověď zní stavět kolmo, ale tentokrát kolmo ke svahu.

Pro plot na horní straně pozemku platí stejná úvaha. Akorát pro chudáka kozla se zde situace komplikuje tečnou složkou tíhové síly, která mu teď nepomáhá, ale brzdí ho.

Je zajímavé, že takto se ve skutečnosti ploty nestavějí. Na plot, který je kolmý ke svahu, působí totiž nenulový moment tíhové síly a bez oper zespodu by jistě brzy spadl. Navíc pokud by byl svah dostatečně prudký, náš kozel by plot klidně mohl přelézt.

Většina řešitelů se pokoušela k problému přistoupit z matematického hlediska a vypočítat úhel mezi plotem a svahem. Správným přístupem je vyjádřit si rovnici ochranné paraboly (tedy křivky, která udává, kam všude se můžeme s danou počáteční rychlostí dostat) a hledat místo, kde má tečna k této parabole stejný sklon jako svah. Tento přístup jistě vede k cíli, ale u této úlohy je možná až zbytečně komplikovaný.

Martin Formánek

martin@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.