

**21. ročník, úloha I. S ... gravitace** (6 bodů; průměr 4,67; řešilo 15 studentů)

Uvažujte dvě stejně těžké hvězdy, které kolem sebe obíhají po kružnici. Po ose této kružnice se k nim začne náhle přibližovat hvězda třetí, která má na začátku stejnou rychlost, jakou se pohybují hvězdy obíhající, a rovněž sdílí i jejich hmotnost. Počítačově nasimulujte, co se bude dít.

Zadal autor seriálu Marek Pechal.

Jako autorské řešení vám podrobně předvedeme úlohu druhou vyšetřující pohyb tří hvězd, na které ilustrujeme i řešení úlohy první.

Na první pohled se může zdát, že není-li konkrétně zadána hmotnost hvězd  $M$  ani poloměr  $R$  trajektorie obíhající dvojice, pak nejsme schopni o jejich pohybu nic kloudného říct. Naštěstí je však opak pravdou. Změnou hmotnosti se nezmění charakter pohybu, ale pouze škála jeho charakteristických rozměrů a časů (jako bychom např. zvětšili, resp. zmenšili obraz a pustili záznam zpomaleně, resp. zrychleně). Pokud si zavedeme bezrozměrný čas  $\tau$  a prostorové průvodiče  $\boldsymbol{\rho}_i$  následujícím způsobem

$$t = \tau \sqrt{\frac{R^3}{\varkappa M}}, \quad \mathbf{r}_i = R \boldsymbol{\rho}_i,$$

získají pohybové rovnice zvláště jednoduchý tvar

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i}{|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i|^3},$$

v němž už nefiguruje  $M$  ani  $R$ .

Domluvíme-li se, že obíhající hvězdy se budou na počátku pohybovat v rovině  $xy$  okolo počátku, pak počáteční podmínky budou<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1 &= (-1, 0, 0), & \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_1}{d\tau^2} &= (0, -\frac{1}{2}, 0), \\ \boldsymbol{\rho}_2 &= (1, 0, 0), & \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_2}{d\tau^2} &= (0, \frac{1}{2}, 0), \\ \boldsymbol{\rho}_3 &= (0, 0, -\infty), & \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_3}{d\tau^2} &= (0, 0, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Tyto rovnice už můžeme jednoduše řešit, máme-li k dispozici slušný program pro modelování gravitační interakce těles. Stačí položit hodnotu gravitační konstanty a hmotností všech tří hvězd za jednotkové, nastavit příslušné počáteční polohy a rychlosti a spustit simulaci.

Pascalovský program **gravitace.pas**, který příslušný výpočet provádí pomocí Runge-Kuttovy metody 4. řádu, si můžete stáhnout z webu FYKOSu. Jde o jednoduchý „simulátor gravitace“, do kterého můžete snadno nasázet libovolný (rozumný) počet těles a pak například pomocí gnuplotu kreslit jejich trajektorie.

Veškeré grafy ve vzorovém řešení této úlohy byly získány za pomoci právě tohoto programu. „Vnější“ hvězdu jsme při simulaci na začátku posadili na osu  $z$  do vzdálenosti 1000 (bezrozměrných jednotek) od počátku. Tato vzdálenost je vzhledem k rozměrům soustavy obíhajících hvězd velmi velká, a tak můžeme přibližně říct, že vnější hvězda přiletěla „z nekonečna“.

<sup>1</sup>) Symbol  $\infty$  zde pouze reprezentuje „hodně velké“ číslo.

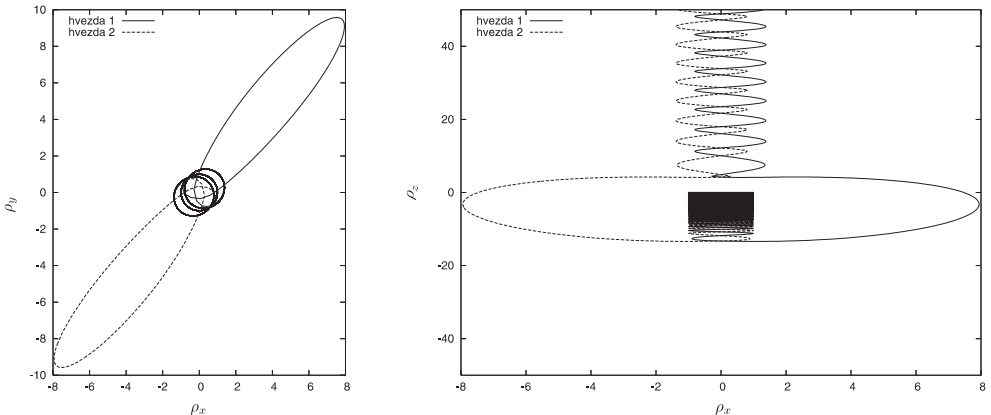
Velikost kroku při řešení pohybových rovnic jsme nastavili na 0,02 (bezrozměrné jednotky času). Tento krok je snad dostatečně malý – za takovou dobu opíší obíhající hvězdy ve své rotaci úhel přibližně 0,01 radiánu. O chybě, která bude zvolené hodnotě kroku odpovídat, se však můžeme pouze dohadovat. Určitou kontrolu bychom nad ní měli, pokud bychom užili některou z metod s proměnnou délkou kroku. Pro tentokrát tedy jednoduše předpokládejme, že krok je skutečně dost malý.

Při simulaci jsme provedli 200 000 výpočetních kroků. To při zvolené délce kroku dává celkový časový úsek 4000 jednotek, která pohodlně obsáhne dobu potřebnou pro přiblížení vnější hvězdy i její opětovné vzdálení do „velké“ vzdálenosti.

Ještě než ukážeme, jak zkoumaný pohyb všech tří hvězd podle našeho výpočtu vypadá, by bylo dobré říct, které údaje z vypočtených dat vlastně potřebujeme. Rozhodně totiž nemusíme zpracovávat všech osmáct souřadnic poloh a rychlostí. Díky počáteční osově symetrii situace se souřadnice poloh a rychlostí obou obíhajících hvězd navzájem liší maximálně znaménkem ( $z$ -ové souřadnice polohy a rychlosti jsou si dokonce rovny). Navíc se vnější hvězda zřejmě bude pohybovat pouze na ose  $z$  (opět díky symetrii). A dále díky zákonu zachování hybnosti vždy můžeme určit  $z$ -ové souřadnice polohy a rychlosti obíhajících hvězd, známe-li  $z$ -ovou souřadnici polohy a rychlosti vnější hvězdy. Pro specifikaci stavu soustavy tedy stačí pouze šest údajů<sup>2</sup>.

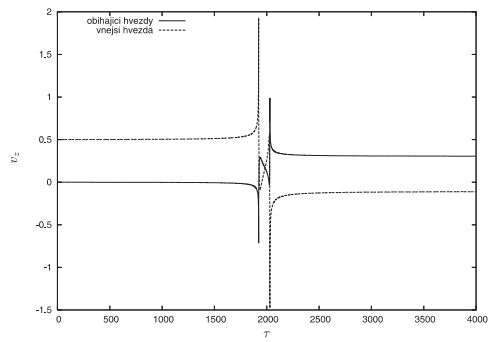
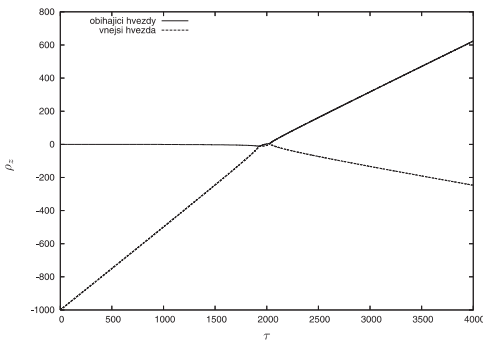
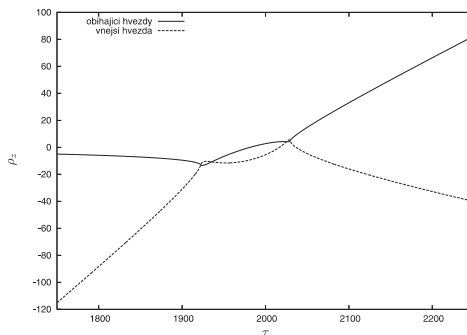
Závislosti  $x$ -ových a  $y$ -ových souřadnic poloh a rychlostí obíhajících hvězd na čase pro nás nejsou příliš zajímavé (a zvědavý řešitel si jejich grafy jistě dokáže vykreslit sám). Ukážeme tedy pouze grafy závislosti  $z$ -ových souřadnic poloh a rychlostí na čase a tvar průmětu trajektorie obíhajících hvězd do rovin  $xy$  a  $xz$  ( $yz$  se bude od  $xz$  lišit jen málo).

Na závěr ještě určíme, jakou rychlostí se bude pohybovat vnější hvězda po opětovném vzdálení „do nekonečna“. Mohli bychom to udělat například tak, že bychom jednoduše odečetli poslední vypočtenou hodnotu  $z$ -ové souřadnice její rychlosti. Lepší by ovšem bylo vzít v úvahu i fakt, že se rychlost bude i dále měnit (třebaže jen málo), a pokusit se extrapolovat její hodnotu v nekonečnu.



Obr. 1. Průměty trajektorií obíhajících hvězd do rovin  $xy$  a  $xz$

<sup>2)</sup> Ve skutečnosti čtyři, protože jsme zapomněli na zákony zachování momentu hybnosti a energie. Jimi vyjádřené vztahy mezi souřadnicemi poloh a rychlostí jsou však již poněkud krkolomné, a tak se spokojíme s šesti parametry.

Obr. 2.  $z$ -ové souřadnice poloh a rychlostí v závislosti na časeObr. 3.  $z$ -ové souřadnice polohy v závislosti na čase – detail

Všimneme-li si v grafu rychlosti, že její závislost ke konci sledovaného časového úseku vypadá téměř jako lineární lomená funkce, můžeme se pokusit část vypočtených dat touto funkcí fitovat (tj. najít takovou lineární lomenou funkci, která data co nejlépe aproximuje) a z jejich parametrů odhadnout rychlost hvězdy „v nekonečnu“. Tuto práci za nás může velmi rychle provést například program gnuplot.

Ukazuje se, že časový vývoj rychlosti skutečně velmi dobře aproximuje lineární lomená funkce, hodnota rychlosti se limitně blíží (podle výpočtu gnuplotu)  $-0,1069$ .

Vnější hvězda se tedy po interakci s oběma dalšími „odrazí“ rychlostí přibližně pětinouovou oproti počáteční. Použitím zákona zachování hybnosti si snadno odvodíme, že obíhající hvězdy se budou pohybovat ve směru osy  $z$  rychlostí rovnou asi třem pětinaám výchozí rychlosti vnější hvězdy.

Pokud se zaměříme na kinetickou energii odpovídající pouze pohybu zúčastněných těles v  $z$ -ovém směru, zjistíme, že se jí při interakci hvězd přibližně čtvrtina „někam ztratila“. Jistě uhadneme kam – do potenciální energie soustavy obíhajících hvězd a do kinetické energie jejich pohybu v rovině  $xy$  (což lze ostatně pozorovat i na průmětu trajektorií do této roviny – jejich tvar se změnil z kruhového na eliptický, což je nutně provázáno změnou energie oběhu). V jistém smyslu jde tedy o nepružný ráz. Považujeme-li obě obíhající hvězdy za jediné těleso, pak jejich potenciální energie a kinetická energie pohybu v rovině  $xy$  reprezentuje vnitřní energii tohoto tělesa.

Při zkoumání diskutovaného problému se samozřejmě nemusíme omezovat jen na zadaný speciální případ, kdy se vnější hvězda na počátku pohybuje stejnou rychlostí jako obíhající hvězdy. Jako poměrně zajímavý problém se ukazuje být zkoumání závislosti konečné rychlosti „vnější“ hvězdy na její počáteční rychlosti.

Výpočet jsme prováděli Runge-Kuttovou metodou pátého řádu s proměnnou délkou kroku (Cash-Karp). Přitom jsme navíc použili několik užitečných fint.

Především pohyb hvězd popisujeme v těžištové soustavě, využíváme symetrie, díky níž jsou  $x$ -ové i  $y$ -ové souřadnice polohy a rychlosti vnější hvězdy nulové a v případě obíhajících hvězd jsou odpovídající si souřadnice polohy a rychlostí stejné až na znaménko (kromě  $z$ -ových, které jsou si rovny). Tím jsme zredukovali počet vzájemně nezávislých parametrů soustavy na šest (a tedy počet diferenciálních rovnic na tři).

Také jsme s výhodou využili faktu, že při změně hmotností všech zúčastněných těles či poloměru trajektorie obíhajících hvězd (samozřejmě při odpovídající změně jejich rychlostí) se změní pouze časové a prostorové měřítko, ne však „charakter pohybu“ – tedy pokud zvolíme za jednotku rychlosti počáteční rychlost oběhu obíhajících hvězd, pak závislost rychlosti vnější hvězdy v čase  $t \rightarrow \infty$  na její rychlosti v čase  $t = 0$  je vždy stejná neohledně na volbu hmotností hvězd. Mohli jsme si tedy dovolit položit hmotnosti všech tří hvězd jednotkově stejně jako gravitační konstantu.

Nechť  $x$  a  $y$  označuje  $x$ -ovou a  $y$ -ovou souřadnici polohy jedné z obíhajících hvězd (pro druhou mají opačné znaménko),  $z$  pak  $z$ -ovou souřadnici polohy vnější hvězdy. Vzhledem k použití těžištové soustavy jsou  $z$ -ové souřadnice obíhajících hvězd rovny  $-z/2$ .

Čtenář se jistě snadno přesvědčí, že pohybové rovnice pak mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{x}{4(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2 + 9z^2/4)^{3/2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{y}{4(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + 9z^2/4)^{3/2}}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{3z}{(x^2 + y^2 + 9z^2/4)^{3/2}},\end{aligned}$$

při počátečních podmínkách

$$\begin{aligned}x(0) &= 1, & \frac{dx}{dt}(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, & \frac{dy}{dt}(0) &= \frac{1}{2}, \\ z(0) &= -\infty, & \frac{dz}{dt}(0) &= \frac{k}{3}.\end{aligned}$$

Zde  $k$  označuje počáteční  $z$ -ovou souřadnici rychlosti vnější hvězdy vzhledem ke dvojici obíhajících hvězd v násobcích počáteční rychlosti obíhajících hvězd. V předešlém řešení úlohy jsme vlastně řešili případ  $k = 1$ .

To, co nás bude zajímat nyní, je hodnota  $k' = 3 dz(\infty)/dt$ , tedy  $z$ -ová souřadnice rychlosti vnější hvězdy (opět vzhledem ke zbývajícím dvěma a v již zmíněných jednotkách) v čase  $t \rightarrow \infty$  v závislosti na proměnné hodnotě  $k$ .

Jistým problémem, se kterým se musíme potýkat při numerickém řešení pohybových rovnic, je otázka, jak se vypořádat s počáteční hodnotou  $z$ , která by se měla „blížit minus nekonečnu“.

Řešením může být stejně jako v předešlém řešení jednoduše zvolit počáteční hodnotu  $z$  hodně velkou (v absolutní hodnotě). My se však s takto jednoduchým přístupem nespokojíme a předvedeme ještě jednoduchou korekci, která náš výsledek zpřesní.

Pokud by totiž měla vnější hvězda začínat svůj pohyb „v nekonečnu“ s rychlostí  $v_0$ , pak v okamžiku, kdy bude  $z = z_0$ , velikost její rychlosti již nebude rovna  $v_0$ , nýbrž o něco vyšší. K přibližnému určení korigované rychlosti hvězdy použijeme zákon zachování mechanické energie a zjednodušený předpoklad, že vzájemný pohyb obíhajících hvězd nebude narušen interakcí s vnější hvězdou (vzhledem k velmi velké vzdálenosti vnější hvězdy) – tedy že jejich vzájemná potenciální energie a kinetická energie odpovídající pohybu v rovině  $xy$  zůstává konstantní.

Zákon zachování energie pak pro korigovanou rychlost  $v'_0$  dává vztah

$$\frac{3}{4} v_0^2 = \frac{3}{4} v_0'^2 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9z_0^2/4}},$$

tedy

$$v'_0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{8}{3\sqrt{1 + 9z_0^2/4}}} \approx \sqrt{v_0^2 + \frac{16}{9|z_0|}}.$$

Při výpočtech jsme zvolili  $z_0 = -5000$ .

Podobnou korekci by jistě bylo záhodno provést i pro finální rychlost hvězdy, neboť výpočet musíme zastavit při jisté konečné hodnotě  $z = z_\infty$  a skutečná velikost rychlosti „v nekonečnu“ bude opět o něco nižší. Zde se však objevuje podstatný problém, protože nyní – po interakci všech tří hvězd – mohou být trajektorie obíhajících hvězd velmi výrazným způsobem změněny a nemusí být tedy možné zanedbat rozměry této soustavy vzhledem k její vzdálenosti od vnější hvězdy, jak jsme to učinili v předchozím případě.

Můžeme však provést odhad toho, o kolik se velikost rychlosti  $v_\infty$  „v nekonečnu“ může maximálně snížit oproti velikosti rychlosti  $v'_\infty$  zjištěné po ukončení výpočtu. K takovému maximálnímu snížení rychlosti by zřejmě došlo, pokud by se obíhající hvězdy po celou dobu pohybu nacházely přesně na ose symetrie (pak by byla jejich vzdálenost od vnější hvězdy při daném  $z$  minimální a interakce tedy nejsilnější). Opět můžeme použít zákon zachování mechanické energie, který nám poskytne následující dolní odhad velikosti rychlosti vnější hvězdy v nekonečnu (horní odhad bude jednoduše  $|v_\infty| \leq |v'_\infty|$ )

$$|v_\infty| \geq \sqrt{v_\infty'^2 - \frac{16}{9|z_\infty|}}.$$

Jistě vás napadne, že v tomto případě by mohl výraz pod odmocninou vyjít záporný. Co by to znamenalo? Jednoduše to, že v okamžiku ukončení výpočtu nemusí mít vnější hvězda dostatečnou rychlost k tomu, aby se vzdálila do nekonečna<sup>3</sup>. V tom případě samozřejmě není radno vypočtené hodnotě rychlosti věřit. Můžeme tedy na konci výpočtu otestovat, zda platí

$$v_\infty'^2 \geq \frac{16}{9|z_\infty|}, \quad (1)$$

a pokud ano, pak lze odhadnout, že hledaná rychlost leží v intervalu

$$v_\infty \in \left( \sqrt{v_\infty'^2 - \frac{16}{9|z_\infty|}}, v'_\infty \right), \quad \text{pokud } v'_\infty > 0,$$

<sup>3</sup>) Nemusí, ale může – předpokládali jsme totiž maximální možnou „míru zpomalení“ hvězdy.

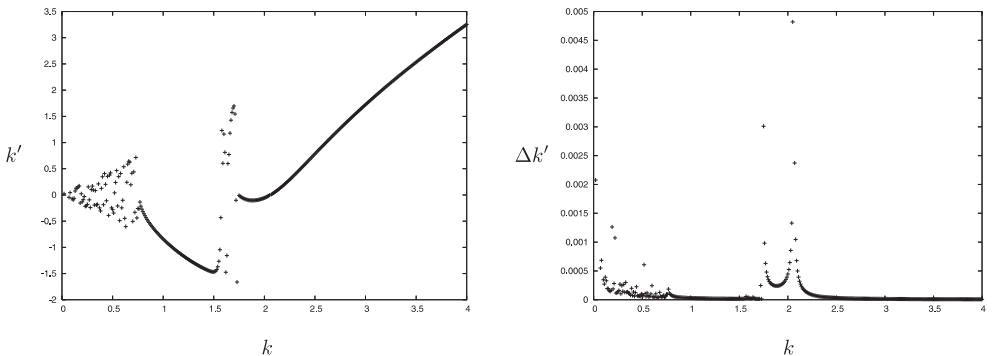
$$v_\infty \in \left( v'_\infty, -\sqrt{v'^2_\infty - \frac{16}{9|z_\infty|}} \right), \quad \text{pokud } v'_\infty < 0.$$

Ukazuje se, že obzvláště při malých hodnotách  $k$  (tj. malých počátečních rychlostech vnější hvězdy) se k sobě všechna tři tělesa přibližují na poměrně malé vzdálenosti, a to i opakovaně. To může i přes použití metody s adaptivní délkou kroku vést ke znatelným chybám, až ke znehodnocení výpočtu. Poměrně účinnou kontrolou toho, zda lze výpočet považovat za dostatečně přesný, je vypočítat například mechanickou energii soustavy na začátku a na konci výpočtu. Pokud odchylka zjištěných hodnot bude v „přijatelných“ mezích, můžeme získaná data považovat za věrohodná.

V programu `TriHvezdy2.pas`, který je na FYKOSích webových stránkách, jsou implementovány všechny výše zmíněné postupy. Závislost  $k'$  na  $k$ , získaná pomocí tohoto programu, je znázorněna v grafech (vytvořených gnuplotem). Jako výslednou hodnotu  $k'$  bereme vždy aritmetický průměr obou výše zmíněných odhadů. Chyba, kterou odhadujeme polovinou rozdílu odhadů, je příliš malá pro použití chybových úseček v grafu. Závislost chyby  $k'$  na  $k$  proto uvádíme v samostatném grafu.

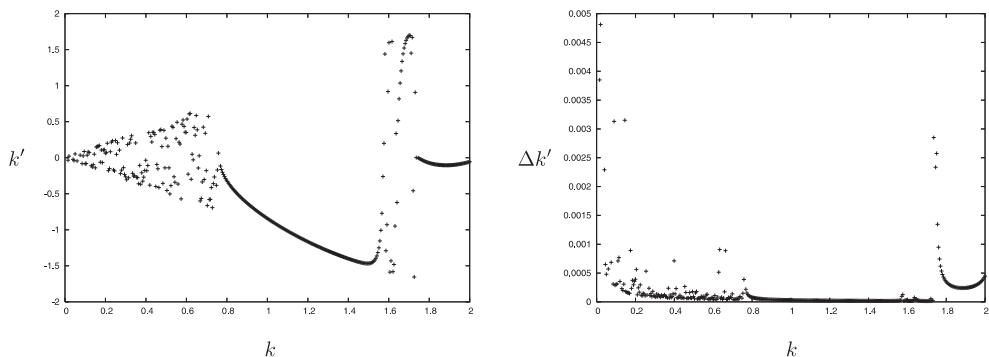
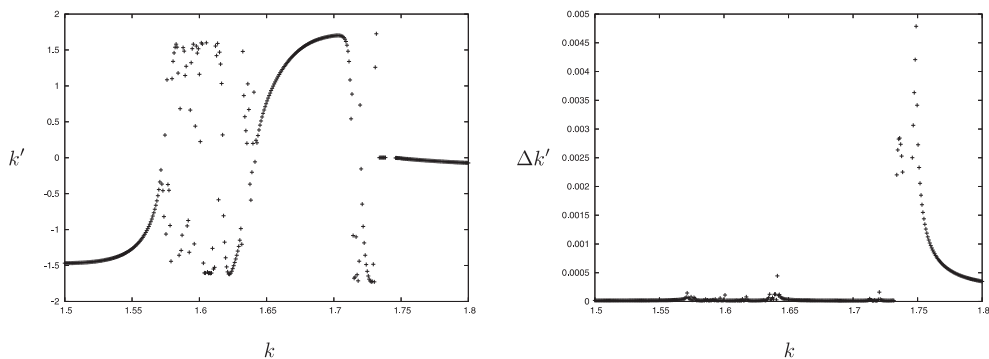
Výpočet jsme prováděli s maximálním počtem deseti milionů kroků s chybou nastavenou na  $10^{-9}$  pro 400 hodnot  $k$  rozložených ekvidistantně v daném intervalu. Každý výpočet jsme ukončili, bylo-li dosaženo maximálního počtu kroků nebo pokud  $|z|$  překročilo hodnotu 20 000 a zároveň měla hvězda dostatečnou rychlost pro únik do nekonečna. Jako kritérium korektnosti výsledku bylo kromě podmínky (1) zvoleno splnění nerovnosti  $|E_\infty - E_0| < 0,001$  pro hodnoty počáteční a konečné mechanické energie  $E_0$  a  $E_\infty$  soustavy.<sup>4</sup>

Na závěr si všimněme poměrně zajímavého charakteru vypočtené závislosti, který můžeme vyzorovat z grafů. V oblasti pro  $k$  menší než přibližně 0,8 se závislost chová „chaoticky“. Pak přechází do „klasické“ oblasti, která sahá až k hodnotě  $k \approx 1,6$ , kde se opět objevuje nepravidelné chování, končící okolo  $k \approx 1,8$ . Tato oblast je obzvláště zajímavá, neboť se zde objevují menší i větší podoblasti, v nichž se závislost uklidňuje. Pro  $k$  větší než 1,8 je již závislost opět pěkně pravidelná.



Obr. 4. Závislosti  $k'$  a chyby  $k'$  na  $k$  v mezích 0,01 až 4,00

<sup>4)</sup> Každý výpočet se zmíněnými parametry trval přibližně jednu až tři hodiny na laptopu s procesorem Intel Pentium M 1.6 GHz s 512 MB RAM. Pro své pokusy s demonstračním programem si však můžete parametry výpočtu upravit, abyste nemuseli tak dlouho čekat.

Obr. 5. Závislosti  $k'$  a chyby  $k'$  na  $k$  v mezích 0,01 až 2,00Obr. 6. Závislosti  $k'$  a chyby  $k'$  na  $k$  v mezích 1,50 až 1,80

Při pohledu na grafy vás také může napadnout, že by mohla platit nerovnost  $|k'| \leq k$ . Zkuste přijít na to, proč. Drobná nápověda do začátku – ukažte, že mechanická energie dvojice obíhajících hvězd nemůže být ve finálním stavu nižší než v počátečním.

*Marek Pechal*  
marek@fykos.mff.cuni.cz