21. ročník, úloha IV . 4 ... *zachraňte ledvinu* *(4 body; průměr 2,33; řešilo 15 studentů)*

ÚOOZ[1] *zjistil, že mafie disponuje mobilními válečnými lasery, které jsou všechny řízeny z centrály v horském pohraničním sídle Obernieredorf, vzdáleném od zbraní maximálně* 50 km *(ve větší vzdálenosti je signál už slabý a nespolehlivý). Z centrály sledují dění v podsvětí v Karlových Varech, na které všechny lasery míří, aby udeřily v pravý čas.*

Pomozte nevinným obyvatelům Karlových Varů nalézt vhodný tvar, příp. i umístění spojité zrcadlové plochy, která by pokud možno všechny laserové paprsky odrazila nejlépe na řídící centrálu! Problém můžete řešit v rovině, ale zejména oceníme prostorové řešení, pokud existuje. Samozřejmě je požadován důkaz, aby Karlovarští peníze neinvestovali zbytečně.

K oprášení znalostí a dovedností z geometrie zadal Pavel Brom.

V prvním kroku řešení je vhodné přeformulovat zadání na čistě geometrický problém, který budeme řešit s použitím geometrických a fyzikálních úvah. Mobilní lasery v podstatě určují paprsky náhodných směrů, které však mají jednu vlastnost společnou – protínají se v jediném místě (Karlovy Vary), které si můžeme dovolit nahradit bodem F (*focus*). Rovněž řídící centrálu Obernieredorf si nahraďme bodem G (*gangsters*, *gauners*). Přeformulované zadání v ideálním případě (tzn. všechny paprsky se odrazí do bodu G) zní: K pevným bodům F, G hledáme spojitou plochu (v prostoru), která každý libovolný paprsek jdoucí do jediného bodu (F) odrazí do jiného bodu (G).

Po fyzikální stránce předpokládáme přímočaré šíření paprsků ve vzduchu a platnost zákona odrazu, který je však důsledkem obecnějšího Fermatova principu. Právě v této úloze můžeme elegantně využít Fermatův princip, který říká, že světlo se šíří právě po časově extremálních trajektoriích; v tomto případě extremálními rozumíme nejkratší časové spojnice, tedy i nejkratší z hlediska uražené dráhy, neboť rychlost šíření světla ve vzduchu předpokládáme konstantní[2]. Je zřejmé, že přímka procházející body F a G zároveň představuje osu symetrie problému, a tedy postačí řešit problém v rovině tuto přímku obsahující. Prostorové řešení pak dostaneme snadno rotací nalezené křivky kolem osy FG. Můžeme se navíc pokusit odhadnout tvar takové křivky k pevným bodům F, G (viz obr. 1).

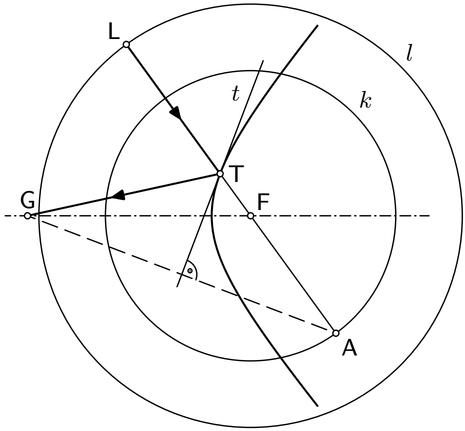
Zakresleme do obrázku jeden libovolně vybraný laser L. K realizaci Fermatova principu vypustíme všechny laserové paprsky v určitém okamžiku z kružnice l, a protože její poloměr $|\mathsf{LF}| = c_1 =$ konst. proběhnou za stejný čas, dorazí do jejího středu F rovněž ve stejný okamžik, což požadujeme v duchu Fermatova principu. Nyní jim však do cesty postavíme odraznou plochu, která má všechny paprsky soustředit do jiného jediného bodu G. Žádný paprsek, žádný bod odrazné plochy by v duchu Fermatova principu neměl být výsadní, tedy očekáváme, že i po odrazu všechny paprsky dorazí do bodu G ve stejný okamžik za předpokladů naší realizace. Bod odrazu pro laser L označme T a veďme jím tečnu (tečnou rovinu) t k hledané křivce (odrazné ploše). Všechny paprsky musí urazit stejnou dráhu $|\mathsf{LA}| = c_2 =$ konst., tedy osová souměrnost s osou t musí zobrazit bod G na A, tzn. $|\mathsf{GT}| = |\mathsf{TA}|$. Jestliže si uvědomíme, že rozdíl vzdáleností v absolutní hodnotě

$$\begin{aligned}||\mathsf{GT}| - |\mathsf{TF}|| &= ||\mathsf{GT}| + |\mathsf{TL}| - |\mathsf{TL}| - |\mathsf{TF}|| = |(|\mathsf{GT}| + |\mathsf{TL}|) - (|\mathsf{TL}| + |\mathsf{TF}|)| = \\ &= |(|\mathsf{TA}| + |\mathsf{TL}|) - (|\mathsf{TL}| + |\mathsf{TF}|)| = ||\mathsf{LA}| - |\mathsf{LF}|| = |c_2 - c_1| = \text{konst.},\end{aligned}$$

[1] Útvar pro odhalování organizovaného zločinu

[2] Nakreslete si rovinné zrcadlo, oko a předmět, např. tyčku, a rozmyslete si, že zobrazení rovinným zrcadlem využívající zákona odrazu Fermatův princip automaticky splňuje. Využijete vlastnosti zobrazení (osové souměrnosti) a trojúhelníkovou nerovnost.

odhalujeme zajímavou vlastnost, že rozdíl vzdáleností libovolného bodu (T) křivky od dvou pevně daných bodů (F a G) je konstantní. To je geometrická definice hyperboly (v rovině), resp. rotačního hyperboloidu v prostoru[3].



Obr. 1. Odrazná plocha

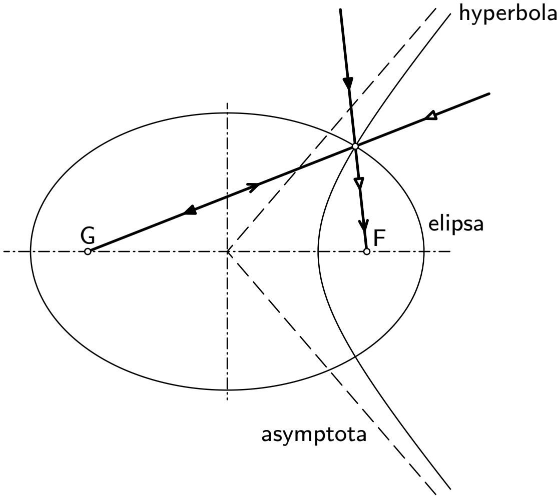
Navíc jsme během řešení objevili zajímavou vlastnost kuželoseček: Sférická plocha vrací paprsky jdoucí ze středu křivosti zpět do středu. Všechny paprsky vycházející z jednoho bodu do jiného odrazí právě jen rotační elipsoid. Nyní jsme zjistili, že rotační hyperboloid soustředí všechny paprsky směřující do jednoho bodu (primárního ohniska) do jiného (sekundárního ohniska). Odsud plyne, proč sekundární zrcátka oblíbených astronomických teleskopů (Cassegrainův dalekohled) mají tvar právě rotačního hyperboloidu. A konečně rotační paraboloid odrazí rovnoběžné paprsky (jdoucí z ohniska v nekonečnu) do svého ohniska. Současně jsme odůvodnili název ohnisko pro tyto významné body.

Nezapomeňme na diskusi k původnímu problému. Dobře víme, že hyperbola má dvě větve a obě nutně splňují požadavek úlohy. Dále si vzpomeneme na významné přímky k větvím hyperboly, tzv. asymptoty, k nimž se hyperbola blíží v nekonečnu. Zde uplatníme zadanou okolnost, že lasery nemohou být dále od centrály (G) než jistá vzdálenost, tedy díky omezení prostorového úhlu příchozích paprsků úloha má vždy řešení, kterých je v principu nekonečně mnoho.

Shrňme, že hledanou spojitou odraznou plochu představuje rotační hyperboloid, přičemž vzdálenost sídel (ohnisek) |FG| odpovídá dvojnásobku excentricity ($2e$) a maximální vzdálenost centrály G od laserů L vymezuje prostorový úhel pro možné asymptotické kužele. Ke zvolené větvi hyperboly (před uplatněním rotační symetrie problému) a ke zvoleným asymptotám existuje příslušná velikost velké a malé poloosy. Tím jsou tvar i poloha odrazné plochy jednoznačně určeny a zároveň předpokládáme, že celé město F (Karlovy Vary) bude za ní schováno – plocha

[3] Zájemcům doporučujeme přečíst si analogické autorské řešení úlohy II.4 ze XVII. ročníku, kde je navíc uveden přímý důkaz hypotézy, který lze rovněž přeformulovat pro hyperbolu či rovinné zrcadlo. Řešení se liší v technickém detailu myšlenkové realizace Fermatova principu. V případě hyperboly jsme museli laserový paprsek vyslat z vnější obálkové kružnice do středu, zatímco u elipsy mohla být jakási vnitřní kružnice degenerovaná na pouhý bod – jedno z ohnisek – a konstantní rozdíl vzdáleností přešel v konstantní součet.

jím nebude procházet. Z obou větví hyperboly bychom zřejmě doporučili tu bližší ke Karlovým Varům, zejména kvůli úspoře materiálu, a tedy i finančních prostředků.



Obr. 2. Porovnání hyperboly a elipsy

Jediný *Jan Hermann* řešil problém užitím Fermatova principu, za což byl odměněn prémiovým bodem. Mnoho řešitelů doporučilo postavit rovinné zrcadlo kolmé na spojnici obou sídel a přesně v polovině jejich vzdálenosti. Tato rovinná plocha představuje zvláštní případ našeho obecného řešení (konst. rozdíl $c_2 - c_1 = 0$), jde sice o méně úsporné řešení, ale správné a s důkazem bylo oceněno 3 body. Za jiné kuželosečky než hyperbolu jste podle celkové argumentace mohli obdržet nejvýše 1 bod, za přijatelný důkaz svého tvrzení další 1 bod. Několik řešitelů by nechalo postavit kulové zrcadlo, což je zajímavý návrh, uvážíme-li, že tvar kuželoseček poblíž vrcholů lze poměrně dobře vystihnout tzv. oskulační kružnicí – tento argument však neuvedl nikdo. Můžeme jen spekulovat, proč nám řešení neposlal sám karlovarský rodák, ale nejspíš o něm mafie dobře věděla ...

Pavel Brom
`paja@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.