21. ročník, úloha V . 4 ... *sluneční konzerva* *(4 body; průměr 2,44; řešilo 16 studentů)*

Ráma cestuje mezi hvězdami tak, že polovinu času rovnoměrně zrychluje a polovinu času rovnoměrně zpomaluje. Právě se pohybuje kolem Slunce po parabole s vrcholem na orbitě Země. Energii získává ze slunečního záření (žádný reaktor nebo obří baterie jsi na něm neobjevil) a jeho povrch absorbuje 80 % dopadající energie. Nasbírá při průletu sluneční soustavou dostatečnou energii, aby se dostal k Siriu, který je vzdálen 12 světelných let, za 24 let?

Nadhodil Jakub Benda.

Tato úloha se zaměřila na energetickou náročnost Rámových poutí, které se skládají ze svižného přesunu mezi různými hvězdnými systémy a interakce s živými bytostmi v nich. V knižní předloze je mechanizmus získávání energie utajený, ledaže by se jednalo o mohutný gravitační prak kolem Slunce, nicméně ten příliš účinný být nemůže (alespoň ne na cestě k Siriu), neboť relativní radiální rychlost Slunce a Siria je pouhých 7,6 km/s.

Jestliže volíme parabolickou trajektorii při průletu kolem Slunce, lze rychlost vesmírného plavidla na okraji sluneční soustavy považovat za zanedbatelnou. Pro jistotu si určíme její hodnotu. Vyloučíme-li z našich úvah všechna tělesa vyjma Slunce a Rámy, je energie vesmírné lodě

$$E = \frac{1}{2}mv^2(r) - \frac{GM_\odot m}{r}\,,$$

kde m je hmotnost Rámy a $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg hmotnost Slunce. Parabolu dostaneme pro mezní únikovou energii, $E = 0$, tudíž

$$v(r) = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r}}\,. \tag{1}$$

Vezmeme-li jako hranici sluneční soustavy začátek *heliosférické obálky*, okraj oblasti čištěné slunečním větrem od mezihvězdného materiálu, což činí asi $r_\mathrm{h} \approx 90\,\mathrm{AU}$, dostaneme $v(r_\mathrm{h}) \approx 4{,}5\,\mathrm{km/s}$. To sice není nula, ale na uvažovaných vzdálenostech od ní není daleko.

Jestliže má Ráma po opuštění systému nulovou rychlost a půlku cesty zrychluje a půlku zpomaluje, je jeho maximální rychlost rovná dvojnásobku průměrné rychlosti. Takže protože průměrná rychlost je

$$v_\mathrm{p} = \frac{12\,\mathrm{ly}}{24\,\mathrm{y}} = \frac{1}{2}c\,,$$

dosáhne maximální rychlost rychlosti světla, což hmotný objekt podle teorie relativity nedokáže. Zdá se tedy, že zadaná čísla jsou chybná, což je na jednu stranu (naneštěstí) pravda – cesta trvala Rámovi podle knihy pouhých 12 let a vzdálenost k Siriovi od Země je správně 8,6 ly – na druhou stranu, když se zahledíme na tento nový pár čísel, dojdeme k závěru, že tím spíše je popsaný manévr neproveditelný. Budeme tedy prozatím uvažovat nějakou bližší soustavu, například trojhvězdu Alfa Centauri ve vzdálenosti 4,4 ly a k otázce proveditelnosti v původním případě se vrátíme později.

Prvním úkolem je určení energie načerpané ze slunečního světla. Zářivý výkon Slunce (energie vyzářená za jednotku času) je $P_\odot = 385 \cdot 10^{24}$ W. Protože záření je kulově symetrické, na čelně nastavenou plochu S ve vzdálenosti r dopadá výkon

$$P = \frac{P_\odot S}{4\pi r^2}\,.$$

Protože Ráma záření o nižších frekvencích odráží, uloží podle zadání jen $\varkappa = 80\,\%$ z energie dopadajícího záření, což za jednotku času činí

$$\mathrm{d}W^+ = \varkappa P \mathrm{d}t = \frac{\varkappa P_\odot S}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Celková dodaná energie je pak integrál předcházejícího příspěvku po celé trajektorii[1]

$$W^+ = \frac{\varkappa P_\odot S}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{r^2} \,. \tag{2}$$

Pro jeho výpočet potřebujeme znát buď polohu Rámy v každém čase, nebo – lépe – ho trochu zjednodušit. Vyjděme z druhého Keplerova zákona o plochách opsaných průvodičem, totiž že se zachovávají. Je-li σ plošná rychlost, platí

$$\sigma \equiv \tfrac{1}{2}\omega r^2 \equiv \tfrac{1}{2} v r \sin\vartheta = \sigma_0 \,, \tag{3}$$

přičemž ϑ je úhel sevřený vektorem rychlosti a průvodičem a σ_0 je konstanta. Toto platí i v přísluní ve vzdálenosti $R = 1\,\mathrm{AU}$ od Slunce, kdy je rychlost Rámy tečná (radiální rychlost je v tu chvíli nulová), tedy $\vartheta = \pi/2$ a po dosazení dříve vypočtené rychlosti (1) do (3) máme

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} v(R) R = \sqrt{\frac{GM_\odot R}{2}} \,.$$

Pokud nyní z (3) vyjádříme úhlovou rychlost, dostaneme

$$\omega = \frac{1}{r^2}\sqrt{2GM_\odot R} \,,$$

a jelikož $\omega = \mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}t$, je konečně

$$\frac{\mathrm{d}t}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2GM_\odot R}} \,.$$

Výsledným výrazem nahradíme připravený integrand v (2) a příslušně změníme meze, pak

$$W^+ = \frac{\varkappa P_\odot S}{4\pi\sqrt{2GM_\odot R}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{\varkappa P_\odot S}{2\sqrt{2GM_\odot R}} \,.$$

Osvětlenou plochu válce odhadneme jako obdélník o rozměrech $50\,\mathrm{km} \times 20\,\mathrm{km}$ (délka krát průměr). Vyjde

$$W^+ \doteq 2 \cdot 10^{19}\,\mathrm{J} \,.$$

Pokud by se někdo vůbec nechtěl pouštět do integrování, byť takto jednoduchého, velice podobný výsledek asi $3{,}5 \cdot 10^{19}\,\mathrm{J}$ dostane následujícím odhadem. Většinu energie získá Ráma v perihelu, totiž na orbitě Země. Pokud se vzdálí, dopadá na něj méně světla, ale zato se podle Keplerových zákonů pohybuje pomaleji[2]. Při jednom svém oběhu tak Ráma získá skoro stejnou energii, jakou by načerpal na orbitě Země za jeden rok.

Nyní je na čase rozmyslet si cestu mezihvězdným prostorem. Z úvodních úvah je zřejmé, že se vesmírná loď neštítí relativistických rychlostí, použijeme tedy vzorec pro relativistickou kinetickou energii

$$W_\mathrm{k} = m'c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma(v) - 1) \,,$$

[1] Příspěvek integrálu mimo sluneční soustavu je zanedbatelný a takto se nám bude snáze počítat.

[2] Nicméně intenzita je úměrná r^{-2}, zatímco perioda $r^{3/2}$, takže jejich součin přece jen klesá se vzdáleností – ale pomalu, jako $r^{-1/2}$.

kde $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Pokud loď zrychluje s konstantním zrychlením, D je vzdálenost mezi hvězdami a T plánovaná doba letu, je průměrná rychlost $v_\mathrm{p} = D/T$ a maximální rychlost $v_\mathrm{max} = 2D/T$. Protože na začátku cesty se Ráma (téměř) nepohybuje, k urychlení na v_max musíme dodat energii

$$\Delta W = mc^2 \left(\left(1 - \left(\frac{2D}{cT} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right) ,$$

Pokud Ráma stejným způsobem brzdí, je toto polovina celkové vydané energie[3]. Letíme-li na Alfa Centauri po dobu 12 let, spotřebujeme tak

$$W^- = 2\Delta W \doteq 4 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} m \,,$$

což pro vesmírnou loď těžší než trabant znamená nutnost vézt s sebou dodatečné zdroje energie. Mnohasettisícitunový Ráma fungující na sluníčko by tedy nikam daleko nedoletěl.

Na konci úvodu jsme slíbili, že se ještě vrátíme k otázce realizovatelnosti zadaného Rámova způsobu cestování od Slunce k Siriovi. V předcházejícím řešení jsme předpokládali, že „konstantní zrychlení“ v zadání je myšleno z pohledu vnějšího pozorovatele. Z teorie relativity plyne, že rychleji se pohybující objekt má větší setrvačnost (rozuměj hmotnost), a tedy stejnému urychlování klade větší odpor. To ale znamená, že aby udržel Ráma stejné *vnější* zrychlení (pozorované například od Slunce), musí vynakládat stále větší výkon s tím, jak jeho rychlost roste. Tak se ale ztrácí předpokládaná ekonomičnost Rámových přesunů, totiž stálý (a tedy i minimální) výkon a s ním spojené opotřebovávání motorů. Pohleďme proto nyní očima řidiče – bezvěkého tvora ovládajícího koráb Ráma, brázdícího na něm hvězdné hlubiny po eóny let. Řidič není svázaný relativitou v tom smyslu, že by jeho rychlost byla jakkoliv omezená; při vyšších rychlostech dochází z jeho pohledu ke kontrakci vzdáleností ve směru jeho rychlosti podle známého vzorce $\Delta l_\text{řidič} = \Delta l_0/\gamma(v)$, a pokud se jeho rychlost (vzhledem k soustavě počátek–cíl cesty) přiblíží k rychlosti světla, $\Delta l_\text{řidič}$ se zkracuje k nule a jím pozorovaná rychlost $v_\text{řidič}$ narůstá do nekonečna, neboť za stejný (vlastní) čas urazí γ-krát větší vzdálenost. Jinými slovy

$$v_\text{řidič} = v\gamma(v) \,. \tag{4}$$

Řidič navíc jistě vede loď tak, že konstantně zrychluje ze svého pohledu, $v_\text{řidič} = a_\text{řidič}\, t$, působí na něj konstantní setrvačná síla a Ráma má stabilní výkon. Z (4) vyčíslíme v,

$$v(t) = \frac{a_\text{řidič}\, t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_\text{řidič}\, t}{c} \right)^2}} \,, \tag{5}$$

což už stačí zintegrovat (s podmínkou $x = 0$ v čase $t = 0$) na

$$x(t) = \frac{c^2}{a_\text{řidič}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a_\text{řidič}\, t}{c} \right)^2} - 1 \right) . \tag{6}$$

[3]) *Jakub Michálek* a *Dalimil Mazáč* si uvědomili, že Ráma by mohl mít nějaký mechanizmus, jak při zpomalování svoji kinetickou energii ukládat k opětovnému použití, a být tak nezávislý na energetických zdrojích. Pak by ale nebylo co počítat.

Jestliže si nakreslíme graf této závislosti, snadno nahlédneme, proč se pohybu, při němž urychlovaný pozorovatel pociťuje konstantní zrychlení, říká *hyperbolický pohyb*. Nyní jsme schopni, dosazením $x = D/2 = 4{,}3\,\mathrm{ly}$ pro $t = T/2 = 6\,\mathrm{y}$ do (6), vyčíslit potřebné zrychlení, resp. zpomalení Rámy při cestě k Siriu

$$a_{\text{řidič}} = \frac{4D}{T^2 - \left(\frac{D}{c}\right)^2} \doteq 4{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Zdá se tedy, že řidiči se ani příliš neodvápní kosti (má-li nějaké), ani ho v sirijském kosmodromu nebudou seškrabovat ze zadní stěny. Spotřebovanou energii získáme opět jako dvojnásobek kinetické energie Rámy letícího maximální rychlostí

$$W^- = 2mc^2\left(\gamma\left(v_{\max}\right) - 1\right)\,,$$

kde $v_{\max}$ se vypočítá z (5) dosazením vypočteného zrychlení a $t = T/2$. Dohromady po úpravě je

$$W^- = \frac{4mc^2}{\left(\frac{cT}{D}\right)^2 - 1} \doteq 4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}m\,.$$

Závěr je tedy stejný jako pro cestu na Alfa Centauri při konstantním vnějším zrychlení s tím, že z trabantu by už zbyly jen nárazníky – Rámovi by nasbíraná energie nestačila.

Jakub Benda
`jakub@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.