

21. ročník, úloha VI. 4 ... rychlý úprk (3 body; průměr 2,10; řešilo 20 studentů)

Pták FYKOSák statečně prchá chodbou (nemůže v ní letět), v patách má dva vojáky, kterým se před okamžikem vymkl z pout. Chodba zatáčí ve tvaru písmene L a pterodaktyl horlivě přemýšlí, jak dál.

Chodba je široká w , pterodaktyl běží rychlostí v_0 a zatáčka je ve vzdálenosti d . Pokud velikost ptákovy zrychlení dosáhne hodnoty a_0 , pterodaktyl uklouzne, spadne a bude chycen. Po jaké dráze má běžet a jak se má naklánět, aby ho zatáčka zdržela co nejméně?

Neodhadl Honza Jelínek při dobíhání tramvaje za rohem.

Podstatou této úlohy bylo najít dráhu, která minimalizuje čas projetí zatáčkou. (Nikoli zrychlení jak se mnoho řešitelů mylně domnívalo). I když v následujícím autorském řešení postupujeme jinak, při opravování došlých řešení jsme akceptovali i předpoklad, že pták FYKOSák proběhne zatáčkou po dráze složené jenom z přímek a částí kružnice. Správné řešení úlohy se totiž ukázalo být (oproti očekávání) poněkud komplikované. Dobře vypracované řešení tohoto typu však muselo obsahovat informaci o poloměru kružnice, po které pták poběží, zdůvodnění, proč je právě tenhle poloměr nejlepší, a diskuzi podmínek úlohy.

Za předpokladu, že při pohybu po kružnici musí pták FYKOSák zpomalit, byl nejuvhodnější největší možný poloměr. Jinak to byl nejmenší poloměr, po kterém se mohl pohybovat svou maximální rychlostí a projel zatáčkou (kratší dráha – menší čas). Když se totiž zapsal čas průchodu zatáčkou jako funkce poloměru (čas = doba brzdění na požadovanou rychlost + doba rovnoměrného pohybu + doba rovnoměrného pohybu po kružnici + doba zrychlování), nejkratší vyšel pro maximální poloměr. Do diskuze by stačilo poznamenat, že když bude zrychlení potřebné na zastavení z počáteční rychlosti na vzdálenosti $d + b$ větší než a_0 , tak už nemůže před zatáčkou ubrzdít, aniž by narazil do protější stěny (anebo došlo ke smyku). Dobře vypracované řešení tohoto typu měli například Petr Ryšavý anebo Tereza Steinhartová.

Vágní formulace úlohy zde nemusela být vždy na škodu. Mohli jsme totiž předpokládat vstupní podmínky, které se nám zrovna hodily. K velice originálním řešením lze dojít, učiníme-li dodatečné předpoklady o velikosti či směru počáteční rychlosti (např. začíná z nuly, směřuje k rohu zatáčky apod.). Lukáš Labor dostal bonusový bod za úvahu, kde předpokládal, že se běžec může odstrčit od stěny (proč ne?).

Teď bychom měli vyjasnit, co jsme mysleli, když jsme v úvodu řekli „poněkud komplikované řešení“. V principu existují dvě metody, jak se úloha dala řešit. Praktická a teoretická. Tu první o něco jednodušší můžeme stručně nazvat „minimalizace času jako funkce parametrů s použitím downhill simplexové metody při dráze a průběhu rychlosti aproximovanými polynomiálními funkcemi“.

K dohledání aproximované dráhy a průběhu rychlosti použijeme počítač. Vysvětlení *downhill simplexové metody* by proto patřil spíše do aktuálního seriálu. V principu se jedná o to, že namísto hledání přesné dráhy si ji budeme aproximovat nějakou polynomiální funkcí tvaru $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Čím více zvolíme členů této řady, tím bude naše aproximace přesnější. Podobně také rychlost zapíšeme jako $v = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$. Potom vypočítáme čas T jako integrální funkci rychlosti po dráze. Dostaneme funkci, která bude záviset na parametrech a_i, b_i . Minimum funkce mnoha proměnných najdeme downhill simplexovou metodou. Splnění podmínek úlohy docílíme vhodnou parametrizací a modifikací simplexové metody. Podrobněji můžeme postupovat následovně.

Řekněme, že v bodě A před zatáčkou k ní pták FYKOSák utíká svou maximální rychlostí v_{\max} a stejně daleko za ní utíká přibližně tou samou rychlostí ale směrem od zatáčky. Okrajové podmínky můžeme zvolit zcela libovolně, na postupu řešení se nic nezmění.

Pak zavedeme pravouhlou souřadnou soustavu s počátkem v rohu zatáčky a osou y rovnoběžnou s její osou. Souřadnici x vyjádříme jako funkci času a souřadnici y jako funkci x . Budeme předpokládat, že tyto funkce mají tvar

$$\begin{aligned}x &= a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_{00}, \\y &= b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,\end{aligned}$$

kde jsme pro přehlednost zapsali obě funkce jen jako polynomy třetího řádu. Řád polynomů samozřejmě můžeme zvolit i vyšší, podle toho, jakou přesnost požadujeme. Můžeme dokonce zvolit i obecnější funkce (třeba nahradíme t za $\tau = t - T_0$).

Dále zapíšeme podmínky úlohy. Budeme chtít, aby pták FYKOSák v žádném okamžiku nepřišel do kontaktu se stěnami chodby. To v dané souřadnicové soustavě vyjádříme nerovnostmi

$$|x| < y < |x| + \frac{\sqrt{2}}{2} b.$$

V žádném čase nemůže běžet rychleji nežli maximální (tedy počáteční) rychlostí

$$v^2 < v_{\max}^2, \quad v^2 = (\dot{x})^2 + (y'\dot{x})^2,$$

kde tečkou značíme derivaci podle času a čárkou derivaci podle x . Požadavek na zrychlení menší než a_0 zapíšeme jako $a_t^2 + a_d^2 < a_0^2$, tedy

$$(\ddot{x}^2 + (y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x})^2) + (kv^2)^2 < a_0^2, \quad \text{kde křivost} \quad k = \frac{1}{r} = \left| \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right|.$$

Podmínku, že za zatáčkou dosáhnou funkce polohy a rychlosti požadovaných hodnot zapíšeme jako

$$v = v_{\max}, \quad y' = y'|_{t=0} \pm 10\%, \quad x = -x_A. \quad (1)$$

A konečně pták FYKOSák musí projít bodem A a mít v něm požadovanou rychlost, tedy pro $t = 0$ musí být hodnoty x a y a jejich derivace rovny hodnotám v bodě A. Jako poslední musíme doplnit ještě $t < T_{\max}$. Význam této poslední podmínky spočívá v tom, že zavrhneme ty dráhy, pro které by průchod zatáčkou trval příliš dlouho. Použitá parametrizace může totiž teoreticky popsat i dráhu, při které bude dělat kolečka v chodbě.

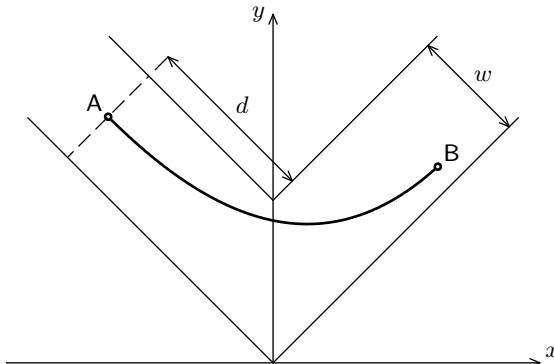
Podmínky pro povolené hodnoty parametrů a_i , b_i můžeme získat z předchozích vztahů tak, že do nich dosadíme funkce $x(t)$ a $y(x)$ v předpokládaném tvaru. Pro $t = 0$ plyne přímo z tvaru těchto vztahů podmínka $a_{00} = x_A$. Z podmínky na počáteční rychlost (derivace) plyne $a_1 = \dot{x}|_{t=0} = v_0^{(x)}$. To dosadíme do funkce $y(x)$ a můžeme vyloučit dva z koeficientů.

Nakonec zjistíme dobu průchodu zatáčkou. Při daných parametrech a_i , b_i zvolíme malý časový krok δt . Začneme v bodě A, vypočítáme \dot{x} a \dot{y} a zjistíme, kam se posune za δt . V tom bodě znovu vypočítáme rychlost stejně jako předtím atd. až dokud nejsou splněny podmínky (1) anebo celkový čas nepřesáhne povolené maximum.

Jestliže budeme uvažovat čas jako funkci parametrů a_i , b_i a souřadnice budeme uvažovat ve výše uvedeném tvaru, úloha se změní na hledání minima funkce několika proměnných. Celkem je jich osm, z počátečních podmínek však máme čtyři. Hledáme tedy minimum funkce čtyř proměnných. Problém je jen v tom, že nemáme její analytické vyjádření, ale jenom návod jak

ji pro dané parametry vypočítat. A právě tenhle problém řeší simplexová metoda. Vysvětleme nyní její podstatu.

Představme si, že chceme najít minimum spojité funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$. Graf takové funkce ve třech dimenzích vypadá jako reliéf (jáma, kopec, ...). Vybereme v rovině (x, y) tři body. Můžeme to udělat tak, že jeden bod vybereme zcela náhodně (anebo se zkusíme trefit do blízkosti minima) a zbylé body budou od něho posunuté o nějakou vzdálenost vždy ve směru jiné souřadnice. Vypočítáme hodnotu funkce ve všech třech bodech. Vezmeme bod, ve kterém má funkce největší funkční hodnotu (pokud je jich víc ekvivalentních, vybereme kterýkoli), a zobrazíme ho symetricky podle přímky tvořené zbylými dvěma body. Teď by bod měl být blíže k minimu než zbylé dva, tj. funkční hodnota v něm by měla být menší. Jestliže tomu tak není, zmenšíme trojúhelník tvořený vybranými body (posuneme zbylé body podél stran blíže ke středu trojúhelníku) a dále postupujeme stejně. Algoritmus končí ve chvíli, kdy jsou body u sebe blíže, než je přesnost, se kterou chceme nalézt bod minima. Celý algoritmus si můžeme tedy představit tak, že „kutálíme“ trojúhelník po povrchu grafu funkce a v blízkosti minima ho postupně zmenšujeme. Pro funkci třech proměnných už nebudeme kutálet trojúhelník po rovině, ale čtyřstěn v trojrozměrném prostoru. Tento postup jde zobecnit i do více dimenzí. Výhoda této metody je ta, že není potřeba hledat derivace minimalizované (maximalizované) funkce. Stačí nám pouze znát funkční hodnoty ve vyšetřovaných bodech.



Obr. 1. Počítačová simulace trajektorie ptáka FYKOSáka v nepřehledné zatáčce

Modifikace simplexové metody pro naši úlohu spočívá v tom, že ne všechny body budou přípustné. Při výpočtu času musíme zároveň kontrolovat splnění všech podmínek úlohy. Pokud by se měl některý z bodů simplexu posunout do nepřípustné polohy, dostaneme pro daný bod čas T_{\max} a dojde k zmenšení simplexu.

Při praktické implementaci jsme použili upravený kód z knihy Press et al.: *Numerical recipes in C*. Pro konkrétní hodnoty $d = 3$ m, $w = 2$ m a $v_{\max} = 8$ m/s jsme našli nejvýhodnější křivku pro průchod zatáčkou zobrazenou na obrázku. Doba pohybu po této křivce vyšla $t = 0,49$ s. Naproti tomu dostat se stejně daleko za zatáčku po nejvýhodnější čtvrtkružnici by trvalo přes 0,7 s. Už takhle jednoduchou aproximací jsme tedy zlepšili čas průchodu zatáčkou až o 30 %! Kdybychom zvolili lepší aproximaci, případně se více pohráli s počátečním a koncovým bodem, tento čas by určitě šel ještě vylepšit.

Úloha se v principu dala řešit také analyticky¹. Toto řešení však už bylo natolik komplikované, že zde poskytneme jen nástin toho, jak by se dalo postupovat. Abychom mohli vysvětlit podstatu tohoto řešení, budeme potřebovat alespoň základy variačního počtu. V následujícím „intermezzu“ si shrneme pár základních poznatků o něm.

Budeme se zabývat křivkami, které jsou definované pomocí intervalu $I = \langle x_A, x_B \rangle$ a funkce $y(x)$, která má v bodech x_A a x_B dané hodnoty y_A a y_B . Křivku potom tvoří všechny body $(x, y(x))$ pro $x \in I$. Rozdílu funkčních hodnot dvou různých funkcí $y_0(x)$ a $y(x)$ v některé přípustné hodnotě x říkáme *variační funkci*.

Zobrazení z množiny všech možných takových křivek do množiny reálných anebo komplexních čísel se nazývá *funkcionál*. Speciálně se budeme zabývat funkcionály typu $C(K) = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y, y') dx$, kde K je křivka (daná intervalem a funkcí). Číslo $V = C(K_0) - C(K) = \int_{x_A}^{x_B} [F(x, y_0, y'_0) - F(x, y, y')] dx$ nazýváme *variační funkcionál* pro dvě křivky dané intervalem I a funkcemi y a y_0 . Řekneme, že dvě křivky jsou tím odlišnější, čím větší je jejich variace.

Základní úlohou variačního počtu je nalézt extrém funkcionálu ve výše uvedeném tvaru. Podobně jako pro minimum obyčejné funkce bude platit, že hodnota funkcionálu pro nějakou křivku bude větší (menší) než hodnota pro křivky z nějakého okolí (tedy pro křivky, kterých variace od uvažované je menší než něco). A tak jako pro extrém funkce existuje podmínka $y' = 0$, funkcionál uvažovaného tvaru má extrém pro křivku K , když y splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Pro variační problém s vedlejšími podmínkami, který budeme řešit, se rovnice změní na

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) = 0, \quad (2)$$

kde g je vazba ve tvaru $g(x, y, y') = 0$ a λ je tzv. Lagrangeův multiplikátor, který je potřeba z dané rovnice najít.

S touto teoretickou přípravou můžeme postoupit dál. Budeme hledat tvar křivky, po níž pták FYKOSák proběhne zatáčku za předpokladu, že jeho rychlost se mění spojitě. Ve vhodné souřadnicové soustavě vypočítáme čas jako integrál funkcí $x(t)$ a $y(t)$, který bude ve tvaru funkcionálu, jehož minimum potom nalezneme pomocí uvedené podmínky (2).

Zvolíme počáteční a koncový bod dráhy jako dva body, kterými musí pták FYKOSák projít, a také složky jeho rychlosti v nich. Jako další parametr vezmeme bod, ve kterém projde osou zatáčky. Ve finálním výsledku pak budeme ještě muset hledat minimum času jako funkce polohy tohoto bodu, to je už však relativně snadná operace. Dráhu rozdělíme na dvě části (před zatáčkou a po zatáčce) a v každé zvolíme jiné souřadnice. Osa y bude vždy rovnoběžná se stěnami chodby, osa x kolmá na ně. Celkový čas bude součtem časů potřebných k projetí od začátku do bodu na ose a z bodu na ose do koncového bodu. Druhá část dráhy bere jako vstupní parametry rychlost na konci první části. Tohle řešení není úplně obecné (nezahrnuje všechny možné dráhy, např. x nemůže být menší než x_A), ale dalo by se na něj převést vhodnou transformací souřadnic. Pro názornost ukážeme jenom nalezení dráhy v jedné části. Pro výpočet celkového času, za který se projdou obě pak už stačí do těch samých vzorečků dosadit součet dvou funkcí místo jedné.

¹⁾ Tento postup byl inspirován řešením úlohy o *brachystochroně*.

Budeme uvažovat $x = x(t)$ a $y = y(x(t))$ a najdeme celkový čas, za který pták proběhne po dráze mezi dvěma body popsané těmito funkcemi. Jelikož $v = ds/dt$, tak

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v}, \quad (3)$$

kde se integruje od začátku do konce dráhy. Rozepíšeme ds pomocí vzorce pro délku křivky

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

a zapíšeme její složky ds_x a ds_y . Průmět ds na osy x a y získáme pomocí $y' = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je sklon k ose x . Z toho

$$ds_x = \cos \alpha ds = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} ds \quad \text{a} \quad ds_y = \sin \alpha ds = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} ds.$$

Rychlosti zapíšeme jako \dot{x} , resp. \dot{y} .

Požadujeme, aby $v_x^2 + v_y^2 \leq v_{\max}^2$ a $a_x^2 + a_y^2 < a_0^2$. Vazbu g , která je formálně v požadovaném tvaru a tyto požadavky zahrnuje, můžeme zapsat např. takto

$$g_v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - v_{\max}^2) = 0 \quad \text{a} \quad g_a = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - a_0^2) = 0,$$

kde z je cokoli. Za g dosadíme součet $g_v + g_a$.

Dosazením těchto vyjádření do integrálu (3) dostaneme dvě složky funkcionálu. Dvě funkce F_x a F_y dosadíme do rovnice (2). Odsud dostaneme soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic druhého ze které dostaneme soustavu pro Lagrangeovy multiplikátory. Z nich máme dostat y a \dot{x} , odkud bychom měli získat parametrický popis dráhy. Zájemci si mohou tyto rovnice zkusit napsat sami (nezapomeňte, že \dot{x} je také funkce x). Ostatní raději jejich explicitním vyjádřením děsit nebudeme.

Zde uvedený analytický postup byl jen náznakový. Jeho cílem nebylo úlohu vyřešit, ale ukázat myšlenkovou cestu a potřebný aparát, které by byly potřeba pro analytické řešení neboli ukázat, proč jsme úlohu řešili raději na počítači. I po tomto nástinu jistě oceníte jednoduchost a účelnost první ukázané metody.

Peter Greškovič

grepe@fykos.mff.cuni.cz