22. ročník, úloha II . E ... *šikmá věc* *(8 bodů; průměr 3,71; řešilo 17 studentů)*

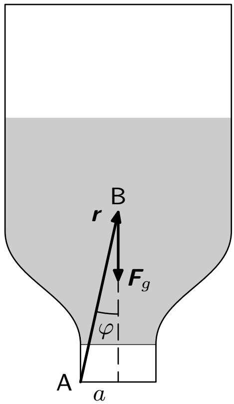
Kolik vody musí být v PET lahvi postavené na uzávěr, aby její stabilita byla největší (při vychýlení ze svislé polohy spadne ze nejdelší čas)? Nezapomeňte na teoretickou předpověď.

Nad vypitou lahví se zamyslel Béda.

Teorie

Je třeba se zamyslet nad tím, jaké si zvolíme kritérium, podle kterého budeme hodnotit stabilitu lahve s vodou. Omlouváme se za kritérium nastíněné v zadání, které je trochu matoucí.

Bod hrany víčka, kolem kterého se lahev otáčí, označme A, těžiště B, vektor z bodu A do B bude $\boldsymbol{r}$, úhel sevřený vektorem $\boldsymbol{r}$ a svislým směrem je φ, průmět $\boldsymbol{r}$ do vodorovného směru je poloměr víčka, který označme a. První kritérium, které nás pravděpodobně napadne, je velikost momentu síly $\boldsymbol{M}$, kterým je třeba na lahev působit, abychom ji převrátili. Ovšem $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_g$. Velikost M je rovna součinu velikosti F_g a průmětu vektoru $\boldsymbol{r}$ do směru kolmého na $\boldsymbol{F}_g$, tento průmět je roven a (viz obrázek). Přiléváním vody do lahve roste úměrně $\boldsymbol{F}_g$, avšak a se vůbec nemění. Přirozeně podle tohoto kritéria je tedy lahev tím stabilnější, čím více je v ní vody.



Obr. 1. PET lahev „vzhůru nohama“

Rozumné kritérium stability je rozhodně práce W potřebná k převržení. W odpovídá součinu $m\Delta h$, kde Δh je potřebné zvednutí těžiště k převržení. Zanedbejme na chvíli vlastní hmotnost prázdné lahve a fakt, že se voda přelévá, a uvažme, že lahev je válcová. Při užití těchto silných zjednodušení si lze rozmyslet, že výraz $m\Delta h$ bude maximální při minimálním množství vody. Když zjednodušení opustíme, dojdeme k závěru, že maximální práci potřebnou k převržení, a tedy největší stabilitu dostaneme pro částečně naplněnou lahev.

Budeme zkoumat ale ještě jiné kritérium stability, a to dobu T, za kterou se lahev vrátí do svislé polohy, když jsme ji předtím vychýlili. Nikoli tedy dobu pádu lahve na zem, jak jsme navrhovali v zadání, ale dobu pádu zpět do svislé polohy. Kratší doba T znamená větší stabilitu. Uvažujme na chvíli, že voda v lahvi je „zamrzlá“, tedy že se nepřelévá. Když lahev trochu vychýlíme ze svislého směru a pustíme, lahev se vrací do svislé polohy, přičemž úhel φ se mění podle rovnice

$$J\ddot{\varphi} = mgr \sin\varphi\,, \tag{1}$$

kde $\ddot{\varphi}$ značí druhou derivaci φ podle času, tedy úhlové zrychlení, J je moment setrvačnosti lahve vůči bodu A. Máme diferenciální rovnici pro neznámou funkci $\varphi(t)$, která vyjadřuje fakt, že moment setrvačnosti tělesa krát úhlové zrychlení je rovno momentu působící síly. Pokusme se aspoň kvalitativně zjistit, jak funkce $\varphi(t)$ vypadá. V případě malých úhlů je $\sin\varphi \approx \varphi$ a rovnici (1) lze psát ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgr}{J}\,\varphi\,. \tag{2}$$

Tato rovnice nám říká, že druhá derivace funkce $\varphi(t)$ je rovna té samé funkci $\varphi(t)$, která je pouze přenásobená konstantou. Vzpomeneme si, jak se derivuje exponenciála, a přijdeme na to, že funkce vyhovující (2) jsou tvaru

$$\varphi(t) = C\mathrm{e}^{t\sqrt{mgr/J}} + D\mathrm{e}^{-t\sqrt{mgr/J}} \tag{3}$$

pro nějaké reálné konstanty C a D. Úhel φ v okamžiku, kdy lahev pouštíme, označme φ_0, úhel φ odpovídající svislé poloze značme φ_1.

Na začátku platí $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$. Pro splnění těchto dvou počátečních podmínek je třeba v (3) položit $C = D = \varphi_0/2$. Následně ještě vylovíme v paměti definiční vztah pro hyperbolický kosinus $\cosh x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$. Řešení pohybové rovnice (2) při splnění počátečních podmínek je proto

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cosh\left(t\sqrt{\frac{mgr}{J}}\right) . \tag{4}$$

Dobu pádu T z polohy $\varphi(0) = \varphi_0$ do svislé polohy $\varphi(T) = \varphi_1$ dostáváme vyjádřením z (4)

$$T = \sqrt{\frac{J}{mgr}} \operatorname{argcosh}\frac{\varphi_1}{\varphi_0} . \tag{5}$$

Pro různá množství vody m budeme měřit čas T odpovídající průchodu mezi polohami φ_0 a φ_1. Ve všech měřeních na počátku láhev vychýlíme stejně. Musíme si ale uvědomit, že pro různá množství vody v lahvi odpovídají počáteční výchylce a svislé poloze různé hodnoty $\varphi_0(m)$, $\varphi_1(m)$. Stejně tak $J(m)$ a $r(m)$ jsou nekonstantními funkcemi hmotnosti m. Funkce $T(m)$ má pak celkem komplikovaný průběh, který zjistíme měřením.

Následující úvahu si důkladně rozmyslete. Přilitím malého množství vody se sníží poloha těžiště a hodnota výrazu φ_1/φ_0 v (5) se zmenší. J se změní nepatrně, m trochu vzroste, zatímco r se o něco zmenší, ovšem výraz pod odmocninou se celkově zmenší. Ze začátku tedy přiléváním vody dostáváme menší časy T, pro malá m je funkce $T(m)$ klesající. Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že pro hodnoty m odpovídající téměř plné lahvi je funkce $T(m)$ naopak rostoucí. Odtud plyne, že pro určité m nabývá $T(m)$ minima.

Doposud jsme uvažovali, že voda je v lahvi „zamrzlá“. Když se voda přelévá, při vychýlení lahve je těžiště níže než pro zamrzlou vodu. Pravděpodobně proto reálně dostaneme časy T větší než v odhadu podle (5); pro velká množství vody bude tato odchylka méně výrazná. Aproximace $\sin\varphi \approx \varphi$ naopak způsobí, že předpovídáme větší časy než skutečné; opět pro velká m je tato odchylka méně výrazná.

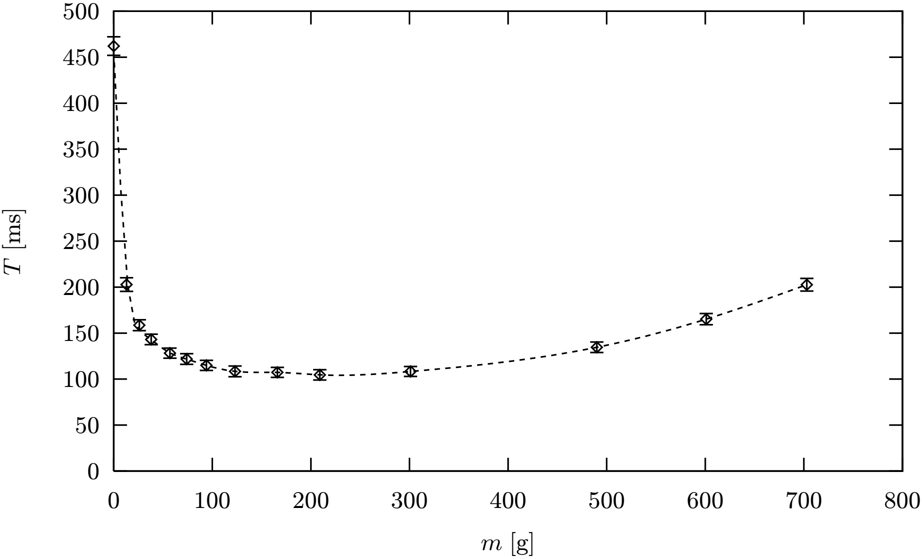
Všimněme si, že pro $\varphi_0 \to 0$ (tedy poloha „vleže“) dostáváme časy jdoucí k nekonečnu a měřený čas T by tedy velice silně závisel na počátečním φ_0. To by do měření vneslo velkou nepřesnost.

Měření

Použili jsme litrovou lahev od mléka, protože má větší víčko a lahev je tak stabilnější. Víčko je navíc pěkně ploché. Hmotnost prázdné láhve je 37 g. Zespodu na dno lahve jsme pomocí tavné pistole přidělali špejli, vznikl tak jakýsi bodec. Budeme měřit čas T průchodu bodce mezi polohami, které odpovídají úhlům $\varphi_0(m)$ a $\varphi_1(m)$.

K měření užijeme spojení dvou optických závor. Optickou závorou rozumíme kombinaci LED a fototranzistoru (dále FT), přičemž LED osvětluje FT. Neosvětlený FT je uzavřený, osvícením se otevírá. Připojme na zdroj napětí do série FT a odpor R. V našem případě zdroj je 9 V baterie a $R = 100\,\Omega$. Při osvětlení se FT otevírá, roste proud, napětí na R stoupá a na FT klesá. Na stejný zdroj zapojme paralelně k první větvi ještě druhou shodnou větev, tedy sériové spojení FT$'$ a R'. Pozorujeme rozdíl napětí ΔU na R a R'. Jsou-li oba FT osvětleny, je ΔU nulové. Při chvilkovém zastínění jednoho z FT pozorujeme napěťový puls.

Napětí ΔU přivedeme na konektor JACK, který strčíme do zdířky počítače pro mikrofon.



Obr. 2. Výsledné hodnoty proložené křivkou

Například pomocí programu Audacity můžeme sledovat časový průběh přivedeného napětí a odměřit časový odstup pulsů. Musíme dát pozor, aby ΔU nebylo příliš vysoké, čímž bychom si mohli poškodit počítač. Bohatě postačuje pracovat s napětími ΔU řádově v desetinách voltu. Toho docílíme třeba tak, že do série za R a FT do každé z větví zapojíme ještě odpor řádově větší, v našem případě $10\,\mathrm{k\Omega}$. Ze stejné baterie je možno napájet i LED, které s předřadným odporem zapojujeme paralelně k již existujícím dvěma větvím.

Ze stavebnice Merkur jsme si postavili konstrukci, na které jsou umístěny obě optické závory a která zaručuje konstantnost počátečního vychýlení.

Měřené časy T jsou malé, řádově v desetinách sekundy. Abychom dokázali určit, kdy je lahev nejstabilnější, vyžadujeme přesnost minimálně v řádu setin sekundy, lépe však v řádu milisekund. Proto se raději vyhneme měření ručně stopkami. Měření pomocí optické závory našemu požadavku vyhovuje. Odezva FT (tedy prodleva mezi osvícením a otevřením) je o několik řádů nižší než požadovaná přesnost, a nemusí nás proto trápit.

Výsledky měření shrnuje tabulka a graf, kde je vynesena závislost času T na hmotnosti vody v lahvi m. Pro každé m jsme provedli několik měření, abychom si udělali obrázek o přesnosti. T získáme jako průměr. V tabulce je pro každé m uvedena směrodatná odchylka souboru měření. Rovněž uvádíme z toho plynoucí statistickou nepřesnost aritmetického průměru u_{stat}. Potěšující je, že je směrodatná odchylka řádově v milisekundách. Výslednou chybu určení T odhadujeme o 5 ms větší než je u_{stat}, protože je třeba uvážit i možnost systematické chyby.

Minimální T odpovídá zhruba hmotnosti vody $m = 200 \pm 50\,\mathrm{g}$, při tomto množství vody prohlásíme lahev za nejstabilnější.

Graf potvrzuje naše kvalitativní závěry učiněné v teoretickém rozboru.

Tabulka výsledků měření

m [g]	0	13	26	38	57	74	94
T [ms]	450	206	160	147	130	119	114
	475	197	160	141	127	122	114
	477	204	155	141	127	126	115
	482	200	158	144	131	121	114
	473	198	156	144	128	122	113
	463	196	158	143	130	120	118
	444	221	164	142	126	125	117
	435	198	160	141	127	119	114
	460	205	156	145	128	122	115
$\overline{T}$ [ms]	462	203	159	143	128	122	115
σ [ms]	15	7	3	2	2	2	2
u_{stat} [ms]	5	2	1	1	1	1	1
m [g]	123	166	209	301	490	601	703
T [ms]	108	108	105	110	137	161	202
	108	107	102	107	135	172	212
	103	106	108	107	136	166	201
	111	106	102	110	136	167	192
	108	107	104	108	131	168	197
	111	107	107	107	131	162	207
	112	107	104	109	136	162	204
	108	110	105	107	134	164	200
	107	108	104	110	135	165	208
$\overline{T}$ [ms]	108	107	105	108	135	165	203
σ [ms]	3	1	2	1	2	3	6
u_{stat} [ms]	1	1	1	1	1	1	2

Poznámky k došlým řešením

Velká část z vás dospěla k závěru, že lahev je tím stabilnější, čím víc je v ní vody. Jak jsme ukázali, závisí náš závěr na volbě kritéria stability. Závěrem bychom jen chtěli připomenout, že při měření je třeba se aspoň základním způsobem zamyslet nad velikostí chyby. Nepožadujeme žádné hluboké analýzy nepřesností, stačí stručná a jasná zmínka. Měříme-li ručně stopkami čas zhruba půl sekundy, je na místě provést měření několikrát a následně se zamyslet, jak důvěryhodné jsou naše výsledky.

Marek Scholz
`mara@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.