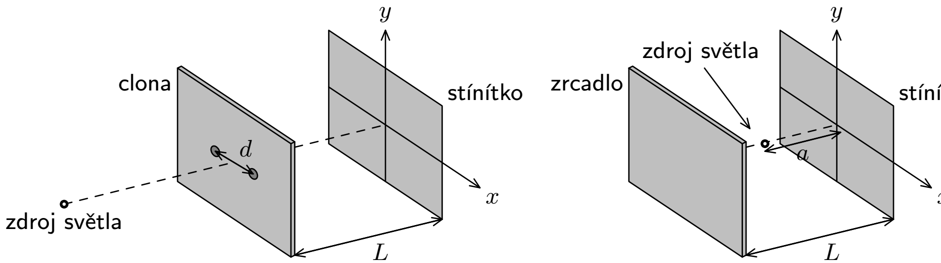
22. ročník, úloha II . S ... *Young a vlnová povaha světla* *(5 bodů; průměr 2,50; řešilo 6 studentů)*

a) Jaký tvar interferenčních proužků na stínítku byste očekávali v následujících dvou sestavách? Najděte rovnice křivek maximální intenzity a zkuste jich několik načrtnout.



b) Ukažte, jak by dopadl Youngův experiment, jestliže by se světlo chovalo podle Newtonových představ (tzn. difrakce ano*, interference* ne*). Nezapomeňte vzít v úvahu různý úhel dopadu světla na různá místa stínítka.*

c) Užitím vyloženého kvantově-mechanického popisu určete rozložení intenzity, jaké by dostal Jöhnsson při použití čtyřštěrbiny (tedy čtyř úzkých rovnoběžných otvorů rozmístěných ve vzdálenostech b od sebe). Načrtněte reprezentativní úsek grafu a okomentujte přednosti většího počtu otvorů.

Vymysleli autoři seriálu.

Interferenční proužky

Správné řešení prvního úkolu se mohlo sestávat jen z pouhých dvou slov: hyperbola, kružnice. Úvaha pro první obrázek zní takto: Jelikož interferenční maximum vzniká v místech s konstantním rozdílem optických drah rovným celočíselnému násobku vlnové délky světla, vytvoří se kolem otvorů v prostoru plochy konstantního rozdílu mezi vzdálenostmi k jednomu a druhému otvoru. Podle analytické geometrie má hyperbolická plocha vlastnost, že rozdíl vzdáleností každého jejího bodu ke dvěma ohniskům je konstantní. To je přesně náš případ. Když tuto plochu nyní řízneme stínítkem, dostaneme hyperboly – hyperbolické proužky.

Pokud je to pro vás příliš abstraktní představa, sledujte následující konvenční postup: Zavedeme souřadnice (x, y, z) tak, že stínítko leží v rovině xy a osa z míří od něj směrem k desce s průhledy (vzdálené L) a prochází přímo mezi otvory. Osa x nechť je rovnoběžná se spojnicí otvorů, které jsou ve vzájemné vzdálenosti d. Bod na stínítku má proto souřadnice $\mathsf{A} = (x, y, 0)$, otvory v cloně $\mathsf{H}_{1,2} = (x \pm d/2, 0, L)$. Vzdálenosti $L_{1,2} \equiv |\mathsf{AH}_{1,2}|$ jsou podle zobecněné Pythagorovy věty

$$L_1 = |\mathsf{AH}_1| = \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}\,,$$

$$L_2 = |\mathsf{AH}_2| = \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Abychom dostali interferenční maximum, úplné konstruktivní složení světelných vln přicházejících z jednotlivých otvorů, musí platit

$$L_1 - L_2 = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

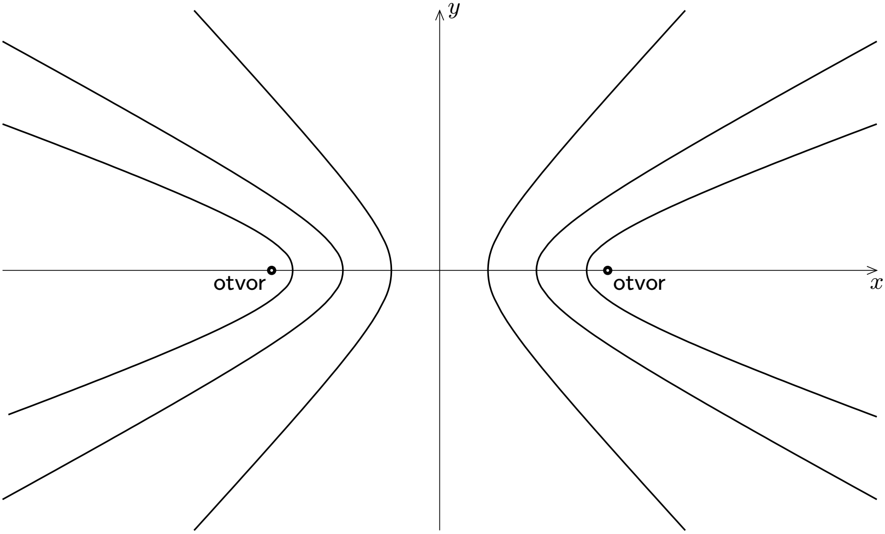
Dosadíme-li první dvě rovnice do této podmínky, vyjde po delší úpravě

$$x^2\left(\frac{d^2}{k^2\lambda^2}-1\right)-y^2=L^2-\frac{1}{4}\left(d^2+k^2\lambda^2\right)\,.$$

Pro typickou situaci $L \gg d \gg \lambda$ lze navíc vztah zjednodušit na

$$x^2\frac{d^2}{k^2\lambda^2}-y^2=L^2\,,$$

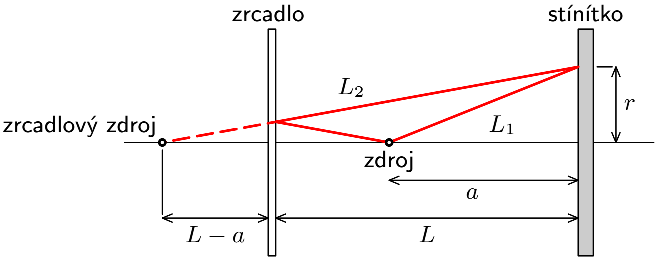
což je tvar rovnice hyperboly. Několik reprezentativních proužků je na obrázku 1.



Obr. 1. Interferenční proužky

V druhém případě si rotační symetrie vynucuje kruhové proužky. Pokud by nás opět zajímaly jejich přesné rozměry, postupovali bychom podobně jako v předchozím. Délky drah jsou (viz obrázek 2)

$$L_1=\sqrt{a^2+r^2}\,,$$
$$L_2=\sqrt{(2L-a)^2+r^2}\,.$$



Obr. 2. Porovnání délek drah paprsků

Aplikací podmínky $\delta \equiv L_2 - L_1 = (k + 1/2)\lambda$ (polovina vlnové délky odpovídá otočení fáze při odrazu o zrcadlo) dostaneme

$$r^2 = \frac{1}{4\delta^2}\left(4(L-a)^2 - \delta^2\right)\left(4L^2 - \delta^2\right) .$$

Pokud se bavíme o interferenčních kroužcích daleko od optické osy, členy δ^2 jsou zcela nesouměřitelné s členy úměrnými L^2. Proto je můžeme zanedbat a psát

$$r \approx \frac{2L}{\delta}(L-a) .$$

Blízko ose musíme ale použít přesný vztah; zjednodušený vzorec připouští libovolný dráhový rozdíl, z geometrie sestavy však víme, že maximální možný je $\delta_{\max} = 2(L-a) + \lambda/2$.

Young vs. Newton

Světlo se za každou štěrbinou rozptyluje díky difrakci do všech směrů. Intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti (protože počet „částic světla" na kulové vlnoploše o obsahu $4\pi r^2$ se zachovává) a kosinem dopadového úhlu (protože na nakloněnou rovinu dopadá světlo s menší plošnou hustotou než na rovinu kolmou ke směru šíření). Bod A na stínítku má délkovou souřadnici x, jeho vzdálenost od štěrbin je opět $L_{1,2} = \sqrt{L^2 + (x \pm d/2)^2}$, pro úhel dopadu $\vartheta_{1,2}$ paprsku z jedné a druhé štěrbiny platí

$$\operatorname{tg}\vartheta_{1,2} = \frac{1}{L}\left(x \pm \frac{d}{2}\right) .$$

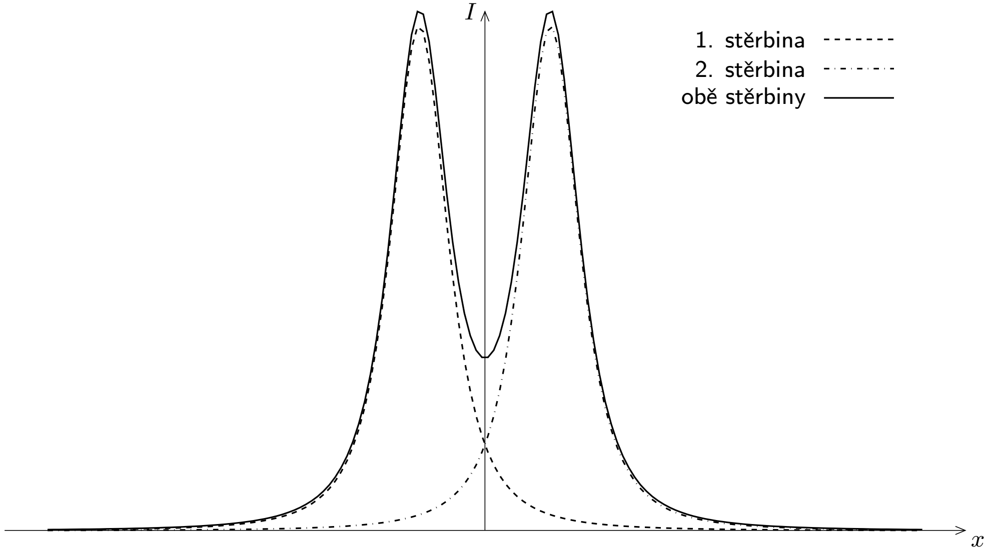
Z toho vyčíslíme potřebný kosinus,

$$\cos\vartheta_{1,2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2_{1,2}\vartheta} = \frac{L^2}{L^2 + \left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2} .$$

Výsledná intenzita je v newtonovském případě (skládá se až četnost dopadů „světelných částic", ne amplituda) rovna jednoduchému součtu intenzit od jednotlivých štěrbin,

$$I = \frac{I_0}{L_1^2}\cos\vartheta_1 + \frac{I_0}{L_2^2}\cos\vartheta_2 \sim \frac{1}{\left(L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right)^2} + \frac{1}{\left(L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right)^2} .$$

Graf je na obrázku 3. Z něj i ze získaného vzorce je zřejmé, že intenzita v každém bodě stínítka vzroste při otevření druhé štěrbiny.



Obr. 3. Intenzita světla po průchodu dvojštěrbinou

Světlo na čtyřštěrbině

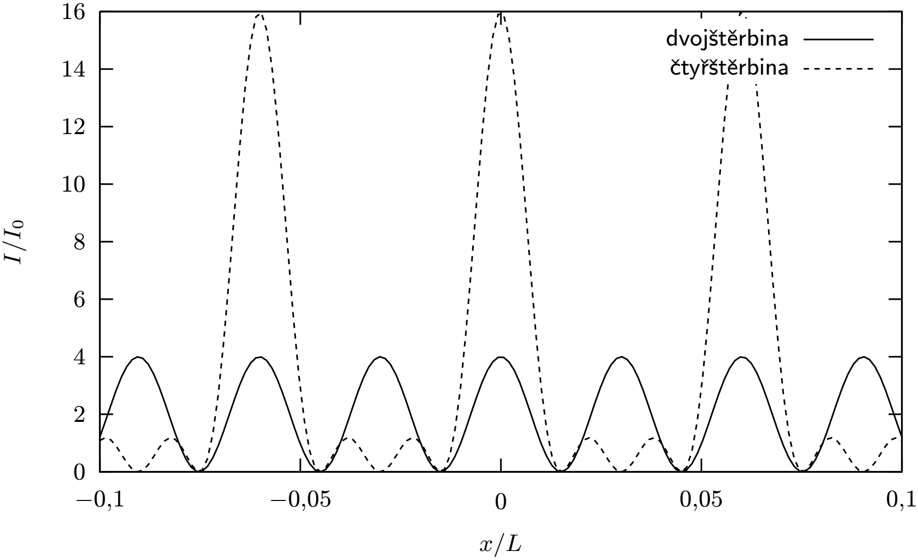
Amplituda pravděpodobnosti detekce elektronu v jistém bodě B stínítka je podle druhého dílu seriálu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1(x) + \cos\varphi_2(x) + \cos\varphi_3(x) + \cos\varphi_4(x) \\ \sin\varphi_1(x) + \sin\varphi_2(x) + \sin\varphi_3(x) + \sin\varphi_4(x) \end{pmatrix} ,$$

kde $\varphi_j(x)$ jsou fáze, s jakými takový foton dorazí do B od j-tého otvoru. Procesy „foton do B dorazí od otvoru j" jsou nerozlišitelné (výsledkem je vždycky stejná tečka na stínítku), takže proto sčítáme jednotlivé amplitudy. Představíme-li si takovou čtyřštěrbinu s průřezy vzdálenými o b od sebe, bude podle textu seriálu platit

$$\varphi_1(x) = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{L^2 + (x - 1{,}5\,b)^2} ,$$
$$\varphi_2(x) = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{L^2 + (x - 0{,}5\,b)^2} ,$$
$$\varphi_3(x) = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{L^2 + (x + 0{,}5\,b)^2} ,$$
$$\varphi_4(x) = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{L^2 + (x + 1{,}5\,b)^2} .$$

Vykreslíme-li druhou mocninu velikosti amplitudy, ideálně na počítači, dostaneme graf na obrázku 4 (čárkovaně). Spojitou čarou je vynesena analogická závislost pro dvojštěrbinu. Je zřetelně vidět, že u čtyřštěrbiny výrazných proužků ubylo (na polovinu) a jsou čtyřikrát jasnější. Obojí podstatně vylepšuje viditelnost jevu. Proto se v běžných difrakčních experimentech používají *difrakční mřížky* skládající se ze stovek až tisíců vrypů.



Obr. 4. Porovnání intenzit pro dvoj a čtyřštěrbinu

Jakub Benda
`jakub@fykos.mff.cuni.cz`