Řešení úloh 4. ročníku FYKOSího Fyziklání

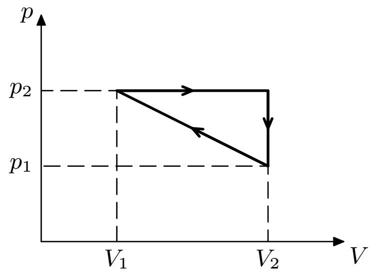
Úloha 1 ... *rychle do školy*

Lukáš pospíchá do školy, schody metra zdolává rychlostí sta schodů za minutu. Schod má výšku 30 cm. *Jak závisí výkon svalů na tom, zdali schody stojí nebo se pohybují? Zanedbáváme veškeré tření a jiné ztráty energie.*

Úlohu lze zodpovědět jednoduchým zamyšlením. Ať se děje co se děje, schody jsou pořád stejně vysoké a Lukáš je musí zdolat, nehledě na to, jestli jedou, nebo nejedou. Můžeme tedy na ně nahlížet, jako na inerciální soustavu. Jediné, na čem výkon v takové soustavě bude záviset, je rychlost chůze. Ta se však nijak nemění, tedy nemění se ani výkon.

Úloha 2 ... *nereálný motor*

Vypočtěte práci uvolněnou během jednoho pracovního cyklu znázorněného na obrázku. Uvažujte, že děj probíhá po směru hodinových ručiček.



Pokud budeme předpokládat, že na obrázku máme pouze rovnovážné děje, je výpočet práce jednoduchý. V ději jsou dvě části, kdy konáme práci a to z (p_2, V_1) do (p_2, V_2) a z (p_1, V_2) do (p_2, V_1). V první části bude práce vykonaná systémem $W_1 = p_2(V_2 - V_1)$, ve druhé budeme na systému konat práci

$$W_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) + p_1(V_2 - V_1)\,.$$

Celková práce tedy bude

$$W = W_1 - W_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)\,.$$

Nicméně je nutné podotknout, že práci můžeme počítat jako plochu pod křivkou v pV-diagramu jenom tehdy, když děje v něm zachycené jsou rovnovážné. A to je problém (efektivně) realizovat i u jednoduchých dějů jako izotermický, natož zde uvedený děj z (p_2, V_1) do (p_2, V_2). Vykonanou práci ale spolehlivě určíme z mechanických účinků, pokud je známe.

Úloha 3 ... *nemyslíš, zaplatíš*

Organizátoři jedou na soustředění, prší a silnice je kluzká. Jakou rychlostí mohou projet bez smyku zatáčku o poloměru 120 m, *pokud koeficient statického tření mezi koly a silnicí je jen* $f = 0{,}15$*? Fykosáci i s autem váží* 1,2 t. *Výsledek udejte v* km/h, *zaokrouhlete na celé číslo.*

Nechť R značí poloměr zatáčky a m hmotnost auta. Třecí síla velikosti mgf musí kompenzovat odstředivou sílu F_o, neboli jinak řečeno silnice díky tření působí na auto dostředivou silou. $F_\mathrm{o} = mv^2/R = mgf$, odtud $v = \sqrt{gfR} = 48\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 4 ... *OSA útočí*

Vosa se rozhodla vpravit všechen jed pod kůži otravného člověka. Musela bodnout sedmkrát a to ji při frekvenci $f = 0{,}75\,\mathrm{Hz}$ *dost vyčerpalo.*

a) Jakým tlakem propichuje kůži?
b) Jaký je její vosí výkon?
c) Kolik (mechanické) energie na 7 žihadel spotřebovala?

Kůže má tloušťku $d = 2\,\mathrm{mm}$, vosa s žihadlem plošky $S = 3 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}^2$ vyvine průměrnou sílu $F = 10^{-5}\,\mathrm{N}$. Předpokládejte, že práci koná pouze během vpichování.

Tlak je roven $p = F/S = 33\,\mathrm{GPa}$, práce vykonaná během jedonoho vpichu je $W_1 = Fd = 20\,\mathrm{nJ}$, odpovídající výkon je $P = W_1/t = fW_1 = 15\,\mathrm{nW}$, celková práce na sedm vpichů je $W = 7W_1 = 140\,\mathrm{nJ}$.

Úloha 5 ... *drtivý spad*

Jakou maximální teplotu může mít sněhová vločka na začátku pádu, pokud padá z výšky $l = 2{,}5\,\mathrm{km}$ a po dopadu na zem ani trochu neodtaje? Působení odporových sil a tepelnou výměnu s okolím zanedbejte. Měrná tepelná kapacita ledu budiž $c = 2100\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Odporové síly (pošetile) zanedbáme, takže použijeme zákona zachování mechanické energie. Energie při dopadu vločky je stejná jako ve výšce l a tato energie odpovídá teplu na (pouhé) ohřátí ledu.

Z kalorimetircké bilance a úprávou zjistíme

$$mgl = mc\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{gl}{c}\,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání vyjde $\Delta t \approx 12\,\mathrm{K}$, čemuž odpovídá teplota vločky $-12\,^\circ\mathrm{C}$.

Úloha 6 ... *hopskulka*

Děti o přestávce na chodbě o průřezu $2 \times 2\,\mathrm{m}$ nemají co dělat a háží si hopskulkou. Pak Terku napadne hodit hopskulku vší silou proti zdi. Kolikrát se hopskulka od zdi odrazí, než dopadne na zem? Hopskulka byla vyhozena z levého horního rohu chodby kolmo proti protější stěně rychlostí $v = 12\,\mathrm{m/s}$. Uvažujte, že se hopskulka odrazí dokonale pružně a pro její úhel odrazu platí totéž co pro úhel odrazu světla.

Rozeberme nejprve, jaký vliv má odraz od zdi na pohyb kuličky. Jak víme ze zadání, kulička se odráží jako světlo, tedy vodorovná složka rychosti změní své znaménko a svislá svou velikost nezmění.

Absolutní hodnota vodorovné složky rychosti je tedy konstantní a má velikost v. Svislá složka se s časem lineárně zvětšuje, neb jde o volný pád. Označme rozměry stěny l. Doba pádu kuličky na zem je

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\,.$$

Pro počet odrazů platí

$$N = \frac{v}{l}\sqrt{\frac{2l}{g}} = v\sqrt{\frac{2}{lg}} \doteq 3{,}83\,,$$

Výsledek musíme samozřejmě zaokrouhlit dolů, protože ke čtvrtému odrazu nedojde. Dojde nakonec pouze ke třem odrazům.

Úloha 7 ... *odporné kombinace*

Máme k dispozici tři rezistory o odporech $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ a $R_3 = 3\,\Omega$ a dostatečné množství ideálních vodičů nulového odporu. Vyjmenujte všechny možné kombinace celkových odporů, které můžete s těmito pomůckami sestavit. Není nutné použít vždy všechny odpory. (Pro rychlejší opravování je spočítejte a seřaďte od nejmenší hodnoty po největší.)

Pro n odporů zapojených do série platí

$$R_C = \sum_{i=1}^{n} R_i \,.$$

Pro n odporů zapojených paralelně platí

$$\frac{1}{R_C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \,.$$

Následně se pokusíme najít všechny možné různé kombinace, včetně těch obsahujících jeden, žádný nebo jen dva odpory. Těchto kombinací je sedmnáct různých.

Všech variant je 17; jmenovitě $0\,\Omega$, $\frac{6}{11}\,\Omega$, $\frac{2}{3}\,\Omega$, $\frac{3}{4}\,\Omega$, $\frac{5}{6}\,\Omega$, $1\,\Omega$, $\frac{6}{5}\Omega$, $\frac{4}{3}\Omega$, $\frac{3}{2}\Omega$, $2\,\Omega$, $\frac{11}{5}\,\Omega$, $\frac{11}{4}\,\Omega$, $3\,\Omega$, $\frac{11}{3}\,\Omega$, $4\,\Omega$, $5\,\Omega$ a $6\,\Omega$.

Úloha 8 … *reprák*

Marek si zapojil doma dva reproduktory. Do jednoho pustil zvuk o frekvenci 2010 Hz, *do druhého o frekvenci* 2014 Hz. *Jak se dalo čekat, uslyšel rázy. Jaká byla jejich perioda?*

Pro jednodušší výpočet uvažujme, že fázový rozdíl obou signálů je nula. Potom si oba signály o frekvencích f_1 a f_2 můžeme napsat jako sinovou vlnu

$$\sin(2\pi f_1 t) \qquad \text{a} \qquad \sin(2\pi f_2 t)\,.$$

Výsledný signál dostaneme jako součet těchto dvou vln. Upravíme jej podle vzorce pro součet dvou funkcí sinus

$$\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\sin\left(\frac{2\pi(f_1+f_2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi(f_1-f_2)t}{2}\right)\,.$$

Sinová část této vlny s frekvencí hodnoty aritmetického průměru je tón, který slyšíme a kosinová část je zodpovědná za jeho tlumení (rázy, zázněje). Její frekvence je $f = (f_1 - f_2)/2$. Ale to ještě není výsledek – ucho zaznamenává pouze absolutní hodnotu výchylky, takže frekvence bude dvojnásobná, tedy pouhý rozdíl frekvencí

$$f = f_1 - f_2 = 4\,\mathrm{Hz}\,.$$

A protože je otázka na periodu, výsledek je $T = 0{,}25\,\mathrm{s}$.

Úloha 9 … *ostřelovačská*

Střílíme ze vzduchovky hmotnosti $M = 5\,\mathrm{kg}$ *diabolku hmotnosti* $m_1 = 1\,\mathrm{g}$ *do malého vozíčku hmotnosti* $m_2 = 50\,\mathrm{g}$. *Po výstřelu nám vzduchovka narazí do ramene rychlostí* $v = 0{,}05\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Vzduchovka je od vozíčku vzdálená* $l = 5\,\mathrm{m}$. *Vozíček se po dokonale nepružné srážce, kdy v něm náboj uvízne, rozjede a po chvíli narazí do stěny, která je* $d = 3\,\mathrm{m}$ *od místa, odkud se rozjel. Jaký čas uběhne od výstřelu po náraz vozíčku do stěny? Odporové síly zanedbejte.*

Na vzduchovku při výstřelu nepůsobí žádné vnější síly, proto můžeme použitím zákona zachování hybnosti vypočítat rychlost střely po výstřelu

$$v_\mathrm{d} = v\frac{M}{m_1}\,.$$

Dále můžeme ze zákona zachování hybnosti vypočítat rychost vozíčku po zastavení střely

$$v_\mathrm{v} = v_\mathrm{d}\frac{m_1}{m_2+m_1} = v\frac{M}{m_1+m_2}\,.$$

Nyní již můžeme triviálně z definice rychlosti dopočítat celkový čas

$$T = t_1 + t_2 = \frac{l}{v_\mathrm{d}} + \frac{d}{v_\mathrm{v}} = \frac{lm_1 + d(m_1+m_2)}{Mv} \doteq 0{,}63\,\mathrm{s}\,.$$

Úloha 10 ... *dusíková zmrzlina*

Organizátoři si na soustředění chtěli udělat zmrzlinu. Bylo teplo a tak z kohoutku tekla jen voda o teplotě $t = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Od Pavla si ale vypůjčili $V = 1\,\mathrm{l}$ kapalného dusíku. Neuměli s ním ale mrazit jinak než litím do vody a tak jim všechen vypařený plyn hned utekl. Jakou hmotnost měl co nejtěžší kus ledu zmražený tímto dusíkem? Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tuhnutí vody $l_\mathrm{t} = 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$, měrné skupenské teplo varu dusíku je $l_\mathrm{v} = 198\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$, hustota kapalného dusíku je $\varrho = 809\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$

Nejprve se zamysleme, jak vodu mrazíme. V zadání není uvedena teplota kapalného dusíku (a také tam je, že páry dále nechladí), tudíž můžeme předpokládat, že teplo se bude spotřebovávat pouze při varu kapalného dusíku. Z toho již dokážeme sestavit kalorimetrickou rovnici s fázovým přechodem

$$mc\Delta t + ml_\mathrm{t} = \varrho V l_\mathrm{v}\,,$$

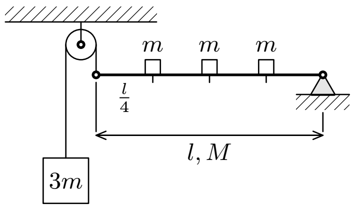
kde jsme rovnou už za hmotnost dusíku dosadili z jeho hustoty ϱ a objemu V. Rozdíl teplot je z teploty t na $0\,^\circ\mathrm{C}$. Z rovnice nyní vyjádříme hledanou hmotnost

$$m = \frac{\varrho V l_\mathrm{v}}{c\Delta t + l_\mathrm{t}}\,.$$

Po dosazení číselných údajů ze zadání vyjde $m \approx 0{,}38\,\mathrm{kg}$.

Úloha 11 ... *ekvilibrium*

Na obrázku vidíte soustavu, kde jsou tři závaží hmotnosti m rozmístěná na tyči délky l a hmotnosti M po jednom ve vzdálenostech $l/4$, $l/2$ a $3l/4$ od pravého okraje, kolem kterého se může tyč volně otáčet. Na druhém konci tyče je připevněna nit, na které přes zavěšenou kladku visí další závaží hmotnosti $3m$. Soustava je v rovnováze, nit i kladka jsou nehmotné. Jaké je m, jestliže $M = 2\,\mathrm{kg}$ a $l = 1\,\mathrm{m}$?



Pokud má být celá soustava v rovnováze, musí celkový součet momentů sil působících na tyč být nulový. Budeme jej počítat vzhledem k ose otáčení. V této konfiguraci je moment síly nulový.

$$0 = \tfrac{1}{4}lm + \tfrac{1}{2}lm + \tfrac{3}{4}lm - 3lm + \tfrac{1}{2}lM\,.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme

$$m = \frac{M}{3} = \frac{2}{3}\,\mathrm{kg}\,.$$

Úloha 12 ... *bungee*

Lukáš si chtěl dopřát adrenalinového zážitku a odhodlal se vyzkoušet bungee jumping. Váží $m = 80\,\mathrm{kg}$, skáče z mostu výšky $h = 40\,\mathrm{m}$ a lano má tuhost $k = 150\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Jak může být maximálně dlouhé lano, aby si Lukáš nerozbil nos o vodní hladinu?

Označme Δ maximální prodloužení lana při skoku a L délku lana. Aby Lukáš mohl vymýšlet další úlohy, musí platit

$$L + \Delta \leq h\,.$$

Předpokládejme, že pro prodloužení lana bude platit Hookův zákon. V tom případě bude energie lana při prodloužení Δ

$$E = \tfrac{1}{2}k\Delta^2\,.$$

V tomto okamžiku bude úbytek potenciální energie Lukáše roven

$$U = mg(L + \Delta)$$

a jeho kinetická energie bude nulová. Předpokládáme-li, že Lukáš měl na začátku skoku nulovou kinetickou energii, musí platit

$$\tfrac{1}{2}k\Delta^2 = mgh\,, \tag{1}$$

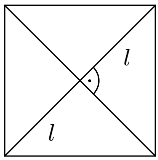
kde $L + \Delta = h$. Dosazením do rovnice (1), můžeme vyjádřit

$$\Delta = \sqrt{\frac{2mhg}{k}}\,,$$

a tudíž

$$L = h - \sqrt{\frac{2mhg}{k}} \doteq 19{,}54\,\mathrm{m}.$$

Úloha 13 ... ... *drát!*



Na mezinárodní vesmírné stanici stavěli kosmonauti anténu. Během dne na obvod pevných nosníků ve tvaru kříže s rameny délky $l = 4\,\mathrm{m}$ připevnili nenapnuté ocelové dráty o průměru $r = 3{,}5\,\mathrm{mm}$ (viz obrázek). Když ale vletěli do zemského stínu, rázem se o $50\,^\circ\mathrm{C}$ ochladilo a drát se napnul. Jaké je mechanické napětí v drátech? Youngův modul pružnosti oceli je $E = 220\,\mathrm{GPa}$, koeficient délkové roztažnosti oceli je $\beta = 0{,}012 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$.

Pokud ochladíme ocelový drát, zkrátí se. Vzhledem ke konfiguraci soustavy se musí drát napnout. Délka každého drátu je $l_0 = \sqrt{2}l$. Relativní zkrácení způsobené tepelným ochlazením, pokud by nebyly napnuty na konstrukci, je

$$\Delta l = l_0 \beta \Delta T\,.$$

Pro Youngův modul pružnosti platí $E\varepsilon = \sigma$, kde ε je relativní prodloužení a σ je hledané napětí. Dosazením získáme výsledek

$$\sigma = E\beta\Delta T \doteq 132\,\mathrm{MPa}\,.$$

Úloha 14 ... *pole*

Pod jakým úhlem máme začít přecházet pole, pokud má šířku $h = 50\,\mathrm{m}$, a my chceme co nejdříve dojít na rozhraní pole a louky do vzdálenosti $d = 200\,\mathrm{m}$ a dál pokračovat po něm. Rychlost pohybu po zoraném poli je $v_\mathrm{p} = 0{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, po louce jdeme rychlostí $v_\mathrm{l} = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jelikož se jedná o dvě prostředí, ve kterých máme danou rychlost pohybu a potřebujeme projít z jednoho bodu do druhého za co nejkratší čas, můžeme použít analogii se světlem, které si při přechodu z jednoho bodu do druhého vybere takovou dráhu, aby jeho optická dráha (odpovídající v našem případě času) byla co nejmenší. Použijeme Huygensův princip pro mezní úhel lomu

$$\sin\alpha = \frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{l}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{l}}\,.$$

Po dosazení číselný výsledek $\alpha = 0{,}2\,\mathrm{rad}$, Ke stejnému výsledku dojdeme, pokud si čas strávený pochodem vyjádříme pomocí vzdáleností a rychlostí, zderivujeme a položíme rovno nule.

Úloha 15 ... *záludný trojúhelník*

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní desky tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku vůči ose kolmé k desce a procházející těžištěm trojúhelníka. Deska má hmotnost m a odvěsny trojúhelníka jsou dlouhé a.

Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník je vlastně polovina desky tvaru čtverce o straně a. Moment setrvačnosti desky známe z tabulek. Obecně pro moment setrvačnosti desky s osou otáčení v těžišti platí

$$I = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2)\,,$$

kde a a b jsou strany desky. V našem případě $a = b$, tedy můžeme napsat

$$I = \tfrac{1}{6}ma^2\,.$$

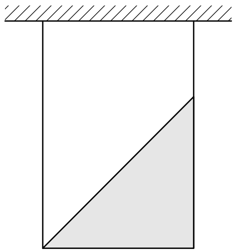
Pro posun osy otáčení použijeme Steinerovu větu

$$I = I_\mathsf{T} + mh^2\,,$$

kde I_T je moment setrvačnosti původního tělesa a h je vzdálenost uvažovaných rovnoběžných os. Dále je třeba si uvědomit o kolik se osa posune. Uhlopříčka čtverce má délku $\sqrt{2}$, poloha těžiště je, s připomenutím poučky o tom, že těžnice se v těžišti rozdělují v poměru 2:1, v jedné třetině jedné poloviny uhlopříčky. Potom

$$I = \tfrac{1}{6}ma^2 - m\left(\tfrac{\sqrt{2}}{6}a\right)^2 = \tfrac{1}{6}ma^2 - \tfrac{1}{18}ma^2 = \tfrac{1}{9}ma^2\,.$$

Úloha 16 ... *ještě záludnější trojúhelník*



Kovový výlisek tvaru trojúhelníku je zavěšen na dvou provázcích, jak vidíte na obrázku. Každý provázek sám o sobě unese maximálně 10 kg. *Kolik maximálně může vážit kovový trojúhelník, aby se nepřetrhl levý provázek?*

Na trojúhelník působí tíhová síla v těžišti. Abychom mohli učit, který provázek se přethne, budeme muset počítat její moment vůči závěsům. Jeho velikost závisí na kolmé vzdálenosti přímky, ve které leží působící síla, od těžiště (tzv. rameno síly). Pokud označíme vzdálenost mezi závěsy a, bude rameno síly pro levý závěs rovno $2a/3$ a pro pravý $a/3$, protože těžiště pravoúhlého trojúhelníka leží nad jeho odvěsnou ve třetině její délky. Z toho také mimo jiné plyne, že dříve praskne pravý závěs, protože moment tíhové síly vůči levému bude větší než vůči pravému.

Tedy, aby byl trojúhelník v rovnováze, musí být moment tíhové síly roven momentu síly F, kterou na trojúhelník působí pravý provázek.

$$Fa = \tfrac{2}{3}mga\,.$$

Když vyjádříme hmotnost m, přiblížíme se konečnému výsledku

$$m = \frac{3F}{2g}\,.$$

Protože provázek unese $10\,\mathrm{kg}$, je síla rovna $10\,\mathrm{g}$ a maximální možná hmotnost trojúhelníku je $15\,\mathrm{kg}$.

Úloha 17 ... *hmoťák*

Kation železa Fe^{3+}, který je původně v klidu, urychlíme v napětí $10\,\mathrm{kV}$. Takto urychlený vstupuje kation do magnetického pole velikosti $1\,\mathrm{T}$, jehož směr je kolmý na rychlost kationtu, a začne obíhat po kruhové dráze. Jaký je poloměr této kružnice?

Magnetické pole s indukcí $\boldsymbol{B}$ způsobuje zakřivení trajektorie Lorentzovou silou, závislou na náboji tělesa jeho rychlosti $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,,$$

kde symbol $\times$ představuje vektorový součin – zohlednění vzájemného směru rychlosti a magnetické indukce. V našem případě je rychlost na magnetickou indukci kolmá, tedy velikost Lorentzovy síly bude $F = qvB$.

Lorentzova síla zde působí jako dostředivá síla stáčející trajektorii, proto můžeme poloměr určit z rovnice

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad\Rightarrow\quad r = \frac{mv}{qB}\,.$$

Rychlost kationtu vypočítáme ze zákona zachování energie při urychlení napětím U

$$qU = \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\,.$$

Ještě nesmíme zapomenout, že iont má stupeň ionizace 3, tedy $q = 3e$, kde e je náboj elektronu. Vyjádříme výsledek z předchozí rovnice a číselně dosadíme

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{3e}} \approx 6{,}2\,\mathrm{cm}\,.$$

Úloha 18 ... *otočená tyč*

Dokonale tuhá tenká tyč se vodorovně otáčí (kolem osy procházející jejím těžištěm a současně kolmé na ní) s frekvencí $f_1 = 5\,\mathrm{Hz}$. Jak se změní její kinetická energie, pokud skokem přeneseme osu otáčení do jejího krajního bodu? Nemáte-li tabulky, budou se vám hodit hodnoty momentů setrvačnosti: $J_1 = ml^2/12$ (pro osu ve středu tyče) a $J_2 = ml^2/3$ (pro osu v krajním bodu). Tyč má hmotnost $m = 1\,\mathrm{kg}$ a délku $l = 2\,\mathrm{m}$.

Platí zákon zachování momentu hybnosti L, který říká, že moment hybnosti před změnou osy otáčení bude stejný jako po této změně. Z toho máme rovnici

$$L = J_1\omega_1 = J_2\omega_2\,.$$

Pro úhlovou frekvenci a frekvenci platí vztah $\omega = 2\pi f$. Odtud již můžeme určit frekvenci otáčení po změně osy otáčení

$$2\pi J_1 f_1 = 2\pi J_2 f_2 \quad\Rightarrow\quad f_2 = \frac{J_1}{J_2} f_1 = \frac{f_1}{4}\,.$$

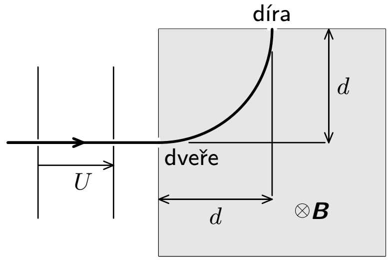
Pro kinetickou energii rotujícího tělesa, které má moment setrvačnosti J vůči ose rotace platí $E_\mathrm{k} = J\omega^2/2$. Rozdíl energie po a před proto je

$$\Delta E = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = 2\pi^2(J_2 f_2^2 - J_1 f_1^2) = -\frac{\pi^2}{8} m l^2 f_1^2 = -123\,\mathrm{J}\,.$$

Energie se sníží o $123\,\mathrm{J}$.

Úloha 19 ... *Faustova částice*

Pozitron upsal svůj náboj čertu. Moderní peklo unáší hříšníky interaktivně, a tak Mefistofeles připravil ve vedlejším pokoji homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B} = (0, -2\,\mathrm{T}, 0)$. Strop ve výšce $d = 2{,}4\,\mathrm{m}$ má ve vzdálenosti d ode dveří díru. Jakým napětím máme urychlit pozitron, aby vletěl do pasti a trefil se do díry ve stropu? Pozitron byl před urychlováním vystrašeně v klidu. (Pozitron je antičástice elektronu – takže má stejně velký náboj opačného znaménka a jeho hmotnost je stejná jako elektronu.)



Pozitron poletí, potom co vletí do magnetického pole, po kruhové dráze o poloměru d se středem v místě, kde končí stěna a začíná strop. Tento poloměr se nazývá Larmorův a platí pro něj

$$d = \frac{m_\mathrm{e} v}{eB}\,,$$

kde m_e je hmotnost elektronu (tedy i pozitronu), v je rychlost pozitronu a e je elementární náboj. Rychlost $v = deB/m_\mathrm{e}$ je po celou dobu pohybu stejná (pokud zanedbáme odporové síly) a je to rychlost, na kterou se urychlí pomocí napětí U. Pro kinetickou energii a energii, kterou získá urychlením v elektrickém poli, platí

$$\tfrac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2 = E_\mathrm{k} = E_\mathrm{e} = eU \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_\mathrm{e}}}\,.$$

Oba výrazy pro v dáme do rovnosti, a tím zjistíme potřebné napětí pro deportaci hříšné částice

$$\sqrt{\frac{2eU}{m_\mathrm{e}}} = \frac{deB}{m_\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{B^2 d^2 e}{2m_\mathrm{e}}\,.$$

Numericky po dosazení ($m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$) vyjde $U = 2{,}0\,\mathrm{TV}$.

Úloha 20 ... *garáž*

Bohatý podnikavec si koupil rychlé (opravdu rychlé) auto. Bohužel se mu nevešlo do garáže (byla moc krátká), která však měla vrata na obou stranách. Auto délky l proto rozjel na rychlost v, garáž měla délku L. Na jak dlouho se mu povede umístit auto do garáže?

Vlivem kontrakce délek se auto v soustavě spojené s garáží zkrátí na délku γl, kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Volné místo v garáži je potom $L - \gamma l$ a čas, za který auto toto volné místo projede, je $t = (L - l/\gamma)/v$.

Úloha 21 ... *drahá legrace*

Na experiment s cívkami studenti potřebovali vybíjet kondenzátor s co největší kapacitou. Mají k dispozici zdroj na $24\,\mathrm{kV}$ a deset kondenzátorů o kapacitě $50\,\mu\mathrm{F}$. Jak je mají zapojit a kolik je bude stát celé experimentování, potřebují-li pokus zopakovat aspoň pětkrát? Cena $1\,\mathrm{kWh}$ je vyjde na 3,50 Kč.

Kondenzátory zapojené do série si navzájem předávají informaci o velikosti náboje (mají na všech deskách velikostně stejný), a tím modulují napětí. Proto pro celkovou kapacitu platí

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n}\,, \qquad \frac{1}{C_\mathrm{celk}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\,.$$

Celková kapacita se tak snižuje. U paralelního zapojení naopak leží všechny kondenzátory ve stejném napětí, a proto platí

$$U = \frac{Q}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}\,, \qquad C_\mathrm{celk} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n\,.$$

Proto mají studenti pro zisk co největší kapacity zapojit všechny kondenzátory paralelně. Spotřeba elektřiny je spotřebou energie, která u celkového kondenzátoru kapacity nC je vyjádřena jako

$$E_\mathrm{celk} = \frac{nCU^2}{2} = 144\,\mathrm{kJ}\,.$$

Energii však potřebujeme v kWh, přičemž $1\,\mathrm{Wh} = 3600\,\mathrm{J}$, tedy $144\,\mathrm{kJ}$ odpovídá $0{,}04\,\mathrm{kWh}$. Nyní již není těžké dopočítat celkovou cenu energie pro pět opakování pokusu, $3{,}50\,[\mathrm{Kč/kWh}] \cdot 0{,}04\,[\mathrm{kWh}] \cdot 5 = 0{,}7\,[\mathrm{Kč}]$.

Úloha 22 ... *žirafa*

Máme dva koherentní bodové zdroje světla vzdálené od sebe $d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$. *Ve vzdálenosti* $L = 10\,\mathrm{cm}$ *za těmito zdroji je čtvercové stínítko o straně* $a = 20\,\mathrm{cm}$. *Kolik světlých interferenčních proužků (jejich maxim) bude celkem možné na stínítku pozorovat? Vlnová délka záření je* $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$. *Přímka procházející oběma zdroji je rovnoběžná s hranou stínítka a kolmice procházející středem čtverce půlí spojnici zdrojů.*

Stačí vypočítat, jak se liší dráhy paprsků od zdrojů při dopadu na hranu čtverce. Dráhový rozdíl paprsků na hraně čtverce je

$$\Delta = \sqrt{L^2 + \left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}d\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}d\right)^2} = 0{,}0707\,\mathrm{mm}\,.$$

Na tuto vzdálenost se vejde $\Delta/\lambda = 141,4$ vlnových délek, takže na jedné půlce stínítka bude 141 světlých proužků, jeden proužek přesně uprostřed stínítka a dalších 141 světlých proužků na druhé půlce stínítka, celkem 283 světlých proužků.

Úloha 23 ... *voscilace*

Máme dvě tyče spojené kloubem do tvaru písmene V, každá tyč má hmotnost $1\,\mathrm{kg}$ *a délku* $50\,\mathrm{cm}$. *Volné konce tyče spojíme pružinou tuhosti* $100\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. *Jaká je perioda kmitů tohoto písmene V, pokud je úhel mezi oběma tyčemi malý? Celý ansámbl je ve volném prostoru bez gravitace.*

Můžeme zapsat druhou větu impulsovou jako

$$J\varepsilon = -Fl\,;$$

pracujeme tedy vlastně s momentem síly způsobeným pružinou, kde k je tuhost pružiny, a vyjádříme tak sílu stlačení pružiny jako $-2kl\varphi$ (oboustranné stlačení vyjdařuje koeficient 2). Protože moment setrvačnosti je $J = ml^2/3$, stačí nám vyjádřit úhlovou rychlost

$$\omega \approx \sqrt{\frac{2kl^2}{J}} \approx \sqrt{\frac{6k}{m}} = 24{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$

Úloha 24 ... *jaká je de Broglie*

Každé volné částici (obecně hmotným objektům) je podle její hybnosti p *přiřazena de Broglieho vlna. Je to rovinná monochromatická vlna s vlnovou délkou* $\lambda = h/p$, *kde* h *je Planckova konstanta. Jaký je poměr těchto vlnových délek protonu s energií* $0{,}2\,\mathrm{MeV}$ *a střely s* $m = 1\,\mathrm{g}$ *o rychlostí* $v = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? *Uvažujte, že pro* $v \ll c$ *platí pro kinetickou energii* $E_\mathrm{k} = \frac{p^2}{2m}$

Nejprve určíme délku de Broglieho vlny protonu. Pro to budeme potřebovat hmotnost protonu, kterou najdeme v tabulkách ($m_\mathrm{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$). Vyjádříme hybnost z rovnice pro energii a dosadíme ji do rovnice pro de Broglieho vlnu

$$p = \sqrt{2mE_k} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\mathrm{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_\mathrm{p}E_\mathrm{k}}}\,.$$

Jediné, co je potřeba, je dosadit $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$, hodnoty pro proton a převést jednotky E_k (platí $1\,\mathrm{eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$) a vyjde $\lambda_\mathrm{p} = 6{,}4 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$.

Výpočet vlnové délky střely je ještě jednodušší – stačí si uvědomit, že $p = mv$ a dosadit hodnoty do vztahu

$$\lambda_\mathrm{s} = \frac{h}{mv} = 6{,}6 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{m}\,.$$

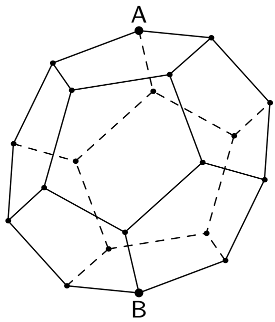
Poměr těchto délek tedy platí

$$k = \frac{\lambda_\mathrm{p}}{\lambda_\mathrm{s}} = \frac{mv}{\sqrt{2m_\mathrm{p}E_\mathrm{k}}} = 9{,}7 \cdot 10^{18}\,.$$

Pokud tedy opravdu poctivě vyjadřujeme a dosazujeme až ve výsledku, tak ani h nepotřebujeme znát, abychom odpověděli na otázku.

Úloha 25 ... *dvanáctistěn*

Vypočítejte odpor mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy drátěného modelu pravidelného dvanáctistěnu. Dráty jsou hrany tělesa, přičemž každá hrana má odpor $R = 1\,\Omega$. Pravidelný dvanáctistěn má stěny ve tvaru pravidelného pětiúhelníku.

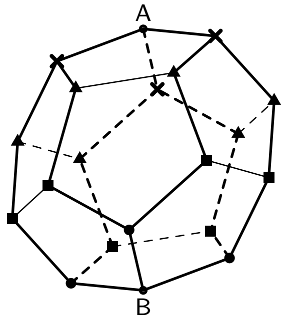


Dvanáctistěn

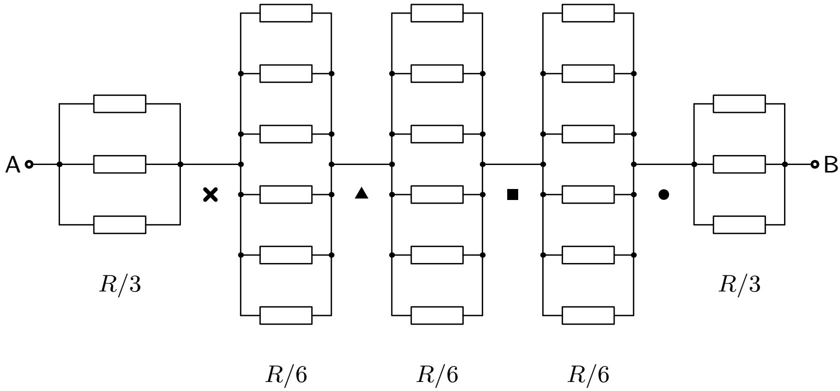
Na řešení odporových sítí se používá trik s hledáním míst na stejném potenciálu. Jsou-li totiž takováto dvě místa vodivě spojena, neteče mezi nimi proud a hranu, která je propojuje, můžeme při výpočtu úplně vynechat. Protože mají všechny hrany dvanáctistěnu stejný odpor, můžeme použít následující postup. Budeme k němu potřebovat pouze pastelky a prostorovou představivost (nebo obrázek ze zadání).

Označíme si vrchol, ze kterého vycházíme jednou barvou. Postupme z něj nyní po všech hranách, které z něj vychází, do sousedních vrcholů. Ty si vybarvíme jinou barvou. A postup opakujeme, aniž bychom přebarvovali jiné vrcholy, až dokud nedojdeme do vrcholu, který je protější k tomu, který jsme si vybrali prve. Stejnou barvou označené vrcholy jsou na stejném potenciálu, a jak jsme dříve řekli, hrany mezi nimi nemusíme brát v potaz. Teď již není problém síť překreslit, protože zbývající hrany jsou lehce představitelné.

Situace je naznačena na přiloženém obrázku. Vrcholy na stejném potenciálu jsou označeny stejnou značkou. Náhradní schéma zapojení odpovídá těmto značkám – hrany vcházející do vrcholů se stejnou značkou jsou představovány odpory jdoucími z takto označeného uzlu.



Výsledné schéma pak propočítáme pomocí známých vztahů pro paralelně a sériově zapojené odpory. Číselně vychází $R_{12} = 7R/6 = 7/6\,\Omega$.



Překreslený obvod

Úloha 26 ... *návrat slezských havířů*

Parta z dolu Fučík v Petřvaldě si po výletu na Nový Zéland zařídila dopravní společnost. Kopou přímé železniční tunely mezi dvěma libovolnými místy na zemském povrchu. Jak dlouho trvá vlaku cesta skrz tunel, není-li poháněn ničím jiným než tíhovou silou? Závisí tato doba na poloze ústí tunelu? Odporové síly zanedbejte.

Havíři mají zatím jen stroje pro ražení přímých vrtů, takže zkoumáme přímý tunel mezi dvěma místy na povrchu Země.

Může se to zdát zvláštní, ale gravitační síla masy Země „nad cestujícími“ je ve vlaku nulová. Na to se přijde snadno, pokud uvážíme jen nějakou tenkou slupku Země. Vezměme libovolný bod Ď uvnitř této slupky a použijme jej jako vrchol kuželové plochy (kužely se stejným vrcholovým úhlem, které mají oba špičku v tomto bodě a jdou na „opačné“ strany) s malým vrcholovým úhlem. Tato plocha ve slupce vyřízne dvě kružnice. Vzdálenosti středů těchto kružnic od bodu Ď a jejich poloměry označme pořadě $r_1, r_2, \varrho_1, \varrho_2$. Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \,.$$

Intenzity gravitačních polí od obou kotoučků mají opačný směr, takže kdybychom ukázali, že mají stejnou velikost, je (skoro) vyhráno. Intenzita gravitačního pole kotoučku je přímo úměrna jeho hmotnosti, která je (při homogenní hustotě) úměrná ϱ_i^2 a nepřímo úměrná r_i^2. S využitím podobnosti trojúhelníků pak už máme, že ona intenzita gravitačního pole od slupky (tedy i všech vzdálenějších slupek) je nulová.

Označme nyní r vzdálenost vlaku od středu Země a x vzdálenost vlaku od středu tunelu. Pro pohyb vlaku (o hmotnosti m) je důležitá především složka gravitační síly ve směru tunelu a její velikost je

$$F = F_G \frac{x}{r} = \frac{\varkappa m}{r^2} \frac{M r^3}{R^3} \frac{x}{r} = \frac{\varkappa m M}{R^3} x = \frac{g}{R} m x,$$

kde M je hmotnost Země, R její poloměr, $\varkappa$ gravitační konstanta a pro zjednodušení g je gravitační zrychlení na povrchu Země.

Sestavíme-li pohybovou rovnici pro vlak

$$-m \frac{g}{R} x = m \ddot{x} \,,$$

zjistíme, že je to pohybová rovnice harmonických kmitů s periodou

$$2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Vlak se na druhý konec tunelu dostane za polovinu periody $t = \pi\sqrt{R/g} \doteq 42\,\mathrm{min}$.

Úloha 27 ... *Fe Guevara*

Jádro železa ^{57}*Fe emituje* γ *kvantum o energii* $14{,}4\,\mathrm{keV}$. *V důsledku zpětného rázu ale celý atom železa „odskočí“ opačným směrem. Jakou kinetickou energii atom zpětným rázem získá? Napovíme, že pro klidovou hmotnost protonu i neutronu lze vzít hodnotu* $939\,\mathrm{MeV}/c^2$. *Výsledek uveďte v elektronvoltech.*

Značíme-li energii vyzářeného fotonu E_γ, potom je jeho hybnost

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}\,,$$

kde c je rychlost světla. Díky zákonu zachování hybnosti bude mít odražený atom hybnost stejnou. Jeho kinetická energii bude tedy rovna

$$E = \frac{{p_\gamma}^2}{2M} = \frac{{E_\gamma}^2}{2Mc^2}\,,$$

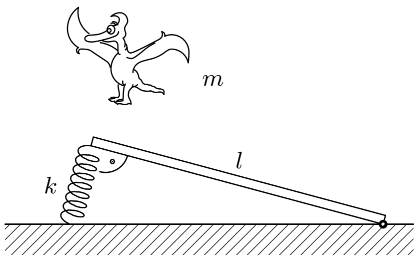
přičemž M je hmotnost atomu.

Jádro ^{57}Fe obsahuje 31 neutronů a 26 protonů. Jeho klidová hmotnost bude tedy $M = 57m_\mathrm{p}$, je-li m_p klidová hmotnost protonu. Dosazením získáme výsledek

$$E = 1{,}94\,\mathrm{meV}\,.$$

Úloha 28 ... *skákající pterodaktyl*

Pták Fykosák se rozhodne vyzkoušet skokanský můstek. Ten je $l = 2\,\mathrm{m}$ *dlouhý homogenní o hmotnosti* $M = 2\,\mathrm{kg}$ *na jedné straně podepřen pružinou o tuhosti* $k = 1000\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ *a na druhé je volně upevněn do čepu (viz obrázek). Předpokládejte, že moment setrvačnosti můstku je stejný jako moment homogenní tyče. Fykosákův skok vyvolá kmity pružiny s malou výchylkou. Určete periodu kmitů. Pták Fykosák váží* $m = 10\,\mathrm{kg}$.



Udělejme nejprve rozbor sil působících na konec desky. Použijeme druhé impulsové věty, vzdálenost x měříme směrem vzhůru. Tedy

$$-kxl = J\varepsilon\,,$$

kde ε je úhlové zrychlení můstku. Pro malé výchylky platí $x = l\varphi$, kde φ je úhel mezi můstkem a zemí. Dosazením a úpravou dostáváme

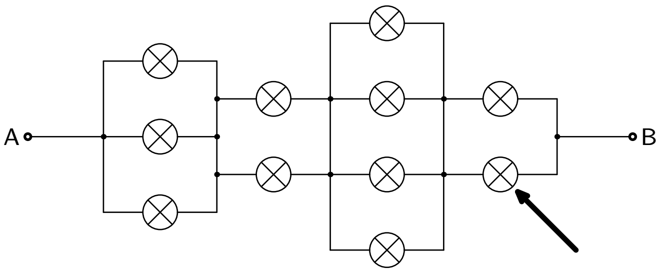
$$J\varepsilon + kl^2\varphi = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{kl^2\varphi}{J} = 0\,,$$

což je rovnice harmonického oscilátoru s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{kl^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{12k}} \doteq 81{,}1\,\mathrm{ms}\,.$$

Úloha 29 . . . *blik*

Na obrázku vidíte obvod, který je připojen k velmi neposlehlivému zdroji s proměnlivým napětím. Pravděpodobnost, že se žárovičce přepálí vlákénko při průchodu proudu je p (a jsou tak vhodně zapojené, že je pro všechny stejná). Spočtěte pravděpodobnost, s jakou se rozsvítí označená žárovka (viz obrázek) z obvodu při sepnutí spínače. Předpokládejte, že se vlákna přepálí okamžitě po sepnutí vypínače a potom už žárovky zůstanou svítit.



Pravděpodobnostní obvod

Označme si pravděpodobnost toho, že se vlákno nepřepálí $q = 1 - p$. Jinak také můžeme pravděpodobnost p interpretovat tak, že se daná větev obvodu přeruší (nepoteče skrz ni proud) a q symbolizuje pravděpodobnost, že proud obvodem poteče. Pravděpodobnost toho, že se stane jedno, nebo druhé je 1 (jistý jev).

Pokud máme na určitém úseku obvodu zapojeno n žárovek paralelně, tak pravděpodobnost toho, že se všechny přepálí a proud nepoteče je $p_n = p^n$. Naopak pokud je v určitém úseku zapojeno sériově m žárovek, tak pravděpodobnost funkčního obvodu je $q_m = q^m$.

Konečně konkrétně k našemu obvodu – máme zapojeno (zleva) za sebou nejprve tři žárovky paralelně, pak dvě žárovky paralelně, čtyři žárovky paralelně a nakonec jednu (druhá paralelně nás pro výpočet vůbec nezajímá, protože nemůže ovlivnit rozsvícení žárovky). Pravděpodobnosti, že tyto jednotlivé části průchozí pro proud jsou po řadě $(1 - p^3)$, $(1 - p^2)$, $(1 - p^4)$ a $(1 - p)$. Celková pravděpodobnost rozsvícení zvýrazněné žárovky bude tedy

$$P = (1 - p^3)(1 - p^2)(1 - p^4)(1 - p) = \\ = \prod_{k=1}^{4}(1 - p^k) = 1 - p - p^2 + 2p^5 - p^8 - p^9 + p^{10}\,.$$

Pokud bychom věděli, že pravděpodobnost přepálení žárovky je relativně nízká, pak by stačilo uvažovat $P \approx 1 - p - p^2$, což ovšem pro $p \to 1^-$ neplatí. Na závěr například pro $p = 0{,}1$ je $P \doteq 89\,\%$.

Úloha 30 ... *nabité korále*

Na obvodu kružnice o poloměru R jsou rovnoměrně rozmístěné elektrony jejichž souhrnný náboj je Q.

a) *Jaká je hodnota intenzity a potenciálu elektrického pole ve středu kružnice, pokud potenciál v nekonečnu je nulový?*
b) *Jak se změní výsledek, pokud stejný počet elektronů opět rovnoměrně rozmístíme pouze po čtvrtinovém oblouku?*

a) Ze symetrie plyne, že intenzita elektrického pole ve středu kružnice je nulová. Potenciál bude součtem příspěvků od každého jednotlivého náboje, jelikož příspěvky všech nábojů na kružnici jsou shodné, bude potenciál ve středu kružnice jednoduše

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

b) Potenciál v tomto případě je stejný jako v případě a) – celkový náboj Q se nezměnil. Intenzitu pole spočteme jako

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,,$$

kde integrál zohledňuje skutečnost, že síla působící z každé části oblouku se projeví jen svým průmětem do směru výsledné síly.

Úloha 31 ... *koktejl*

Mějme válcovou sklenici o výšce h a poloměru $\frac{h}{2}$. Ve sklenici je voda s podezřelou kostkou o hustotě ϱ_s a hranou strany $h/3$. Hladina vody je ve výšce $9h/10$. Pokud sklenici přikryjeme pokličkou a tudíž kostku zatlačíme dovnitř, o kolik se zvedne hladina vody? Pro jaké ϱ_s hladina vystoupá až na úroveň pokličky? Hustota vody je ϱ_l.

Nejprve použijme Archimédův zákon na spočítání, jak velká část krychle je ponořena. Výšku ponořené části označme d. Platí tudíž, že

$$\tfrac{1}{27}h^3\varrho_\mathrm{s}g = \tfrac{1}{9}h^2 d\varrho_\mathrm{l}g,$$

a tudíž

$$d = \frac{h\varrho_\mathrm{s}}{3\varrho_\mathrm{l}}\,.$$

Označme s výšku té části krychle, která je nad okrajem. Jednoduchým odečítáním dostáváme, že

$$s = \left(\frac{7}{30} - \frac{\varrho_\mathrm{s}}{3\varrho_\mathrm{l}}\right)h\,.$$

Výšku hladiny vody po stlačení h_n dostáváme z rovnosti objemů vyjádřených pomocí h a pomocí h_n.

$$\tfrac{9}{40}\pi h^3 + \tfrac{1}{9}h^2 s = \tfrac{1}{4}h_\mathrm{n}\pi h^2\,.$$

Jednoduchou algebrou se dostáváme k výsledku

$$h_{\mathrm{n}} - \frac{9}{10}h = \frac{28\varrho_{\mathrm{l}} - 40\varrho_{\mathrm{s}}}{270\pi\,\varrho_{\mathrm{l}}}\,h\,.$$

Pro žádné ϱ_{s} se voda nemůže dostat až k pokličce. Stačí například porovnat objem kostky a objem ve sklenici neobsazený vodou.

Úloha 32 ... *nejhorší ze všeho jsou trpaslíci*

Systém dvou okolo sebe obíhajících trpaslíků, červeného a hnědého, má periodu $T = 10{,}5\,\mathrm{let}$. *Vzdálenost obou těles se jeví jako* $q = 0{,}14''$ *a paralaxa soustavy je* $p = 0{,}08''$. *Vypočítejte hmotnost* M *červeného trpaslíka, jestliže je podstatně větší než hnědého.*

Nejprve určíme pomocí paralaxy soustavy vzdálenost soustavy trpaslíků od Slunce. To provedeme jednoduchým přepočítávacím vztahem nalezeným v tabulkách

$$\frac{d}{1\,\mathrm{pc}} = \frac{1''}{p} \qquad \Rightarrow \qquad d = 12{,}5\,\mathrm{pc}\,.$$

Velkou poloosu složek dvojhvězdy určíme ze vzdálenosti a z q. Do mezivýpočtů se ovšem bude víc hodit znát q v radiánech, kteréžto označíme $q_{\mathrm{r}} = 6{,}79 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad}$. Jest

$$\frac{a/2}{d} = \operatorname{tg}\frac{q_{\mathrm{r}}}{2} \approx \frac{q_{\mathrm{r}}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = dq_{\mathrm{r}} = 8{,}49 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{pc} = 1{,}75\,\mathrm{AU}\,.$$

V tabulkách pro střední školy je uveden vztah, který přibližně platí pro tělesa ve Sluneční soustavě

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{4\pi^2}\,,$$

kde M_{S} je hmotnost Slunce a $\varkappa$ je gravitační konstanta. Přibližný je, protože zanedbává hmotnost tělesa, které Slunce obíhá – což v případě, že se jedná o těleso, které má o několik (i desítek) řádů menší hmotnost než Slunce výsledek znatelně neovlivní. Ovšem v našem případě budeme uvažovat, že trpaslíci obíhají kolem jejich společného těžiště s hmotností M – tato hmotnost je hmotností celé soustavy.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa M}{4\pi^2}\,.$$

Pokud ovšem chceme dosadit za a v AU a za T v letech, tak můžeme dosadit do $M = a^3/T^2$, a vyjde nám hmotnost soustavy v jednotkách hmotností Slunce. Výsledek je $M = 0,05M_{\mathrm{S}} \doteq 9{,}7 \cdot 10^{28}\,\mathrm{kg}$.

Úloha 33 ... *tenisový míček*

Tenisový míček jsme hodili z okna a náraz jsme zaslechli za čas 5 sekund. *Jakou měl míček barvu? (Uveďte hodnotu* $\lambda/\lambda_0 - 1$*). Rychlost zvuku značte* v.

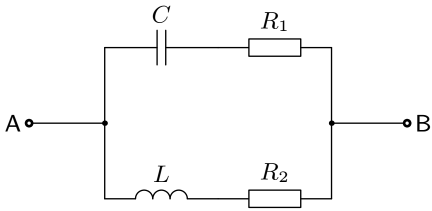
Označme rychlost zvuku v. Celkový čas slyšení t se skládá z času t_1, kdy míček volně padal, a času t_2, kdy zvuk putoval od místa dopadu zpět k nám. Pro výšku okna s platí známý vzorec pro volný pád $s = gt_1^2/2$ a pro šíření ještě známější $t_2 = s/v$. Vztah $t = t_1 + t_2$ je kvadratická rovnice pro veličinu $\sqrt{s}$. Pro rychlost dopadu platí $v_{\mathrm{d}} = \sqrt{2gs}$, kam dosadíme řešení kvadratické rovnice. Tak dostaneme $v_{\mathrm{d}} = \sqrt{v^2 + 2tgv} - v$. Teď si už stačí vzpomenout na Dopplerův vzorec

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{c + v_d}{c - v_d}} \approx 1 + \frac{v_d}{c}\,,$$

takže se hledaný výraz rovná $\left(\sqrt{v^2 + 2tgv} - v\right)/c$.

Úloha 34 ... *frekvenční výhybka*

Určete vztah, který musí platit mezi hodnotami součástek, aby impedance mezi svorkami A *a* B *obvodu byla reálná a frekvenčně nezávislá. Platí* $R_1 = R_2 = R$.



Impedanci obvodu určíme jako paralelní kombinaci sériových kombinací L a R, resp. C a R.

$$Z = \frac{(R + \mathrm{i}\omega L)\left(R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}\right)}{R + \mathrm{i}\omega L + R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + \mathrm{i}R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{2R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} .$$

Čitatel i jmenovatel zlomku jsou komplexní a závisí na úhlové frekvenci ω. Takovýto podíl je reálný tehdy, pokud je čitatel reálným násobkem jmenovatele, resp. pokud je podíl reálných částí čitetele a jmenovatele roven podílu jejich imaginárních částí.

$$\frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R} = \frac{R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R} = R\,.$$

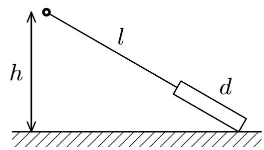
Úpravou výrazu získáme výsledek

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Budou-li hodnoty součástek v zapojení odpovídat tomuto výslednému vztahu, pak výsledná impedance celého zapojení bude rovna právě R.

Úloha 35 ... *vozík*

Na pevném závěsu ve výšce $h = 1\,\mathrm{m}$ *nad zemí je upevněn provázek délky* $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$. *Na konci provázku je přivázána deska délky* $d = 0{,}5\,\mathrm{m}$ *tak, že provázek je napnut a spolu s deskou leží v jedné přímce (viz obrázek). Když soustavu uvolníme, deska nejprve po hraně klouže bez tření, dokud nedopadne celou svou délkou na zem. Potom se pohybuje proti třecí síle s koeficientem smykového tření* f. *Spočítejte, jaká musí být jeho hodnota, aby deska svým bližším koncem doklouzala přesně pod závěs.*



Tato úloha bude zadána v 5. sérii FYKOSu. Pošlete-li nám její řešení na adresu uvedenou na poslední stránce, zařadíme vás do výsledkové listiny a máte možnost vyhrát hodnotné ceny!

Úloha 36 ... *měření rychlosti*

Osobní automobil o hmotnosti $m = 0{,}9\,\mathrm{t}$ jede po dálnici rychlostí nebezpečně se blížící nejvyšší povolené rychlosti. Předpokládejme, že jeho polohu jsme schopni změřit nejlíp na milimetr přesně. S jakou nejvyšší přesností bychom pak teoreticky mohli změřit jeho rychlost, pokud bychom na to měli ideální přístroj?

Chtěli bychom měřit co nejpřesněji dva jevy – polohu a rychlost. Ale Heisenbergův princip neurčitosti nám říká, že pro jednu částici, resp. těleso nemůžeme určit např. polohu a hybnost současně s nekonečnou přesností. Auto ze zadání má hmotnost m a hybnost p. Změříme-li jeho polohu s neurčitostí Δx a současně určíme ze vztahu $\Delta p = m\Delta v$ jeho hybnost ve stejném směru, pak podle Heisenbergova principu neurčitosti platí

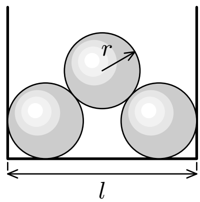
$$\Delta p\,\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}\,,$$

kde $\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ je redukovaná Planckova konstanta. Numericky tak vychází přesnost měření rychlosti auta na

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \approx 6 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Úloha 37 ... *pétanque*

V krabici o šířce $2r$ a délce $2r < l < 3r$ jsou tři koule o poloměru r a hmotnosti m. Dvě koule jsou na dně a třetí stabilně sedí mezi nimi (viz obrázek). Jakou silou působí spodní koule na boční stěny nádoby? Mezi koulemi ani krabicí nedochází k žádnému tření.



Celý systém je v rovnováze a tudíž vešekeré síly působící na každou kouli se musí odečíst. Na horní kouli působí gravitační síla rovna mg. Tu vyrovnávají síly F působící mezi dotykem horní koule s dolními. Úhel mezi touto silou a silou gravitační označme ϑ. Díky rovnováze musí platit

$$2F\cos\vartheta = mg\,.$$

Ze síly F nás však zajímá jen část F_b, která působí na boční stěnu. Zřejmě platí

$$\sin\vartheta = \frac{F_\mathrm{b}}{F}\,.$$

Jednoduchými úpravami obou vztahů dostáváme

$$F_\mathrm{b} = \frac{mg}{2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,.$$

Z geometrie vidíme, že

$$\sin\vartheta = \frac{\frac{1}{2}l - r}{2r}\,.$$

Za pomoci vztahu $\mathrm{tg}\,\vartheta = \sin\vartheta/\sqrt{1-\sin^2\vartheta}$ vyjádříme výsledek

$$F_\mathrm{b} = \frac{mg}{2}\,\frac{\dfrac{l}{4r} - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{l}{4r} - \dfrac{1}{2}\right)^2}}\,.$$

Úloha 38 ... *tuhé péro*

Ve vesmíru se vznáší pružina. Když na každý její konec připevníme kouli o hmotnosti $m = 2\,\mathrm{kg}$, pružina kmitá s frekvencí $f = 4\,\mathrm{Hz}$. S jakou frekvencí bude pružina kmitat, když na jednom konci bude koule hmotnosti m a na druhém hmotnosti $2m = 4\,\mathrm{kg}$?

Je třeba si problém převést na problém jednoho tělesa, které bude mít redukovanou hmotnost $m' = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Z původní frekvence při $m' = m/2$ určíme tuhost pružiny $k = 2\pi^2 f^2 m$ a z této tuhosti při jiných hmotnostech vypočítáme i druhou frekvenci jako

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'_2}} = \frac{\sqrt{3}f}{2} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{Hz}\,.$$

(Redukovaná hmotnost $m'_2 = 2m^2/3m$.)

Úloha 39 ... *všechno lítá*

Jaký musí být dráhový rozdíl mezi spodní a horní stranou křídla, pokud letadlo o hmotnosti $M = 1\,\mathrm{kg}$, rozpětí $R = 2\,\mathrm{m}$ a hloubce křídla $D = 0{,}2\,\mathrm{m}$ letí vodorovně rychlostí $v = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Obtékání křídla považujeme za laminární. Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Modelujme křídlo s plochou spodní stranou, podél níž proudí vzduch stejnou rychlostí jako letí letadlo, označme ji v. V tomto jednoduchém modelu předpokládejme, že částice vzduchu obletí spodní i horní stranu křídla za stejný čas, aby se na konci zase „setkali“ – to vlastně znamená, že se na žádné straně křídla nehromadí vzduch.

Hloubka křídla ať je D a dráhový rozdíl Δ, potom poměr mezi rychlostí vzduchu podél horní strany a podél dolní strany je

$$\frac{D + \Delta}{D}\,.$$

Dále rozdíl tlaků na horní a dolní stranu křídla musí být dostatečný, aby jím vyvolaná síla udržela letadlo ve vzduchu. Použitím Bernoulliho rovnice obdržíme zásadní vztah

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\varrho\left(v'^2 - v^2\right)\,,$$

$$\frac{Mg}{RD} = \frac{1}{2}\varrho v^2 \frac{2D\Delta + \Delta^2}{D^2}\,.$$

Zjištění dráhového rozdílu Δ je nyní jen otázkou vyřešení kvadratické rovnice (a počítáme kladné řešení, jelikož chcem, aby křídlo „táhlo“ nahoru)

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\varrho v^2}{D}\Delta^2 + \varrho v^2 \Delta - \frac{Mg}{R}\,.$$

Zaveďme substituci pro redukovanou kinetickou energii vzduchu $A = \varrho v^2/2$ a plošné zatížení křídla $B = Mg/RD$.

Řešení rovnice nyní získá pěkný tvar

$$\Delta = D\left(\sqrt{1 + \frac{B}{A}} - 1\right)\,.$$

Pro hustotu vzduchu $1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a rychlost letu $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ vychází rozdíl delék hran $\Delta \approx 5\,\mathrm{cm}$.

Úloha 40 ... *havárie*

Z pohybující se cisterny začne pod úhlem α vytékat tekutina rychlostí u vůči cisterně. Nalezněte závislost rychlosti cisterny na čase, je-li plocha otvoru S, ϱ hustota kapaliny, počáteční rychlost cisterny v_0 a hmotnost M.

Nejprve se zabývejme tím, jaká síla na cisternu působí. Podle zákona zachování hybnosti je změna hybnosti cistery do velikostí stejná jako hybnost odteklé tekutiny, tedy za malý časový úsek máme

$$\mathrm{d}p = u\,\mathrm{d}m = u^2 S\varrho \cos\alpha\,\mathrm{d}t\,,$$

kde S je plocha výtokového otvoru a ϱ je hustota kapaliny.

Na cisternu tedy působí konstantní síla

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = u^2 S\varrho\cos\alpha\,.$$

Abychom zjistili závislost rychlosti cisterny na čase, použijeme druhý Newtonův zákon $F = m\dot{v}$.

Protože z cisterny tekutina odtéká rovnoměrně, lze okamžitou hmotnost cisterny zapsat jako

$$m = M - uS\varrho t\,.$$

Musíme tedy vyřešit jednoduchou diferenciální rovnici

$$\dot{v} = \frac{u^2 S\varrho\cos\alpha}{M - uS\varrho t}\,.$$

Separací proměnných a využitím počáteční podmínky $v(0) = v_0$ získáme výsledný vztah pro rychlost

$$v = v_0 + u\cos\alpha\log\left(\frac{M}{M - uS\varrho t}\right)\,.$$

Zdůrazněme, že uvedený vztah platí jen pro cisternu se zanedbatelně malou hmotností a pro časy, kdy je v cisterně ještě nějaká tekutina.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.