

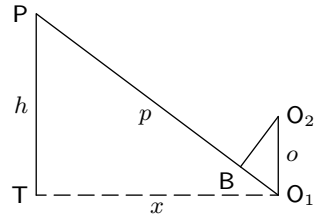
23. ročník, úloha VI. 2 ... šmírák Honza (3 body; průměr 2,33; řešilo 9 studentů)

Honza stojí na Žižkovské věži a hledí lidem do oken. Okna jsou všechna namířena k němu, mají stejnou velikost a jsou ve stejné výšce od země. V jak vzdáleném okruhu mají nejméně soukromí? Honza nemá dalekohled. *Panorama Prahy studoval Honza Prachař.*

Předpokládáme, že Honza bude za míru uspokojení brát úhlový průměr φ sledovaného objektu. (Někteří řešitelé sice uvažovali změnu intenzity světla, které prochází oknem; i pokud by vše správně spočítali, zapomněli, že oko se výkyvům intenzity přizpůsobuje velice snadno.)

Označme (viz obrázek) O_1 spodní hranu okna, O_2 horní hranu okna, P pozorovací místo na věži, T místo na věži, které je ve stejné výšce jako O_1 .

Pokud navíc označíme B patu výšky na stranu O_1P , platí, že trojúhelníky TO_1P a BO_2O_1 jsou si podobné. Pak lze ale už psát, s označením $|O_1O_2| = o$, $|PT| = h$, $|TO_1| = x$ a přeponou $|PO_1| = p$,



Obr. 1. Schéma situace

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|O_2B|}{|BP|} = \frac{\frac{x o}{p}}{p - \frac{o h}{p}} = \frac{x o}{x^2 + h^2 - o h}.$$

Protože tangens je prostá a rostoucí, stačí hledat maximum vnitřní funkce $\operatorname{tg} \varphi(x)$. Zkuste si nakreslit graf funkce $f(x) = x/(x^2 + a^2)$. Uvažujme vodorovnou přímku C , která se právě dotýká $f(x)$ v maximum. Pak dostaneme rovnici $f(x) = C$, neboli kvadratickou rovnici

$$Cx^2 - x + Ca^2 = 0,$$

která musí mít právě jeden kořen, takže její diskriminant $D = 1 - 4C^2a^2$ musí zmizet. Proto $C = \pm 1/2a$ a rovnici řeší $x = 1/2C = a$ (záporný kořen je minimum). Úhlový průměr má tedy maximum pro okna ve vzdálenosti $x = a = \sqrt{h(h - o)}$.

Jakub Michálek

jmi@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.