

Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou zadání druhé série svého oblíbeného Fyzikálního korespondenčního semináře. Doufáme, že se vám naše úlohy budou líbit a pošlete nám svá řešení, na která již nyní netrpělivě čekáme.

Rádi bychom vás také všechny pozvali na *Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy*, který se uskuteční ve čtvrtek 2. prosince. Bližší informace najdete na adrese <http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/>. Na DODU se také budete moci setkat s organizátory FYKOSu a bude k dostání i ročenka 23. ročníku.

Aktuální dění v semináři sledujte na stránkách <http://fykos.cz/>, kde naleznete zadání a řešení všech úloh, aktuální pořadí, videoseriál, diskuzní fórum a rovněž zde můžete uploadovat své soubory s řešením.

Přejeme vám spoustu krásných chvil nad úlohami FYKOSu a těšíme se s vámi na viděnou na podzimním soustředění.

Formát řešení

V první sérii se nám sešlo mnoho různých formátů vašich řešení, ať již psaných rukou, nebo na počítači. Prohlížení některých z nich nám místy činí potíže, proto bychom vás rádi seznámili s našimi preferencemi.

Správná hlavička řešení se vyskytuje na každém papíře a obsahuje tyto informace: Jméno a příjmení, číslo úlohy, počet listů, které tato úloha zabírá, a školu. Důležité je pro nás zejména jméno, příjmení a číslo úlohy a to i pokud řešení posíláte elektronicky.

Hlavička může vypadat například takto (zdrojový kód ve formátu L^AT_EX najdete na <http://fykos.cz/>):

Student Pilný, MFF UK**Úloha II – 1**

Nemusíte vypisovat celou adresu školy, je to pouze údaj, kterým vás identifikujeme v případě, že máte mezi řešiteli jmenovce.

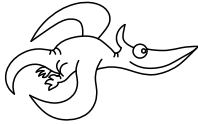
Na přihlášku do semináře samozřejmě pište všechny své kontaktní údaje.

Dále nám dělají problémy některé elektronické formáty. Prosíme vás, abyste neposílali skenované nebo foceně texty, které jste napsali rukou, od druhé série již upload nebude přijímat formát JPG. Vysoce tím trpí kvalita tisku a čitelnost vašeho rukopisu, o kapacitě disku na serveru nemluvě. Pošlete je raději poštou. Neposílejte nám také čistý text v T_EXu, a pokud je to možné, ani holé textové soubory. Z technických důvodů nepřijmeme ani formáty ODT nebo DOCX. Ideálním formátem je pro nás PDF.

Příkladáte-li k svému výsledku počítačovou simulaci, neposílejte nám soubory navíc, ale podstatný výtah z nich (grafy, vzorce pro výpočet, zdrojový kód programu) začleňte již do textu řešení. Zabráníte tak jejich ztrátě.

Pro ty, kteří se neumí nebo nechťejí naučit pracovat s T_EXem nebo editorem rovnic, je rozumným kompromisem text ve Wordu s doplněnými naskenovanými rovnicemi. Nebo nám svá řešení pošlete poštou.

Organizátoři



Zadání II. série



Termín odeslání: 22. listopadu 2010
Termín doručení: 24. listopadu 2010 18:00 CET

Úloha II. 1 ... rozcvička

a) Jakubova snídaně

Jakub jí k snídani cereální kuličky o hustotě ρ , které si sype do misky ve tvaru komolého kužele (horní podstava má poloměr R , spodní r a výška je l), ve kterém má do výšky h nalité mléko. Koeficient zaplnění prostoru koulemi je \varkappa . Kolik nejvíce kuliček může do misky nasypat? (2 body)

b) magnetický monopol

Máme velkou plechovou desku, kterou zmagnetujeme tak, že na její horní ploše bude severní magnetický pól (a na dolní ploše ten jižní). Vylisujeme z ní dvě stejné polokoule. Na vnitřní straně obou polokoulí je teď jižní a na vnější severní pól. Polokoule k sobě přiblížíme tak, že vyrobíme celou kouli. Ta má nyní venku pouze severní pól, takže se chová jako magnetický monopol. A nebo ne? Co nám ve vytvoření takové koule zabrání? (2 body)

Úloha II. 2 ... Lennard-Jonesův potenciál

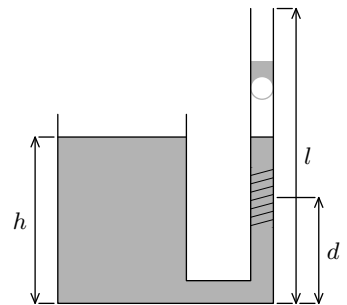
Mezi dvěma atomy inertního plynu působí tzv. Lennard-Jonesův potenciál

$$U(R) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right).$$

Předpokládejte, že pohyb atomů je omezen na přímkou. Určete rovnovážnou polohu, aniž byste derivovali! Význam konstant σ a ε bude podrobněji vysvětlen ve vzorovém řešení. (4 body)

Úloha II. 3 ... překapávač

Lukáš si k psaní protokolů z praktika vařil kávu a mírně si upravil kávovar. Ke dnu nádoby přidělal zahnutou trubičku, na kterou namotal topnou spirálku. Spirálka byla ve výšce d nade dnem nádoby (viz obrázek), hladina vody ve výšce h . Parametry trubičky a spirálky jsou právě takové, aby pára vzniklá varem vody přiváděné z rezervoáru v nádobce vytlačovala vodu nad sebou nahoru. Spočítejte výkon, který musíme dodávat do spirálky, aby z ústí trubičky ve výšce l vytékala voda. Jaká je účinnost takového tepelného stroje? (4 body)



Obr. 1. Překapávač a stoupající bublina unášející trochu vody

Úloha II. 4 ... nemyslíš, zaplatíš

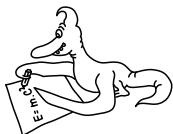
Za jakých podmínek dojde k zablokování a smýkání předního kola při brzdění, aniž bychom přeletěli přes říditka? Jaký na to má vliv brzdění zadním kolem? (4 body)

Úloha II. P ... šmoulové a Darth Vader

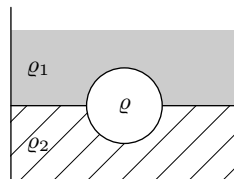
Po nadýchání se helia se člověku mění hlas tak, že mluví jako šmoula. Stejně to funguje, nadýcháte-li se vodíku (kuřáci, pozor!). Ale dá se dosáhnout i změny na hlas podobný Darthu Vaderovi; nejznámějším médiem je fluorid sírový. Jak funguje změna hlasu? Pokuste se ji kvantitativně odhadnout. (5 bodů)

Úloha II. E ... Jin a Young

Pravděpodobně jsme již všichni slyšeli o dvouštěrbinovém Youngově experimentu. Zkoušel si ale někdo podomácku „vyrobit“ interferenční proužky na stínítku osvětleném dvěma štěrbinami? K optickému Youngově pokusu existuje i mechanická analogie, kdy sledujeme skládání dvou vlnění na vodě, nebo akustická analogie, kdy se skládají dvě zvukové vlny. Ve všech třech případech je možné zkoumat interferenční obrazec vznikající v určité rovině. Pokuste se realizovat jeden nebo i více z uvedených tří pokusů, a získat tak interferenční obrazec. Poté určete vlnovou délku, případně rychlost šíření vlnění. Uvítáme fotodokumentaci. (8 bodů)

**Řešení I. série****Úloha I. 1 ... rozcvička** (4 body; průměr 2,78; řešilo 41 studentů)**a) mezi vodami**

Na rozhraní dvou nemísitelných kapalin se vznáší pevná homogenní koule o hustotě ρ (viz obrázek). Horní kapalina má hustotu ρ_1 , dolní ρ_2 , přičemž víte, že $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině?

**b) sesterská planeta**

V posledních několika letech již byla objevena spousta planet velikosti Jupitera ležících mimo Sluneční soustavu. Daleko zajímavější by bylo ovšem objevovat planety, které jsou podobné Zemi. Předpokládejte, že chcete objevit planetu podobnou Zemi (terestrická planeta s podobným poloměrem jako Země), která obíhá svou hvězdu podobnou Slunci (stejná spektrální třída – podobná hmotnost, podobný poloměr) jednou za pozemský rok. Předpokládejte, že tato soustava je vzdálená od našeho Slunce zhruba 10 parseků. Určete podmínky, za kterých by šlo pozorovat planetu přímo z poklesu jasnosti hvězdy a odhadněte dobu, na kterou tato situace nastane. Jak se zkomplikuje hledání takové hvězdy, když soustava bude mít víc planet?

Z ruských bylin vyčetl Marek, zatímco Karel toužil po hvězdných dálavách.

Mezi vodami

Koule je z části v kapalině s indexem 1 a z části v kapalině 2; označme příslušné objemy V_1 a V_2 . Tyto části se nazývají kulová úseč.

Podle Archimédova zákona je část ponořená v dolní kapalině nadnášena silou $F_2 = V_2 \rho_2 g$. Podobně na horní část koule působí vztlaková síla $F_1 = V_1 \rho_1 g$. Nyní nám stačí přidat působení tíhové síly a máme rovnováhu sil $F_1 + F_2 = F_g$, kam dosadíme předchozí výsledky a zkrátíme g . Obdržíme $V_1 \rho_1 + V_2 \rho_2 = (V_1 + V_2) \rho$.

V zadání jsme se ptali, jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině? Zajímá nás tedy poměr V_1 a V_2 . Ten získáme několika úpravami předchozí rovnice.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{-\rho_2 + \rho}{\rho_1 - \rho}.$$

Adéla Skoková
adela@fykos.cz

Sesterská planeta

Hned na začátek si zavedeme rozumné předpoklady, ze kterých budeme dále vycházet. Vzhledem k tomu, že planetu velikosti Země nejspíše chceme objevit, protože by nás zajímalo, kde by mohly žít podobné formy života jako na Zemi, tak od planety požadujeme, aby obíhala po dráze s nízkou excentricitou – konkrétně pro jednoduchost budeme uvažovat, že se pohybuje po kružnici (vysoké excentricita by způsobovala velké rozdíly teplot v průběhu roku).

Je zřejmé, že k poklesu jasnosti dojde v okamžiku, kdy planeta přechází přes hvězdu. Tato metoda objevování exoplanet se nazývá fotometrická metoda. K zákrytu může dojít pouze u hvězdných soustav, jejichž rovina, ve které obíhají planety, protíná naši Sluneční soustavu. To je relativně vzácné a proto je tato metoda prakticky nepoužitelná pro objevování planet. Pro to se prakticky používá často například Dopplerova metoda, která z posunu spektrálních čar v průběhu času určuje změnu radiální rychlosti a z toho pak i přítomnost exoplanety.

Ale zpět k teoretickému využití naší metody. Na obrázku 2 můžete vidět schematický náčrt toho, jak by se nám mohly jednotlivé polohy planet jevit (jedná se vlastně o různé projekce kružnice s koulí ve středu) Možnost a) je pro naše pozorování vůbec nejlepší – planeta přechází blízko středu hvězdy a přechod jí tedy bude trvat nejdelší čas. Při přechodu u soustavy b), kdy planeta přechází sice přes svou hvězdu, ale prochází blíže ke kraji a přechod jí bude trvat kratší čas. V případech c) a d) bychom touto metodou planetu vůbec nemohli objevit. V případě c), kdy je orbita alespoň nakloněná, pak lze použít např. zmíněnou Dopplerovu metodu. V případě d) (kdy planeta obíhá v rovině kolmé na spojnici pozorovatel – hvězda) se dá použít např. astrometrická metoda, která přítomnost planety určuje na základě změn polohy hvězdy na obloze.

Nyní již k samotnému výpočtu doby přechodu planety. Předpokládáme, že jev můžeme vůbec pozorovat (soustava má zvolenou dobu oběhu právě takovou, že pokud je soustava v nevhodné pozici pro pozorování (např. z našeho pohledu za Sluncem), tak je v nevhodné pozici každý rok). Určíme maximální dobu přechodu (případ a) z obrázku 2. V zadání je přímo řečeno, že planeta oběhne hvězdu jednou za rok a tedy tak často také budeme moci pozorovat přechod. Označme vzdálenost pozorované soustavy od nás jako $d = 10$ pc. Jak bylo v zadání uvedeno, tak můžete pokládat rozměry v soustavě obdobné jako v Sluneční soustavě a pro řádový odhad vezmeme z matematicko-fyzikálních tabulek údaje na dvě platné cifry. Poloměr hvězdy je $R_S = 7,0 \cdot 10^8$ m, hmotnost hvězdy $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg.

Vzhledem k tomu, že roli dostředivé síly F_d hraje síla gravitační F_g , dá se vyjádřit jako

$$F_d = M_P \frac{v^2}{r}, \quad F_g = \varkappa \frac{M_P M_S}{r^2},$$

kde M_P je hmotnost planety a M_S hmotnost hvězdy a tyto splňují podmínku $M_S \gg M_P$. Dále $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta a r je vzdálenost mezi těžišti planety

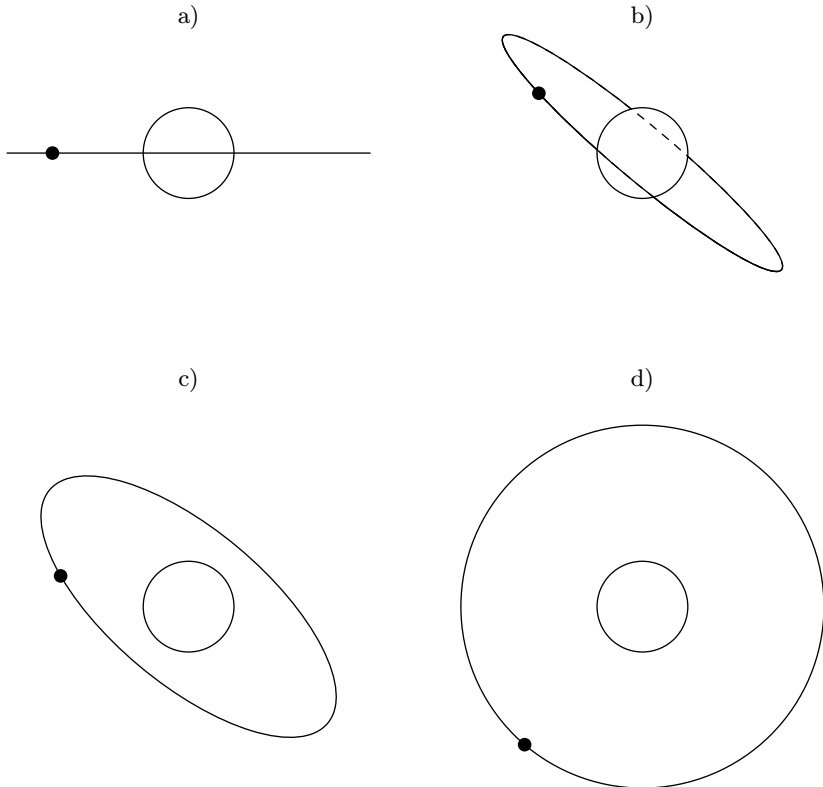
a hvězdy. Z toho dále plyne

$$M_P \frac{v^2}{r} = \varkappa \frac{M_P M_S}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\varkappa \frac{M_S}{r}}.$$

Přičemž pro pohyb po kružnici platí $v = \frac{2\pi r}{T}$, kde T je doba oběhu (1 rok). Odtud pak zase plyne

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \varkappa \frac{M_S}{r} \Rightarrow r^3 = \frac{\varkappa}{4\pi^2} T^2 M_S.$$

Vzhledem k tomu, že všechny proměnné na pravé straně rovnice jsou stejné jako pro Zemi, tak obíhá planeta kolem cizí hvězdy také po dráze o poloměru $r = 1 \text{ AU} \doteq 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.



Obr. 2. Možné pozice orbity planety vůči nám jako pozorovateli (ve zkráceném měřítku)

Zbývá si už jenom výpočet výrazně zjednodušit zdůrazněním splněných předpokladů a to, že $d \gg r \gg R_S$. Proto můžeme brát, že dráha, kterou planeta z našeho pohledu urazí před svým sluncem, je $2R_S$. Potom už dobu přechodu t spočítáme jednoduše z rychlosti oběhu planety v

$$t = \frac{2R_S}{v} = \frac{2\sqrt{r}R_S}{\sqrt{\varkappa M_S}} \approx 13 \text{ hodin}.$$

Přechod planety přes hvězdu tedy bude trvat maximálně cca 13 hodin.

Kdyby nás zajímal odhad o kolik procent klesne v této době hvězdě jas L , pak si to můžeme vypočítat z poměrů průřezů hvězdy S_S a planety S_P vzorcem

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{S_P}{S_S} = \frac{R_P^2}{R_S^2} \approx 0,008\%$$

Pokles jasnosti je tedy velmi malý a měření by bylo náročné i na rozlišovací schopnost dalekohledu.

V případě, že by v soustavě bylo více planet (což se zdá z dosavadních pozorování daleko pravděpodobnější, než že by planeta byla v soustavě sama), pak budeme pozorovat ročně průměrně více poklesů. To, jak často, by záviselo na tom, jestli vůči planetě, kterou jsme pozorovali, obíhá po dráze bližší své hvězdě (pak obíhá častěji než za rok), nebo po vzdálenější. Teoreticky by mohla obíhat i po stejné dráze, ale je vysoce nepravděpodobné, že by taková soustava vznikla. Právě díky tomu, že je nepravděpodobný výskyt dvou a více planet na stejné oběžné dráze, pak můžeme rozpoznat planety právě díky různým dobám oběhu. Dalším rozlišovacím znakem může být právě rozdílný pokles jasnosti při přechodu planety, která má jinou velikost. Mohlo by se i stát, že bude přecházet víc planet zároveň, ale to právě můžeme teoreticky také rozpoznat pomocí toho, že pokles jasu bude mít složitější průběh než u přechodu jedné planety.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha I. 2 ... káča bez čerta (4 body; průměr 2,12; řešilo 26 studentů)

Jakub má u babičky káču, na jejíž horní ploše je nakreslená spirála. Káču roztočíme a díváme se na ni shora. Jaké obrazce pozorujeme a proč? Na dětství zavzpomínal Jakub.

To, co uvidíme na káči, bude záviset zejména na její úhlové frekvenci otáčení ω_k . Existují dvě oblasti, ve kterých se o obrazce budeme zajímat. Lidské oko totiž má určitou dobu odezvy, po kterou mu trvá zareagovat na změnu obrazu. Mimořádně, způsob, jakým lidské oko snímá obraz a jakým jej následně vyhodnocuje, je přinejmenším zajímavý. Například věci, které máme v periferní oblasti vidění, vidíme černobíle a mozek si barvy vymýslí podle toho, co viděl v bezprostřední minulosti. Ostré barevné vidění se omezuje na žlutou skvrnu. Vraťme se tedy k celkové odezvě oka. Ta činí asi 1/25 s. V technice bychom ji popsali obnovovací frekvencí f_o ; $\omega_o = 2\pi f_o$. Dá se tedy očekávat, že se obrazec, který uvidíme na káči, bude lišit podle toho, jestli je káča rychlejší než oko nebo naopak.

a) $\omega_k < \omega_o$

V takovéto situaci ještě dokážeme rozlišit to, že na káči je namalovaná spirála. S postupným zvyšováním frekvence se nám bude čím dál tím víc obtížněji rozlišovat, že spirála nejsou namalovaná kolečka. Podle směru navinutí spirály se nám bude zdát, že kolečka se přibližují ke středu nebo ke kraji. Toto je víceméně jenom psychologický efekt, pokud bychom nahradili oko kamerou s odpovídajícím počtem snímků za sekundu, viděli bychom stále rotující spirálu.

b) $\omega_k \geq \omega_o$

Zde je situace zajímavější. Představme si (pro jednoduchost), že se díváme na polopřímku vycházející ze středu spirály. Každému bodu ve vzdálenosti r na této polopřímce



Obr. 3. Káča před roztočením

můžeme přiřadit hodnotu od 0 do 1, která bude odpovídat tomu, jak černý jej uvidíme (0 je černá, 1 bílá). Označme tuto veličinu $v(r)$. Během okamžiku, kdy oko snímá barvu tohoto bodu, jím projde oblouk,¹ na kterém se střídají černá a bílá barva. Poměr mezi částí tohoto oblouku, která je černá a celkovou jeho délkou odpovídá barvě, kterou uvidíme. Přesněji

$$v(r) = 1 - \frac{b \left(\frac{\omega_k}{\omega_o} \right)}{2\pi r \frac{\omega_k}{\omega_o}},$$

kde $b(\omega_k/\omega_o)$ je délka oblouku, kterou zabírá černá barva a r je vzdálenost zkoumaného místa od středu.

Zde naše úvahy utneme, protože počítat $b(\omega_k)$ pro neznámou spirálu je poněkud obtížné (kromě parametrů spirály také závisí na poměru ω_k/ω_o), a odkážeme na pokusy, které jste si sami doma provedli. Někteří řešitelé si spirály ze zadání nalepili např. na disk brusky a zjistili, že se takto na káče objeví soustředné kruhy, které však nikam dál již necestují. Něktěrym z vás sice cestovaly, ale to je jen další klam spojený s tím, že osa koná precesní pohyb, čímž se v čase efektivně mění rozložení černé a bílé na spirále. Na závěr ještě zmiňme, že pro vhodnou spirálu (např. $r_1 = k\varphi$, $r_2 = k(\varphi + \delta)$) lze dosáhnout i toho, že výsledný obrazec může mít jednu barvu.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha I.3 ... houpací kůň (4 body; průměr 1,59; řešilo 22 studentů)

Nehmotná tyč délky h je ve středu připevněna na nehmotný oblouk o vrcholovém úhlu 2φ a poloměru R . Na konci tyče je závaží m . Pohyb probíhá pouze v rovině. Určete podmínky stability a periodu kmitů takového houpacího koně.

Při studiu materiálů od ČEZu vymyslel Jakub

Nejprve si udělejme v celé situaci jasno. Na obrázku je nakreslena rovnovážná poloha a vychýlená poloha společně s působícími silami. Gravitační sílu netřeba ozřejmovat. Normálová síla podložky F_N působí proti ní a třecí síla F_t zajišťuje, aby se kůň kromě otáčení kolem bodu O a posouval ve směru osy x , a tím pádem neprokluzoval.

- Aby byla soustava stabilní, musí při vychýlení z rovnováhy vzniklá síla působit proti této výchylce. Z obrázku a hlavně zakreslených působících sil vidíme, že tato podmínka bude splněna, pokud $R > h$. Tehdy bude vzniklý moment síly F_g působit proti natočení koně.
- Protože houpací kůň neprokluzuje a než ho pustíme, tak se nehýbe, musí platit $a = h\varepsilon$, kde a je zrychlení závaží a ε je úhlové zrychlení koně kolem závaží. Moment setrvačnosti koně kolem závaží je nulový, jelikož veškerá jeho hmota je soustředěna právě v závaží. Moment působících sil vůči tomuto bodu tak musí být nulový, jinak bychom dostali nekonečné úhlové zrychlení. Pro malé kmity tak dostaneme

$$mg(R-h)\alpha \approx F_N(R-h)\sin\alpha = F_t h(1-\cos\alpha) \approx F_t h,$$

$$F_t = mg\alpha \left(\frac{R}{h} - 1 \right).$$

¹⁾ Je delší než obvod kružnice na níž leží, zvláště pro velmi vysoké ω_k .

Dále z Newtonova zákona

$$mh\varepsilon = ma = -F_t = -mg\alpha \left(\frac{R}{h} - 1 \right),$$

v čemž poznáváme rovnici harmonického oscilátoru², ze které vyčteme³

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{1-q}{q^2}},$$

kde $q = h/R$.

Všimněme si limitních případů. Pro $q \rightarrow 1$ je $\omega \rightarrow 0$, což odpovídá prosté kouli. Ta při vychýlení také nekmitá. Pro $q > 1$ je frekvence imaginární, což koresponduje s tím, že soustava v takovém případě není stabilní. Pro $q \rightarrow 0$ máme $\omega \rightarrow \infty$, což odpovídá například míčku skákajícímu do nekonečně malé výšky. Pro $q \rightarrow -\infty$ je konečně $\omega \sim \sqrt{g/|h|}$, což odpovídá matematickému kyvadlu, ve které houpačí kůň přechází.

Jan Hermann
honzah@fykos.cz

Úloha I.4 ... **bublifuk** (5 bodů; průměr 2,67; řešilo 15 studentů)

Mára si koupil bublifuk a jal se na balkoně vyfukovat bubliny, venku byl stálý atmosférický tlak p_0 . Když se mu jedna obzvláště povedla (měla poloměr r a hmotnost mýdlové vody byla m), zamyslel se a vypočítal její celkovou tepelnou kapacitu. Učiňte totéž.

Jakub zavzpomínal, jak kdysi na náboji spočítal jeden příklad

Nejprve provedeme předběžné pozorování, které nám osvětlí, co je to povrchové napětí σ . Pokud bychom povrch kapaliny rozřízli, z obou částí by se vytvořily kuličky. Proto si představujeme, že v myšleném řezu drží pohromadě každý úsek délky Δl malí skřítkové silou o velikosti

$$\Delta F = \sigma \Delta l \tag{1}$$

a směru kolmém k rovině řezu. Vynásobením (1) kouskem dráhy Δs ve směru působení síly dostáváme změnu potenciální energie při zvětšení povrchu ΔA

$$\sigma \Delta l \Delta s = \sigma \Delta A.$$

Bublinu rozřízneme středem, čímž vznikne obvod $2\pi r$ a odpovídající síla $4\pi r\sigma$ za vnitřní i vnější povrch bubliny, kde r značí poloměr bubliny. Tu musí vyrovnat tlak uvnitř plynu p působící na průřezu πr^2 . Z rovnosti sil vyjde

$$p = \frac{4\sigma}{r},$$

což lze snadno zobecnit tak, že $p \mapsto p - p_0$ znamená přetlak.

Tepelná kapacita C se definuje jako teplo Q , které musíme dodat, abychom zvýšili teplotu tělesa o jednotku

$$Q = C \Delta T,$$

²⁾ Pro harmonický oscilátor platí (zrychlení) = -(konstanta) \times (výchylna).

³⁾ $\omega = \sqrt{\text{(konstanta)}}$

zatímco atmosférický tlak se nemění. Tepelná kapacita říká, jak je těžké těleso ohřívat, jak moc tepla se do něho vejde při jednotkovém zahřátí. Pro dodané teplo platí

$$Q = c\Delta T + \Delta U + \Delta U_{\text{pov}}, \quad (2)$$

kde první člen vyjadřuje, že se mýdlová voda ohřívá s kapacitou c , druhý člen odpovídá vnitřní energii plynu $\Delta U = C_V\Delta T$, kde C_V se nazývá kapacita plynu při konstantním objemu a třetí člen vyjadřuje změnu potenciální energie uložené na površích $\Delta U_{\text{pov}} = 2\sigma\Delta A$.

Stačí nám tedy zjistit, jak se změní plocha ΔA při změně teploty ΔT . Přitom vyjdeme z vzorce pro objem koule $V = Ar/3$, který je stejný jako vzorec pro objem kužele, a ze stavové rovnice ideálního plynu

$$nRT = pV = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r}\right)V = p_0V + \frac{4\sigma}{3}A,$$

kde n značí látkové množství plynu a R plynovou konstantu. Z této rovnice zjistíme snadno přírůstky

$$nR\Delta T = p_0\Delta V + \frac{4}{3}\sigma\Delta A. \quad (3)$$

Zbývá najít vztah mezi přírůstkem plochy a objemu (podrobně viz kap. 0 letošního seriálu). Ze vztahu pro délkovou a objemovou roztažnost plyne

$$3\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta V}{V}$$

a analogický vztah můžeme napsat pro plošné přírůstky

$$2\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta A}{A}.$$

Ovšem z roznásobení poslední rovnice máme

$$\frac{1}{2}r\Delta A = A\Delta r = \Delta V,$$

kde poslední rovnost má u koule názorný geometrický význam, kterého se používá při odvození vztahu pro objem koule: Přírůstek objemu je přibližně „kvádr“ o podstavě A a výšce Δr .

Dosazením do stavové rovnice (3)

$$nR\Delta T = \frac{r}{2}\left(p_0 + \frac{8\sigma}{3r}\right)\Delta A.$$

a do rovnice zachování energie (2) dostáváme kapacitu bubliny

$$C = c + C_V + \frac{4\sigma}{r} \frac{nR}{p_0 + \frac{2}{3}\frac{4\sigma}{r}} = c + C_V + \frac{nRp'}{p_0 + \frac{2}{3}p'}, \quad (4)$$

v níž rozhoduje kapilární přetlak $p' = 4\sigma/r$.

Je jasné, že bychom mohli ekvivalentně uvažovat práci plynu $(p - p_0) \Delta V$, kde ΔV značí změnu objemu. Pak bychom místo posledního členu v (2) dostali práci konanou plynem

$$(p - p_0) \Delta V = \frac{4\sigma}{r} \left(\frac{1}{2} r \Delta A \right) = \frac{4\sigma}{r} \frac{nR\Delta T}{p_0 + \frac{8}{3} \frac{\sigma}{r}},$$

což dá poslední člen v (4). Pro monoatomární plyn $C_V = \frac{3}{2} nR$ lze například kapacitu zapsat

$$C = c + \frac{3}{2} nR \left(1 + \left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \frac{2}{3} p'} \right) \right),$$

takže vidíme, že člen z povrchového napětí má stejnou velikost jako kapacita plynu pouze pro malinké bublinky $p' \rightarrow \infty$ a že pro velké bublinky $p' \rightarrow 0$ se povrchové napětí vůbec neuplatní, což jsme čekali.

Jakub Michálek
jmi@fykos.cz

Úloha I. P ... Edudant a Francimor (5 bodů; průměr 4,24; řešilo 25 studentů)

Dva světaznalí cestovatelé, jeden tlustý a jeden hubený, se cestou v letadle dohadují o tom, kdo z nich by déle přežil v extrémních podmínkách daleko od civilizace. Rozsoudíte je, kdo vydrží déle ve velkém horku (50°C), v mrazu (-5°C), na hladině klidného tropického moře po potopení lidí, v hurikánu nebo při silném sněžení? A jak by to mohlo dopadnout, kdyby je zastihlo mohutné zemětřesení v centru velkoměsta? Kromě jejich tělesné stavby mezi nimi nejsou žádné rozdíly, oba jsou stejně oblečení a nic dalšího s sebou nemají (žádné jídlo, vodu, sirky ani jiné vybavení). Neuvažujte ani žádné vnější vlivy, které nejsou zmíněny (dravou zvěř, žraloky, kanibalismus apod.) Snažte se být nápadití a všimněte si i maličkostí.

Ve známém televizním pořadu viděl Honza P.

V zadání je naznačeno, že jediné, v čem se naši dva cestovatelé liší, je tělesná hmotnost. Tloušťák na sobě bude mít zjevně mnohem větší množství tuku, takže se musíme podívat, jaké fyzikální vlastnosti má tuk a jak to bude ovlivňovat jednotlivé případy.

Ve velkém horku (tedy řekněme 50°C) bude mít větší problém tloušťák. Proč? Předpokládejme, že člověk je z velké části složen z vody, která má vysokou tepelnou kapacitu (cca $4800 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$), tedy je poměrně těžké ji ohřát. Tělesný tuk je poměrně komplexní sloučenina, nicméně za jeho základ můžeme vzít glycerol, jehož tepelná kapacita je oproti vodě poloviční (cca $2400 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$)⁴. Je tedy zřejmé, že zahrát tuk je mnohem jednodušší, tudíž tloušťák bude mít problém přežít v teplém prostředí. V zimě bude mít větší problém střízlík. Sice je pravděpodobně v lepší fyzické kondici a mohl by zvládnout regulaci tělesné teploty, ale pramálo mu to pomůže. Tuk v tomto případě funguje jako tepelná izolace

V hurikánu bude největší roli hrát to, jakou má dotyčný hmotnost. S tloušťákem bude těžší vůbec pohnout (stačí si vzpomenout na Newtonovy pohybové zákony), zato nízká hmotnost bude značnou nevýhodou, neboť střízlíka hurikán snáze „sfoukne“.

Ve sněžné bouři je hlavním faktorem přežití to, jak moc se namočíme. Vlhké oblečení totiž ztrácí veškeré izolační vlastnosti. Když se podíváme na účinný průřez našich dvou cestovatelů, bude jasné, že víc sněhových vloček, tedy vlhkosti na sebe nacytá tloušťák. Z toho pohledu mu hrozí rychlejší umrznutí a tedy rychlejší smrt.

⁴) <http://www.sjlipids.com/fattyacd.htm>

Co se týče ztroskotání lodi, musíme se zamyslet nad hustotami, jelikož je známo, že méně hustá kapalina plave na hustější. Hustota mořské vody je cca $1,025 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, hustota tuku je cca $0,9 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Z toho vyplývá, že tloušťkám si na hladině bude plavat jako bójka, kdežto střízlík bude muset vynakládat energii na to, aby plaval, jelikož svalstvo má hustotu cca $1,1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

⁵ Energie mu pravděpodobně brzy dojde, takže zemře dřív.

V zemětřesení je situace poměrně složitá. Musíme se prvně zamyslet nad tím, co je třeba udělat v případě zemětřesení. Příručky radí, že jsme-li v místnosti, je třeba se schovat pod postel nebo stůl a nevyskytovat se v blízkosti oken nebo těžkých věcí, které na nás můžou spadnout. Tloušťkám může v tomto případě mít problém se pod postel či stůl vlézt. Nicméně obecně má větší stabilitu, tedy je těžší jej vyvést z rovnováhy. Pokud by měl utíkat po třesoucí se zemi, uteče spíš. V našem případě jsme v centru velkoměsta, tedy nejmoudřejší věc, co můžeme udělat je zůstat v budově a schovat se. Pokud naši cestovatelé budou zavaleni, jsou jejich šance asi tak stejné. Lehkou výhodou střízlíka je, že se vleze do menších prostor a má pravděpodobně lepší fyzickou kondici, tedy spíše se ze zavalení dostane. Nicméně v případě zranění jsou oba stejně ztraceni. Pro názorné experimentální řešení doporučujeme shlédnout videa Brainiac.⁶

Jana Poledníková

janap@fykos.cz

Úloha I. E ... vrh koulí (8 bodů; průměr 2,42; řešilo 12 studentů)

Všichni dobře víme, že ve vakuu doletí všechny předměty vržené stejnou rychlostí a pod stejným úhlem stejně daleko. Co se ale stane, když je takto házeme za normálního tlaku? Změřte, jak závisí dolet tělesa konkrétního tvaru na jeho hmotnosti. Jak tato závislost vypadá teoreticky? Můžete ji spočítat, nebo nasimulovat na počítači např. v Excelu.

Vylovlili jsme zlatou rybkou z našeho archivu.

Teorie

Abychom určili brzdné zrychlení pro tělesa pohybující se ve vzduchu, vyjdeme z Newtonova vztahu pro odporovou sílu závislou na kvadrátu rychlosti, z čehož pro brzdné zrychlení dostaneme vztah

$$a_{\text{odp}} = \frac{C \rho S v^2}{2m},$$

kde C je koeficient odporu určený tvarem tělesa, v je rychlost tělesa, S je plocha jeho průřezu, m je hmotnost tělesa a ρ je hustota prostředí, v našem případě vzduchu. Úloha má analytické řešení, pokud se jedná pouze o vrh ve svislém směru. Jakmile má ale předmět nějakou rychlost podél horizontální (x -ové) osy, analytické řešení neexistuje a je třeba si vypomoci počítačem.

Simulace

K simulaci bylo použito fiktivní těleso o koeficientu odporu $C = 0,5$, tedy koule nebo kornout. Počáteční hodnoty rychlosti tělesa byly zvoleny tak, aby byly v doletu viditelné co největší rozdíl.

Pro časových intervalech o velikosti $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ se počítaly rychlost, souřadnice a zrychlení tělesa. Tento interval zajistil přesnost určení x -ové uražené vzdálenosti s odchylkou 1 až 4 mm, což je vzhledem k rozpětí uražených vzdáleností dostačující. Předpokládejme, že kladný směr

⁵) <http://www.netwellness.org/question.cfm/46403.htm>

⁶) <http://www.youtube.com/watch?v=ZS5zpQqbalw>

pro složky rychlosti je ve směru osy x a proti směru osy y . Rychlosti jako i zrychlení se v čase t vypočítaly po složkách z údajů o rychlostech, poloze a zrychlení pro čas $t - \Delta t$ podle následujících vztahů (index 1 značí hodnotu pro čas t , index 0 značí hodnotu pro čas $t - \Delta t$)

$$v_{x1} = v_{x0} - a_{x0}\Delta t, \quad v_{y1} = v_{y0} + (g - a_{y0})\Delta t,$$

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}, \quad a_1 = \frac{C_{\rho} S v_1^2}{m},$$

$$a_{x1} = a \frac{v_{x1}}{v} \cdot \text{„průmět odporového zrychlení do směru } x\text{-ové osy“},$$

$$a_{y1} = a \frac{v_{y1}}{v} \cdot \text{„průmět odporového zrychlení do směru } x\text{-ové osy“},$$

$$x = x_0 + v_{x0}\Delta t - \frac{1}{2}a_{x0}\Delta t, \quad y = y_0 - v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2}(g - a_{x0})\Delta t.$$

Ve chvíli, kdy y -ová souřadnice mění znaménko, byla odečtena hodnota x -ové souřadnice, tedy dolet. Rozdíl x -ové souřadnice v dobách $\pm \Delta t$ byl zaznamenán jako odchylka. Následně byla změněna hmotnost simulovaného tělesa, aby se znovu odečetl dolet.

Na první pohled by $x(m)$ měla být asymptotická funkce, což je očekávatelné, neboť pro vysoké hmotnosti bude vliv odporu vzduchu zanedbatelný a všechny těžší předměty začnou padat, stejně jako ve vakuu, téměř na stejné místo. Počáteční hodnoty pro simulaci byly zvoleny následovně:

$$v_x = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_y = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad y = 0,93 \text{ m}, \quad x = 0 \text{ m},$$

$$C = 0,5, \quad S = 0,004 \text{ m}^2, \quad \rho_{\text{vzduchu}} = 1,2759 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Dolet pro různé hmotnosti tělesa

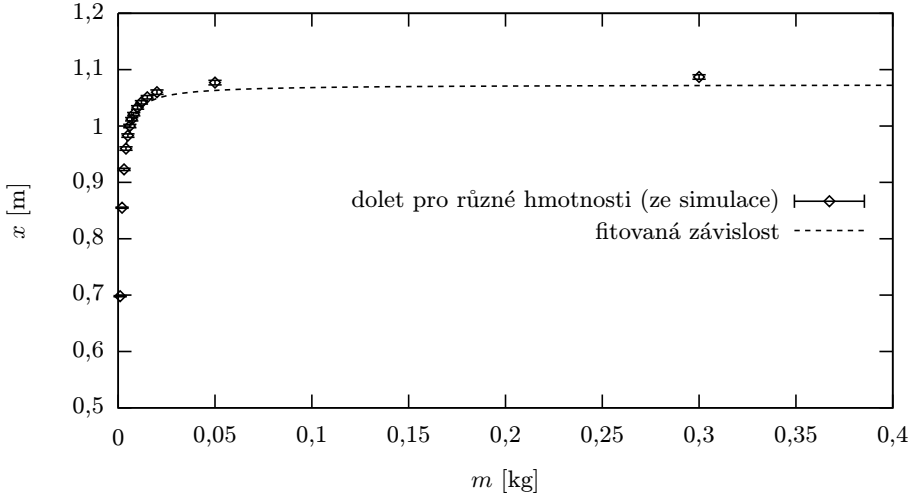
hmotnost [kg]	dolet [m]	odchylka [m]
0,001	0,698	0,001
0,002	0,855	0,001
0,003	0,923	0,002
0,004	0,960	0,003
0,005	0,983	0,003
0,006	1,000	0,003
0,007	1,012	0,003
0,008	1,021	0,003
0,010	1,033	0,003
0,012	1,042	0,003
0,015	1,051	0,003
0,020	1,060	0,004
0,050	1,077	0,004
0,300	1,087	0,004
0,800	1,086	0,004
1,500	1,087	0,004
5,000	1,087	0,004

Naměřená data byla fitována funkcí

$$f(x) = \frac{a}{x^b} + c$$

s výslednými parametry $a = (-6,9 \pm 4,5) \cdot 10^{-4}$ (chyba 65 %), $b = (9,1 \pm 0,9) \cdot 10^{-1}$ (chyba 10 %) a $c = (1,1 \pm 0,01)$ (chyba 1 %).

Bohužel fitovaná funkce na simulované hodnoty nesedí až tak dobře (jeden parametr byl vypočten s velkou chybou 65 %), ale je to nejlepší výsledek mezi funkcemi, které byly ozkoušeny (logaritmus, exponenciála, ...).



Obr. 4. Graf závislosti $x(m)$ pro badmintonový míček

Měření

K měření byly jako tělesa stejného tvaru a různých hmotností použity badmintonové míčky s různými závažími upevněnými ve špičce. Tyto byly zvoleny, protože jev je nejlépe rozpoznatelný na lehkých tělesech (vezmeme-li v úvahu, jakých rychlostí je možno v domácích podmínkách dosáhnout). Jako stroj, který zaručí stejnou výletovou rychlost bylo použito těžké kyvadlo o hmotnosti 1,77 kg (aby bylo možno u něj zanedbat odpor vzduchu) s upevněnou trubicí, ze které vylétávaly badmintonové míčky. V nejnižším bodě kyvadlo narazilo do vyměkčené zábrany (k tomuto účelu posloužil malý polštář, aby se zabránilo odrazu kyvadla a výletu míčku jiným směrem). Míček, který mohl v trubici volně klouzat pokračoval dál původní rychlostí. Jako závaží do špičky míčku byly postupně použity hliněná kulička, olověná kostka a dvě olověné kostky. Jako konstrukce pro kyvadlo byly použity štafle. Bylo ovšem těžké dosáhnout výletu míčku vždy jedním směrem, neboť polštář jako tlumidlo nestačil. Vhodnější by byla třeba plastelína.

Kyvadlo překonávalo výškový rozdíl 60 cm, což v dolní úvratí odpovídá rychlosti $v_x = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Výletová rychlost byla ale pravděpodobně o něco menší (kvůli tření při výletu z trubice).

Měření doletu badmintonových míčků

hmotnost [kg]	0,005	0,005	0,005	0,005	0,010	0,026	0,050
dolet 1 [m]	1,01	1,12	1,01	1,03	1,30	1,04	1,03
dolet 2 [m]	0,80	0,97	1,10	1,01	1,02	1,17	1,09
dolet 3 [m]	0,99	1,05	1,12	1,14	1,41	1,23	1,25
dolet 4 [m]	0,98	1,00	0,88	0,95	1,18	1,00	1,31
dolet 5 [m]	0,94	0,90	0,82	0,77	1,03	1,26	1,10
dolet 6 [m]	0,96	0,97	0,87	0,99	1,17	1,26	1,14
průměr [m]	0,95	1,00	0,97	0,98	1,19	1,16	1,15
směrodatná odchylka [m]	0,07	0,07	0,12	0,11	0,14	0,10	0,10

Z měření je vidět, že těžší míčky létají dál. Kvůli velikosti chyby způsobené nepřesností výletové rychlosti (nebylo v mých silách eliminovat tření míčku, než vyletí z trubice, ani pohyby konstrukce kyvadla při nárazu) není ovšem možné z naměřených hodnot ověřit, jak korespondují simulovaná data s naměřenými.

Tereza Zábojníková
terka@fykos.cz

Úloha I. S ... komplexní rychlokvaška (6 bodů; průměr 2,92; řešilo 12 studentů)

- Uvědomte si, že n -té odmocniny z komplexní jednotky leží na n -úhelníku, a dořešte Bombelliho rovnici $x^3 - 15x - 4 = 0$. Náповědu naleznete v textu seriálu.
- Vyjádrete goniometrické součtové vzorce pomocí komplexních exponenciál.
- Ukažte oprávněnost zanedbání vyšších mocnin v odvození Bernoulliho limity, tj. že do závorky můžeme přidat člen $o(1/N)$.
- Použijte značení s malým o , abyste vyřešili úlohu, s jakou frekvencí kmitají body hmotnosti m po ose x v Yukawově potenciálu $ke^{x/\lambda}/x$ kolem rovnovážné polohy.
- Dokažte, že Čebyševovy polynomy $\cos(n \arccos(x))$ jsou skutečně polynomy. Návod: Uvažujte komplexní jednotku z , která má reálnou část x . Pak se vyšetřovaný výraz rovná reálné části z^n , což musí být polynom, protože odmocniny a imaginární jednotky drží pospolu.

Jakub Michálek a Lukáš Ledvina

Bombelliho rovnice

Připomeňme nejprve nad rámec řešení, jak se dospěje ke Cardanovým vzorcům. Pokud do rovnice v redukovaném tvaru

$$x^3 = 3px + 2q$$

dosadíme $x = a + b$, dostaneme z faktu, že rovnice má platit pro všechna p a q , ekvivalentní soustavu rovnic

$$a^3 + b^3 = 2q,$$

$$ab = p.$$

Tato soustava je invariantní vůči záměně neznámých, takže nám stačí vypočítat jen jednu z nich. Dosazením druhé rovnice do první a vyřešením kvadratické rovnice zjistíme

$$b^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}.$$

Ovšem s ohledem na první rovnici v soustavě budou mít řešení opačné znaménko. Dosazením pro původní $x = a + b$ dostaneme Cardanův vzorec.

Dosazením $p = 5$ a $q = 2$ získáme $a^3 = 2 \pm 11i = (2 \pm i)^3$. Jedním z řešení je tedy $a = 2 + i$ a $b = 2 - i$, což dá prozrazený kořen $x = 4$. Kořeny třetí odmocniny leží na rovnostranném trojúhelníku, takže máme další kořeny

$$a' = ae^{\pm 2\pi/3i} = (2 + i) \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{3}}{2} + (\dots)i.$$

Pokud si uvědomíme, že x vznikne jako součet čísla a' a čísla komplexně sdruženého, můžeme rovnou psát

$$x = a' + \bar{a}' = 2\operatorname{Re}(a') = (-2 \mp \sqrt{3}).$$

Jiným postupem, jak celou rovnici řešit, je vydělení polynomem $x - 4$. Tak dostaneme kvadratickou rovnici, kterou řešíme diskriminantem.

Součtové vzorce

Rozepíšeme nyní $e^{i(x+y)}$ dvěma způsoby. Jednak lze psát

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y),$$

ale zároveň také

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y) = \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i (\cos x \sin y + \sin x \cos y). \end{aligned}$$

Srovnáním pravých stran dostáváme

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y. \end{aligned}$$

Součtový vzorec pro tangens získáme jednoduše z výše uvedených rozšíření $(\cos x \cos y)^{-1}$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Hodilo by se ještě dodat, jak získáme vzorce pro $\sin \alpha + \sin \beta$. Nejvýhodnější způsob, jak si vzorce z hlavy vybavit, uvažuje dvě komplexní jednotky e^α a e^β . Ty leží na kružnici a sečteme je jako vektory podle rovnoběžníkového pravidla. Výsledek bude mít směr $e^{(\alpha+\beta)/2}$ a velikost $2 \cos((\alpha - \beta)/2)$. Hledaný vzorec je pak zřejmě jen imaginární část součinu posledních dvou čísel (směru a velikosti).

Bernoulliho limita a $o(1/N)$

Naším cílem bude ukázat, že platí

$$\left(1 + \frac{x}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N = e^x, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Nejdříve označme $f(N) = o(1/N)$. Z definice malého o platí $Nf(N) \rightarrow 0$ pro $N \rightarrow \infty$. Provedeme zde malý trik: Budeme počítat dvě vnořené limity místo jedné, tj.

$$(5) = \left(1 + \frac{x}{N} + \frac{Nf(N)}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{x + Nf(N)}{N}\right)^N = e^{x + Nf(N)} \rightarrow e^x.$$

Zkuste si promyslet, že pro exponenciálu je takový postup v pořádku. Jde o to ukázat, že maximum rozdílu funkcí e^x a $B_N(x)$ na intervalu $[0,1]$ jde s rostoucím N k nule. Pak se o funkci $B_N(x)$ říká, že lokálně stejnoměrně konverguje k e^x a limity jdou prohazovat.

Kmitání v Yukawově potenciálu

Yukawův potenciál se podobá Coulombovu potenciálu, který zahrnuje klesání síly s druhou mocninou povrchu koule. Yukawův potenciál navíc bere v úvahu, že se interakční částice se vzdáleností rozpadají stejně jako v radioaktivitě.

Budeme uvažovat potenciální energii

$$U(x) = g \frac{e^{x/\lambda}}{x}, \quad (6)$$

kde g je konstanta, kterou nebudeme specifikovat, úměrná jednak konstantě k v potenciálu, jednak veličině charakterizující interakci s částicí (něco jako náboj). Nejdříve je potřeba určit rovnovážnou polohu. Toto je možné pomocí několika metod. První metodou je použití derivace. Má-li f v bodě x_0 minimum, platí $f'(x_0) = 0$. Další hojně používanou metodou porovnávání funkce f s konstantou. Hledáme nejmenší konstantu C takovou, aby rovnice $f(x) = C$ měla právě jedno řešení. Poslední zde zmíněnou metodou, kterou také použijeme, je rozvedení dané funkce do polynomu s přesností alespoň $o(\delta^2)$ okolo předpokládaného minima⁷ x_0 . Pokud bude lineární člen nulový, je to ekvivalentní nulové derivaci v tomto bodě (viz definici derivace v druhé kapitole seriálu).

Uvažujme, že minimum je v bodě x_0 a platí $x = x_0 + \delta$ a $\delta \rightarrow 0$. Potom potenciální energii (6) platí

$$U(x) = g \frac{e^{(x_0+\delta)/\lambda}}{x_0 + \delta} = g \frac{e^{x_0/\lambda}}{x_0} \frac{e^{\delta/\lambda}}{1 + \frac{\delta}{x_0}}.$$

Ve druhém zlomku rozvineme čitatele i jmenovatele do polynomu s přesností $o(\delta^2)$ a obě závorky vzájemně vynásobíme. Jmenovatel je součtem geometrické řady s kvocientem $-\delta/x_0$.

$$\begin{aligned} U(x) &= g \frac{e^{x_0/\lambda}}{x_0} \left(1 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta^2}{2\lambda^2} + o(\delta^2)\right) \left(1 - \frac{\delta}{x_0} + \frac{\delta^2}{x_0^2} + o(\delta^2)\right) = \\ &= g \frac{e^{x_0/\lambda}}{x_0} \left(1 + \delta \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{x_0}\right) + \delta^2 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)\right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

Jak jsme uvedli výše, aby měl potenciál minimum, musí být koeficient lineárního členu roven nule. Musí proto platit $x_0 = \lambda$. Pro potenciál proto platí

$$U(x) = g \frac{e}{\lambda} \left(1 + \frac{\delta^2}{2\lambda^2} + o(\delta^2)\right).$$

⁷⁾ O minimum jde, pokud první nenulový člen rozvoje bude sudý. Pokud první nenulový bude liché člen, jedná se o inflexní bod. Samozřejmě museli bychom použít rozvoj s dostatečnou přesností.

Srovnáme nyní potenciální energii $U(x)$ s potenciální energií pružinky, která je $U_{\text{pruž}} = k\delta^2/2$. Dostaneme tuhost k odpovídající pružinky

$$\hat{k} = \frac{ge}{\lambda^3}.$$

Proto je frekvence kmitání

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ge}{m\lambda^3}}.$$

Čebyševovy polynomy

Naším cílem je ukázat, že pro každé n přirozené je $\cos(n \arccos(x))$ polynomem n -tého stupně. Omezme se pro začátek na $x \in (0, 1)$. Označme z komplexní jednotku s argumentem α . Platí tedy $z = e^{i\alpha}$. Reálnou část této komplexní jednotky označme x . Platí tedy $x = \cos \alpha$. Budeme uvažovat pouze horní polovinu jednotkové kružnice, tj. $\alpha \in (0, \pi)$.

Studujme nyní výraz $\cos(n \arccos(x))$. Užijeme identity $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

$$\cos(n \arccos(x)) = \cos(n\alpha) = \operatorname{Re}(e^{in\alpha}) = \operatorname{Re}((\cos \alpha + i \sin \alpha)^n) = \operatorname{Re}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right).$$

Zamysleme se nyní nad výše získaným výrazem. Jaké členy z binomického rozvoje budou reálné a jaké ryze imaginární? Binomická věta nám říká, jak umocňovat dvojčlen na n -tuo

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

kde kombinační číslo $\binom{n}{k}$, $k = 0, \dots, n$ najdeme jako k -té číslo na n -tém řádku Pascalova trojúhelníku. Protože víme, jak se umocňuje komplexní jednotka, víme, že

$$\begin{aligned} 2|k &\Rightarrow i^k \in \mathbb{R}, \\ 2 \nmid k &\Rightarrow i^{k-1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože člen s odmocninou v reálné části umocňujeme vždy na sudou mocninu, odmocnina vymizí! A celý výraz je tedy polynomem.

Je jasné, že polynom neobsahuje mocniny x větší než n . Stačí dokázat, že koeficient před x je nenulový. Rozpisem příslušných členů v binomickém rozvoji zjistíme, že se koeficient před x^n rovná součtu sudých členů na n -tém řádku Pascalova trojúhelníku. Ale tento součet se z konstrukce Pascalova trojúhelníku rovná součtu celého $(n-1)$ -tého řádku, který je 2^{n-1} , což je nenulové číslo.

Tímto jsme ukázali, že

$$\cos(n \arccos(x)) = P_n(x)$$

platí na intervalu $(0, 1)$. V některém dalším díle si ukážeme, že analytická funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině s hromadným bodem,⁸ což je i interval.

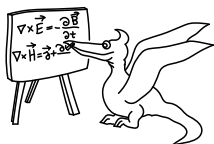
Lukáš Ledvina

lukas1@fykos.cz

Jakub Michálek

jmi@fykos.cz

⁸⁾ Hromadný bod je takový, že jeho libovolně malé okolí obsahuje alespoň jeden bod, a tedy i nekonečně mnoho bodů.



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Derivace a harmonický oscilátor

Vzpomínky na exponenciálu

Ukažme si ještě jednu názornou drobnost k exponenciále. Jinými slovy provedeme grafický důkaz Eulerovy věty bez toho, aniž bychom museli znát vlastnosti goniometrických funkcí.

Označme $z = a + bi$ a využijme možnosti roznásobení, kterou jsme dokázali minule, tj. $e^z = e^a \cdot e^{bi}$. Druhý činitel definuje Bernoulliho limita $z_n = (1 + bi/n)^n$. Pro nějaké n si nakresleme náčrtek (obr. 5). Nejprve zjistíme velikost čísla

$$|z_n| = \left(1 + \frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2} = \left(\left(1 + \frac{b^2}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/2n} \rightarrow e^{b \cdot 0} = 1.$$

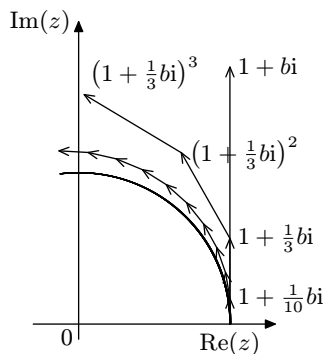
Pro $n \rightarrow \infty$ tedy leží z_n na jednotkové kružnici, stejně jako na ní leží všechna čísla $(1 + bi/n)^k$, kde $k < n$, protože ta mají menší velikost; v této posloupnosti se vždy zvyšuje argument o konstantu (definice násobení) a čísla leží přibližně na jednotkové kružnici. Obvod takto vzniklého mnohoúhelníka je vždy b , ale podle právě dokázaného se mnohoúhelník blíží ke kružnici. Tedy číslo e^{bi} je právě komplexní jednotka, jejíž oblouk od jedničky v kladném směru měří b (tak je definován úhel v radiánech). Závěr pro exponenciálu: Reálná část vzoru určuje velikost obrazu, zatímco argument obrazu určíme tak, že „namotáme“ imaginární složku vzoru na jednotkovou kružnici jako na kůl.

Pohyb v rovině

V předchozí kapitole jsme získali geometrickou představu komplexního čísla jako bodu v rovině. Nezapomínejme ale, že k této představě bodu v rovině jsme dospěli tak, že jsme konstruovali vzory jednotky na kladné reálné ose! Na komplexní čísla je proto často výhodnější pohled jako na zobrazení roviny samotné do sebe. (Exponenciální tvar komplexního čísla nám pak řekl, že tato zobrazení jsou složená otočení a roztažení.) Odtud pramení i kouzelná vlastnost komplexních čísel: Nejsou to jenom šipky z počátku, ale zároveň podobná zobrazení na těchto šípkách.

Uvažujme na chvíli trochu jiná zobrazení – shodná zobrazení roviny na sebe. Představme si mříž s roztečí ε v rovině (vodorovné a svislé přímky navzájem vzdálené o ε). Stojí za to uvést základní tvrzení, že otočení R_a této mříže kolem libovolného bodu roviny a je totéž jako otočení o stejný úhel kolem počátku $R_0 = e^{i\vartheta}$ a nějaké posunutí $T_a = a +$. To vyplývá z toho, že obrazovou souřadnicovou mříž lze na vzorovou mříž převést prostě posunutím obrazového počátku zpět do vzorového počátku a otočením, rovnoběžnost i vzdálenost mřížových přímek se totiž zachovávají. Samotné zobrazení R_a pak lze provést oklikou

$$R_a = T_a R_0 T_{-a},$$

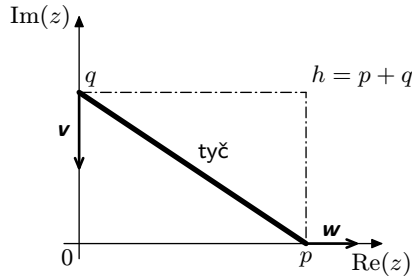


Obr. 5. Bernoulliho limita

kde posunutí T_{-a} a T_a jsou navzájem inverzní, čili jejich složení dá dohromady jednotku $1 = T_{-a}T_a = T_aT_{-a}$. Dosazením konkrétního tvaru operátorů, např. $T_{-a} = -a +$ dostaneme

$$z' = a + (-a + z)e^{i\vartheta} = a - ae^{i\vartheta} + ze^{i\vartheta},$$

odkud vyplývá, že celou transformaci můžeme také psát $T_v R_0$, kde $v = a(1 - e^{i\vartheta})$. Naopak libovolnou kombinaci otočení R_0 a následného posunutí lze zapsat jako otočení kolem jednoho konkrétního bodu h (viz úloha). Tento bod se nazývá pól a v jednoduchých případech lze ho najít jako průsečík přímek kolmých na rychlost (obr. 6).



Obr. 6. Padající tyč

Derivace

Derivace je strašné slovo a komplexní derivace ještě horší. Naštěstí právě opak je pravdou a komplexní derivace je velice jednoduchý koncept. Uvažujme komplexní funkci $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pak ve vyšetřovaném bodě z_0 je derivace A , pokud

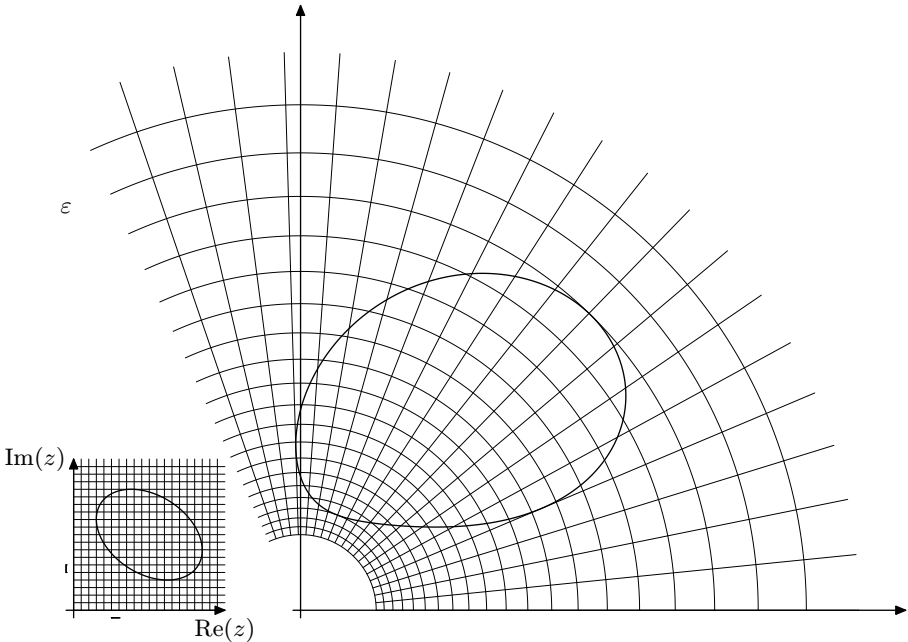
$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z), \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (7)$$

kde $\Delta z = z - z_0$ je komplexní číslo mířící z vyšetřovaného bodu z_0 do jiného bodu z v okolí a $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ odpovídá rozdílu funkčních hodnot. Definici (7) budeme ekvivalentně zapisovat

$$df = A dx \Leftrightarrow A = \frac{df}{dx}$$

Je velice přísné žádat, aby tato podmínka platila pro všechny body na nějakém malém okolí vyšetřovaného bodu z_0 . Jinými slovy požadujeme, aby na malém okolí vyšetřovaného bodu šlo rozdíl funkčních hodnot psát jako součin nějaké komplexní konstanty A a rozdílu poloh dz . To ale znamená, že rozdíl funkčních hodnot je na uvažovaném okolí vždycky přibližně roven rozdílu poloh, který je vhodně pootočen a roztažen! Násobení komplexním číslem je totiž zobrazení odpovídající otočení a roztažení; dále budeme mluvit o *kroutové vlastnosti* (angl. amplitwist, něm. Drehstreckung).

Pro zajímavost si ukažme základní důsledky kroutové vlastnosti. Na okolí bodu z_0 , na kterém má funkce derivaci, uvažujme souřadnicovou čtvercovou mříž o malé rozteči ε (viz obr. 7). Pak podle kroutové vlastnosti bude obraz mříže na malém okolí bodu z_0 jiná čtvercová mříž, akorát roztažená a pootočená. Na větším okolí už čtverečky budou sice různě velké, ale podle kroutové vlastnosti zůstanou přibližně čtverečky.

Obr. 7. Zobrazení mříže funkcí e^z

- a) Pro strany obrazového čtverce můžeme psát přibližně $f(z_0 + \varepsilon) - f(z_0) = f_x \varepsilon + o(\varepsilon)$ a $f(z_0 + i\varepsilon) - f(z_0) = f_y \varepsilon + o(\varepsilon)$, kde f_x a f_y jsou derivace funkce ve směru vodorovné a svislé osy. To znamená, že ve vztahu (7) se omezujeme na dz reálné nebo ryze imaginární. Podle krouživé vlastnosti však obraz čtverce musí být čtverec, takže ihned dostáváme *Cauchyho-Riemannovy podmínky*

$$f_y = if_x.$$

Pokud funkce nespĺňuje ani tyto podmínky, nemá krouživou vlastnost a nemůže mít derivaci (jedná se například o funkci absolutní hodnota, reálná část).

- b) Uvažujme čtvereček o straně ε , který se zobrazí na jiný čtvereček. Spočítáme cirkulaci po obvodu toho malého čtverečku. Cirkulací přitom rozumíme, že sečteme u všech čtyř stran funkční hodnoty ve středu strany vynásobenou hranou jako komplexním číslem.⁹ Například první hraně odpovídá přímo z definice derivace obraz $A\varepsilon$, další je vždy násobená i:

$$\text{Cirkulace} = A\varepsilon(f(z_1) - f(z_3)) + iA\varepsilon(f(z_2) - f(z_4)) = o(\varepsilon^2),$$

kde jsme využili definice derivace, že $f(z_1) - f(z_3) = A\varepsilon + o(\varepsilon)$ a $f(z_2) - f(z_4) = Ai\varepsilon + o(\varepsilon)$. Chceme-li vypočítat cirkulaci po nějaké uzavřené křivce je to to samé, jako bychom sečetli cirkulace přes všechny malé čtverečky uvnitř. Příspěvky uvnitř oblasti se vzájemně vyruší kvůli shodné orientaci sousedních čtverečků. Cirkulace okolo každého z nich je $o(\varepsilon^2)$, celkový

⁹⁾ Cirkulace je užitečná, protože vystupuje ve fyzikálních rovnicích. Například u rychlosti vody odpovídá vírovosti funkce, tj. pokud bychom na hladinu položili malé pádélko, roztáčelo by se úměrně cirkulaci.

počet čtverečků je úměrný ε^{-2} , protože jde o konečný rovinný problém. Bude-li síť dostatečně hustá, celková cirkulace pro křivku se rovná $o(\varepsilon^2)\varepsilon^{-2} = o(1) \rightarrow 0$. Se zmenšujícím se průměrem čtverečků tedy cirkulace po libovolné křivce, uvnitř níž má funkce derivaci, mizí. Toto tvrzení se nazývá *Cauchyho věta* a obvykle se zapisuje cirkulace zapisuje integrálem

$$\text{Cirkulace} = \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Tato dvě tvrzení lze použít při řešení parciálních diferenciálních rovnic v rovině, čemuž se budeme věnovat v příští kapitole.

Derivace základních funkcí

Derivace mocninných funkcí jsme odvodili v nulté kapitole, platí totiž $d(z^n) = nz^{n-1} dz$. Exponenciála se derivuje na sebe samu $d(e^z) = e^z dz$, jak vyplývá z použití vzorce pro mocninou funkci¹⁰

$$\frac{d\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}{dz} = \frac{n\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1}}{n\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \rightarrow \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow e^z.$$

Ovšem pokud se spokojíme s komplexní exponenciálou $z(t) = e^{i\omega t}$ reálné proměnné t , má komplexní derivace mimořádně jednoduchou grafickou interpretaci. Funkce $z(t)$ udává polohu a její derivace $\dot{z}(t)$ udává rychlost (obr. 8). Při derivování lineárního členu vypadne konstanta před t , takže rychlost se rovná poloze násobené $i\omega$ a rychlost je kolmá na polohu. Protože $|z| = 1$, pohybuje se sledovaný bod po jednotkové kružnici s úhlovou rychlostí ω . Podrobně byl tento případ probrán v úloze Smrtící kolotoč (IV.3 v XXIII. ročníku).

Ústřední důvod použití komplexní exponenciály je tedy ten, že pro monochromatické vlny $z(t) = re^{i\omega t}$ lze složité derivování nahradit prostým násobením:

$$\frac{d}{dt} = i\omega. \quad (8)$$

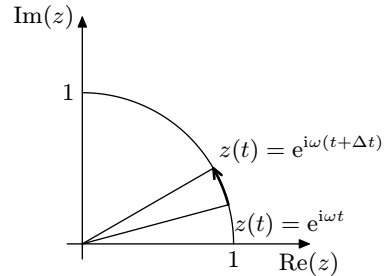
Klíčem k obecnému řešení je fakt, že každou vlnu můžeme zapsat jako vhodný součet velkého množství monochromatických vln. K této identitě se ještě vrátíme, až budeme zavádět spektrum, které má řadu fyzikálních použití.

Harmonický oscilátor

Pro závaží hmotnosti m na pružince o tuhosti k plyne z Hookova zákona pohybová rovnice

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

¹⁰⁾ Samozřejmě pro přehození limity a derivace musí být splněny jisté podmínky. Posloupnost musí být lokálně stejnoměrně konvergentní, což jsme ověřili v řešení úloze k předchozí kapitole seriálu.



Obr. 8. Rovnoměrný pohyb po kružnici

Dvojit aplikaci (8) na pravou stranu bychom pro případ, že kdyby bylo místo x komplexní z , dostali podmínku $\omega^2 = k/m$. Tomu odpovídá kladný a záporný kořen a řešení musí být tvaru součtu $z(t) = re^{i\omega t} + se^{-i\omega t}$. Ale co je proboha komplexní poloha u harmonického oscilátoru? Stačí si uvědomit, dvě komplexní čísla jsou si rovná, pokud se rovnají jejich reálné a imaginární části, a platí tedy třeba $x(t) = \operatorname{Re}(z(t))$ pro vhodné konstanty r a s , které určíme ze znalosti počáteční polohy $r + s$ a počáteční rychlosti $\omega(r - s)$.

Tedy přeznačíme proměnné, abychom ukázali trochu jiný pohled na věc, kterým se snadno řeší třeba vlnová rovnice. Stačí nám vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, který platí pro A a B za předpokladu, že $AB = BA$ neboli $[AB] = 0$ (komutují). V našem případě jsou poloha $x(t)$ a hybnost $p(t) = m dx/dt$ funkce reálné proměnné a bodově násobené funkce samozřejmě komutují. Potom se energie rovná

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{(p + i\alpha x)(p - i\alpha x)}{2m},$$

kde $\alpha^2 = km$. Zjevně jsme tedy dostali výraz tvaru $E = z\bar{z}$, přičemž $z = p + i\alpha x$. Ze zákona zachování energie musí energie být konstantní, což lze snadno splnit, pokud $z = \text{konst.}$ Posunutím celého systému $x \mapsto x + x_0$, při kterém se hybnost nemění, lze zajistit $z = 0$, takže dostáváme rovnici

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -i\omega z,$$

což je definiční rovnice exponenciály $z = re^{-i\omega t}$. Druhé nezávislé řešení $\bar{z} = se^{i\omega t}$ je komplexně sdružené; naše výsledky se shodují s předchozí částí.

Ve kvantové mechanice postupujeme úplně stejně, akorát místo funkcí času jsou x a p lineární zobrazení stavového prostoru na sebe (operátory). Tyto operátory ale na rozdíl od bodového násobení splňují komutační relace $[xp] = i\hbar \neq 0$, takže se za součinem $z\bar{z}$ objeví ještě jednotka, která stojí za tím, že vlastní stavy tvoří nekonečný „žebřík“ a z a \bar{z} se nazývají anihilační a kreační operátor, které posouvají o číslované stavy na nekonečném žebříku o jednotku dolů nebo nahoru.

Elektrické obvody

Ukažme si jednoduchou fyzikální aplikaci harmonického oscilátoru – střídavé elektrické obvody. Co znamená, že nějaký obvod má komplexní odpor?

Uvažujme elektrický obvod, ve kterém se nachází pouze cívky, kondenzátory a odpory. Nesporná výhoda těchto součástek je jejich linearita.

a) Připojíme-li na rezistor dvakrát větší napětí, procházející proud bude také dvakrát větší:

$$U = RI, \quad (9)$$

kde U značí napětí, I proud a R odpor.

b) Pokud na cívku připojíme dvakrát větší napětí protékající proud bude růst dvakrát rychleji. Konstanta, která svazuje napětí se změnou proudu se nazývá indukčnost L a platí

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (10)$$

Na pravé straně se občas píše znaménko mínus, které vyjadřuje Lenzův zákon, že indukované napětí má opačný směr než změna proudu. My ale cívku považujeme za spotřebič, nikoliv zdroj napětí, a proto mínus nepíšeme.

c) Pro kondenzátor o kapacitě C platí

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}. \quad (11)$$

K takovému obvodu připojíme střídavé napětí o úhlové frekvenci ω

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad (12)$$

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (13)$$

kde U_0 a I_0 jsou komplexní konstanty.

Nyní byste se ale měli zděsit! Nebo snad už ne? Co je to komplexní napětí či proud? Správná odpověď je nic. Pokud budeme měřit napětí či proud, vždy změříme pouze reálnou složku. Je ale užitečné s ním počítat, protože změnu fáze pak zařídíme pouze vynásobením komplexní jednotkou.

Zavedení impedance

Podívejme se nyní, co se stane, pokud dosadíme (12) a (13) do rovnic (9) až (11). Označme $Z = U/I$ a řekněme této veličině impedance.

a) Pro impedanci rezistoru platí

$$Z_R = R.$$

b) Jak to je s impedancí cívky? Na pravé straně výrazu (10) se vyskytuje derivace a té se musíme zbavit; využijeme výše zmíněný fakt, že pro monochromatickou vlnu (zde harmonické napětí) přechází diferenciální rovnice na algebraické:

$$L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI_0 e^{i\omega t}}{dt} = LI_0 i\omega e^{i\omega t} = LI i\omega.$$

Pro impedanci cívky proto platí

$$Z_L = \frac{U}{I} = i\omega L.$$

c) Pro kondenzátor obdobným postupem získáme

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Velikost a fáze impedance

Podívejme se nyní, co znamená reálná a imaginární část impedance (kartézský tvar), resp. fáze a velikost (goniometrický tvar).

Vyjděme z definičního vztahu impedance $Z = U/I$. Vypočtěme velikost levé i pravé strany této rovnice.

$$|Z| = \left| \frac{U}{I} \right| = \frac{|U|}{|I|} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Vhodnou volbou časového počátku zařídíme, aby U_0 bylo reálné. Dále platí $I = U/Z$, a proto fáze impedance udává zpoždění proudu vůči napětí. Platí stará poučka *Cívka je jako dívka: Nejdřív napětí, potom proud.*

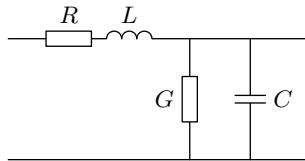
Ještě si odvodíme základní pravidla pro vzájemné řazení impedancí.

- Řadíme-li sériově, je stejně jako v případě odporů celkové napětí rovno součtu parciálních napětí, a proto se impedance sčítají.
- Pro paralelní řazení je celkový proud součtem parciálních proudů a sčítají se převrácené hodnoty impedancí.

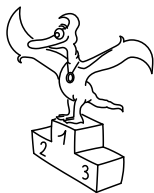
Další metodou řešení užívanou převážně na střední škole je tzv. fázorová. Fázor totiž reprezentuje zmiňovanou amplitudu napětí resp. proudu a impedance je poměr komplexního čísla reprezentujícího napětí a proud.

Úloha II. S ... zakomplexovaná

- Po jaké trajektorii (polodii) se pohybuje pól při pohybu tyče padající v rohu? Vyřešte užitím komplexních čísel.
- Pro $\varepsilon \rightarrow 0$ uvažujte otočení o úhel ε , které zapisujeme R_ε , a posunutí T_ε . Vyšetřete a porovnejte zobrazení $R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon}$ a komutátor $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$.
- Otočení jsme v úvodní poznámce poskládali z miniaturních otočení $e^{i\theta} = (1 + i\theta/N)^N$. Dokážete pomocí exponenciály zapsat také posunutí funkce?
- Nakreslete obrázek, na co funkce z^2 zobrazí mříž rozteče ε . Za bonus můžete nakreslit obraz mříže po funkci $\cos(z)$.
- Pomocí komplexních čísel spočtete impedanci střídavého obvodu série cívky, rezistoru a paralelně zapojeného kondenzátoru s odporem, přičemž obvod pokračuje iterativně dále (viz obr. 9).



Obr. 9. Koaxiální kabel



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	8	6	36	100	36
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	5	1	3	5	4	3	7	28	78	28
2. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	3	2	4	5	2	2	24	67	24
3. <i>Jakub Kubečka</i>	G, Nymburk	3	4	1	3	5	0	–	16	53	16
4. <i>Jakub Maksymov</i>	G a SOŠ, Jaroměř	1	1	–	–	5	5	–	12	57	12
5.–6. <i>Tomáš Bárta</i>	G, Nad Štolou Praha	3	–	2	–	3	–	2	10	53	10
<i>Gabija Maršalkaite</i>		4	1	2	–	3	–	–	10	59	10
7. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	1	–	–	4	–	–	9	69	9
8.–9. <i>Samuel Havadej</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	–	1	–	4	–	–	7	54	7
<i>Bedřich Said</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	2	3	1	1	–	–	–	7	41	7
10.–12. <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	2	–	1	3	–	–	–	6	46	6
<i>Ondřej Míl</i>	Jiráskovo G, Náchod	2	4	–	–	–	–	–	6	75	6
<i>Kristýna Nešporová</i>	G, Boskovice	3	–	0	–	3	–	–	6	46	6
13. <i>Alena Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	3	–	1	–	–	–	–	4	50	4
14.–15. <i>Lucia Filová</i>	Hotelová akadémia, Brezno	1	–	–	–	–	–	–	1	25	1
<i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	1	–	1	13	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	8	6	36	100	36
1.–2. <i>Jan Brandejs</i>	G Christiana Dopplera, Praha	4	–	3	3	5	2	–	17	65	17
<i>Martin Bucháček</i>	G Ludka Pika, Plzeň	2	2	5	4	–	–	4	17	74	17
3. <i>Ivo Vinklárek</i>	G, Rožnov p. Radhoštěm	4	3	2	2	–	–	–	11	65	11
4. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	3	1	–	–	4	–	2	10	53	10
5. <i>Jan Sopoušek</i>	Gymnázium, Brno-Řečkovice	2	1	2	–	3	–	1	9	39	9
6. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	1	3	–	–	4	–	–	8	62	8
7. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	2	1	2	–	–	1	1	7	27	7
8. <i>Vojtěch Havlíček</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	4	–	–	–	–	–	6	75	6
9.–10. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	–	–	–	–	–	3	5	50	5
<i>Jakub Kocák</i>	G L. Svobodu, Humenné	4	1	–	–	–	–	–	5	63	5
11. <i>Tomáš Havelka</i>	G, Neumannova, Žďár n. S.	3	–	1	–	–	–	–	4	50	4

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	8	6	36	100	36
1. <i>Tomáš Kořínek</i>		2	2	0	–	4	–	–	8	47	8
2. <i>Jan Palounek</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	2	4	–	–	6	60	6
3. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	2	–	–	–	–	–	–	2	50	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	8	6	36	100	36
1. <i>Jakub Šafín</i>	G, P. Horova, Michalovce	3	1	1	2	5	8	4	24	67	24
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	4	1	1	–	4	–	5	15	65	15
3. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	2	3	1	–	4	3	–	13	52	13
4.–5. <i>Tomáš Axman</i>	G, Boskovice	2	3	–	2	4	1	–	12	46	12
<i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	4	–	1	3	–	–	4	12	63	12
6.–7. <i>Jiří Juřena</i>	G, Uherské Hradiště	3	3	–	–	5	–	–	11	85	11
<i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	4	1	–	–	5	1	0	11	41	11
8.–10. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	4	1	–	–	5	–	–	10	77	10
<i>Martin Gajdošik</i>	G, Uherské Hradiště	–	3	–	2	5	–	–	10	71	10
<i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	5	3	2	–	–	–	–	10	83	10
11. <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	2	–	–	–	4	2	–	8	47	8
12. <i>Lukáš Fusek</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	2	5	–	–	7	70	7
13. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	–	2	–	–	–	3	33	3
14.–16. <i>Vojtěch Erbrt</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	2	–	–	–	–	–	–	2	50	2
<i>Klára Kymlová</i>	G a SOŠE, Sedlčany	2	–	–	–	–	–	–	2	50	2
<i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	–	–	–	2	50	2

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://www.fykos.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.