24. ročník, úloha IV . 2 ... hoď ho do Slunce! *!!! chybí statistiky !!!*

Karel se rozhodl zahodit svůj sešit matematické analýzy na Slunce. Poradíte mu, jakou minimální rychlost sešitu musí udělit, aby sešit na Slunce dopadl? Pro jednoduchost zanedbejte odporové síly, Zemi a Slunce považujte za hmotné body, sešit vypouštíme ze vzdálenosti $R_Z = 6378\,\mathrm{km}$ od hmotného bodu symbolizujícího Zemi, vůči kterému je sešit v klidu a Země obíhá Slunce po dokonalé kružnici. Konstanty, které se vám budou hodit: $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$, $M_S = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $M_Z = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $a = 1\,\mathrm{AU} = 150 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$.

Karel si vybíjel vztek po neúspěšné zkoušce

Sešitu je potřeba udělit takovou rychlost, aby jednak mohl opustit Zemi (ve směru přímo na Slunce) a pak ještě takovou, aby přišel o moment hybnosti vůči Slunci, aby na něj mohl řachnout (kolmo na předchozí). Pokud by totiž zůstala nějaká nenulová rychlost kolmá na spojnici sešit-Slunce, pak by sešit nikdy neprošel hmotným bodem, za který Slunce máme považovat. Celková rychlost pak bude vektorovým součtem těchto rychlostí.

Vypočtěme nejprve úlohu za předpokladu, že v blízkosti povrchu Země je zanedbatelný gravitační vliv Slunce jako první přiblížení. V první části určíme únikovou rychlost ze Země v_1. (Ta se dá případně najít v tabulkách.) Vypočítáme ji ze zákona zachování energie. Kinetická energie sešitu je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost sešitu a v je jeho rychlost. Potenciální energie ve vzdálenosti r od těžiště Země je

$$E_p(r) = -\frac{\varkappa m M_\mathrm{Z}}{r}\,.$$

Je vidět, že potenciální energie roste, pokud r roste a pro nekonečně velké r jde k 0.

$$\begin{aligned}E_p(\infty) - E_p(R_\mathrm{Z}) &= E_k(v_1)\,,\\ \frac{\varkappa m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}} &= \frac{1}{2}mv_1^2\,,\\ v_1 &= \sqrt{\frac{2\varkappa M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}}\,.\end{aligned}$$

Aby tedy těleso mohlo opustit gravitační vliv Země a uniknout do „nekonečna“, tak musí mít rychlost $v_1 \approx 11{,}2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Druhá rychlost je vlastně oběžná rychlost v_2 Země kolem Slunce (což se dá také najít v tabulkách). Tu vypočteme z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\begin{aligned}F_d = \frac{mv_2^2}{a} &= \frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{a^2} = F_\mathrm{g}\,,\\ v &= \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{a}}\,.\end{aligned}$$

Oběžná rychlost je tedy $v_2 \approx 29{,}8\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Celková rychlost, kterou musíme dodat sešitu tedy bude

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,,\\ v &= \sqrt{\varkappa\left(\frac{2M_\mathrm{Z}}{R_Z} + \frac{M_\mathrm{S}}{a}\right)}\,.\end{aligned}$$

Výsledek je $v \approx 31{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Toto je ovšem nejjednodušší přiblížení.

Přesnější postup je uvažovat, že rychlost v_1 je určena překonáním potenciálové hradby, která není tak vysoká jako je pro únik do nekonečna. Pro potenciál částice hmotnosti m na úsečce mezi Sluncem a Zemí ve vzdálenosti r od těžiště Země platí

$$\tilde{E}_p = -\frac{\varkappa m M_\mathrm{Z}}{r} - \frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{a - r}\,.$$

Potřebujeme najít místo s nejvyšší hodnotou potenciálu. Zderivujeme potenciální energii podle r a derivaci pak položíme rovnou 0, čímž

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{E}_p}{\mathrm{d}r} = \frac{m M_\mathrm{Z}}{r^2} - \frac{m M_\mathrm{S}}{(a-r)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_\mathrm{Z}(a-r)^2 = M_\mathrm{S} r^2\,.$$

Vychází nám kvadratická rovnice $(M_\mathrm{S} - M_\mathrm{Z})r^2 + 2M_\mathrm{Z} a r - M_\mathrm{Z} a^2 = 0$, jejíž řešení je

$$r_{1,2} = \frac{-2M_\mathrm{Z} d \pm \sqrt{4M_\mathrm{Z}^2 a^2 + 4M_\mathrm{Z}(M_\mathrm{S} - M_\mathrm{Z})a^2}}{2(M_\mathrm{S} - M_\mathrm{Z})} = \frac{-M_\mathrm{Z} \pm \sqrt{M_\mathrm{S} M_\mathrm{Z}}}{M_\mathrm{S} - M_\mathrm{Z}} d\,,$$

přičemž na úsečce mezi Zemí a Sluncem leží řešení s kladným znaménkem. Pokud dosadíme tuto vzdálenost, kterou označíme r_1, do vztahu pro potenciální energii, pak dostáváme

$$\tilde{E}_p(r_1) = -\varkappa m \frac{M_\mathrm{Z} a + r_1(M_\mathrm{S} - M_\mathrm{Z})}{r_1(a - r_1)} = -\varkappa m \frac{M_\mathrm{S} + 2\sqrt{M_\mathrm{S} M_\mathrm{Z}} + M_\mathrm{Z}}{a}\,.$$

Potenciální energie sešitu v místě vypuštění byla

$$\tilde{E}_0 = -\frac{\varkappa m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}} - \frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{a - R_\mathrm{Z}}\,.$$

Rychlost v_1 pak přesněji určíme ze vztahu

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \tilde{E}_p(r_1) - \tilde{E}_0\,.$$

Číselně pak vychází $v_1 \approx 10{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, což je jenom zhruba o $0{,}3\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ odlišný výsledek od toho, kde jsme zanedbali gravitační vliv Slunce v blízkosti Země. Celková rychlost, kterou by pak měl mít sešit na začátku pohybu je $v \approx 31{,}7\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Je vidět, že korekce je v řádu procent a původní odhad by byl docela dobrý. I tento výsledek je jenom odhad, protože jsme zanedbali to, že celá soustava rotuje, relativistické efekty a i další vlivy, které se ovšem budou projevovat na výsledné hodnotě jenom v nízké míře (jsou to tzv. vlivy vyšších řádů).

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`