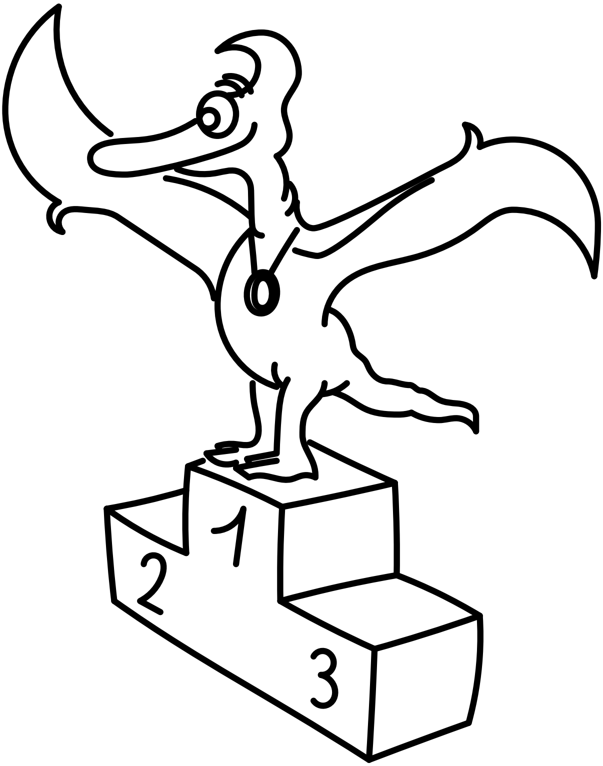
Řešení úloh 6. ročníku FYKOSího Fyziklání



Úloha 1 ... běžec

Za kolik sekund přibližně ujde člověk světelný rok? *Lukáš chtěl jít na výlet.*

Světelný rok je vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok, tj. $3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot (365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}) = 9{,}467 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$. Pro čas platí $t = s/v$. Normální rychlost chůze je $v \approx 1\,\mathrm{m/s}$. Proto potřebný čas je $t \approx 1 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s}$.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha 2 ... zákeřné hmotnosti

Poloměr Země je 6 378 km. *Objekt o hmotnosti* 20 kg *je umístěn do výšky* 160 km *nad zemský povrch. Jaká bude hmotnost předmětu v této výšce?*

Janap si házela s knihou Schaum's 3000 Solved Problems in Physics.

Jednoduchá trikovka, hmotnost objektu nemá důvod se měnit.

Jana Poledniková
`janap@fykos.cz`

Úloha 3 ... oxid uhličitý

V nádobě je 300 g *oxidu uhličitého při tlaku* 1,35 MPa *a teplotě* 77 °C. *Po určité době teplota nádoby poklesla na teplotu okolí* 22 °C *a uvnitř byl naměřen tlak* 0,87 MPa. *Kolik gramů plynu uniklo stěnami nádoby? Oxid uhličitý považujte za ideální plyn.*

Dominika si hrála se stříkačkou.

Objem nádoby, tedy ani plynu, se nemění. Ze stavové rovnice tedy máme rovnost

$$n_1 R T_1 / p_1 = n_2 R T_2 / p_2 \,. \tag{1}$$

Látkové množství plynu je přímo úměrné jeho hmotnosti, z rovnosti (1) tedy máme $m_2 = m_1 p_2 T_1 / (p_1 T_2)$. Plynu uniklo právě $m = m_1 - m_2 \approx 71\,\mathrm{g}$.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha 4 ... černá díra

Najděte rozměrovou analýzou vzorec pro poloměr černé díry R, který závisí na gravitační konstantě G, hmotnosti díry M a rychlosti světla c. Ve vzorci se vyskytuje bezrozměrná konstanta 2.

Dominika našla děrovačku.

Očekáváme vzorec ve tvaru $R = G^\alpha M^\beta c^\gamma / 2$. Například z Newtonova gravitačního zákona vyjádříme $[G] = \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg{\cdot}s}^2)$. Pro kilogramy dostáváme podmínku $\alpha = \beta$ a pro sekundy zase $2\alpha + \gamma = 0$. Výsledek očekáváme v metrech, takže platí

$$1 = 3\alpha + \gamma = \alpha + (2\alpha + \gamma) = \alpha \,.$$

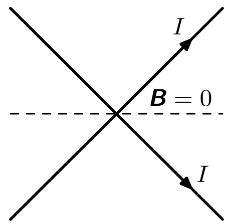
Teď už jen zpětným dosazením dostaneme výsledek $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, -2)$.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha 5 ... vodiče

Dva navzájem kolmé vodiče s proudem I vedou těsně přes sebe, ale nedotýkají se. Kde se nacházejí body, ve kterých je nulová intenzita magnetického pole (nakreslete)?

Bum si hrála s kompasem.



Aby se v nějakém bodě prostoru vyrušilo magnetické pole od dvou vodičů, musí být současně velikost vektorů magnetických intenzit stejná a jejich směr opačný. Stejná velikost magnetických polí nastává v bodech stejně vzdálených od obou vodičů, tedy na dvou rovinách kolmých na rovinu vodičů i navzájem dělících „kvadranty". Aby se odečetly vektory, musí mít všude opačné složky, ale pro pole od jednoho vodiče platí, že nemá složku rovnoběžnou se směrem proudu. Takže když má jedno pole nulovou složku ve směru vodiče, i druhé pole musí mít tyhle složky nulové, což nastává pouze v rovině vodičů. Body, kde platí obě podmínky, tvoří kříž, který vznikne otočením původních vodičů o $\pi/4$ okolo jejich průsečíku. Nakonec pomocí Ampérova pravidla zjistíme, že na vodorovné ose se vektory elektrické intenzity odečtou, a na svislé ose se naopak sečtou. Nulové pole je tedy tam, kde se odečtou příspěvky od obou vodičů – na vodorovné ose.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha 6 ... Nestrkej ty prsty do vrtule!

Jaká je obvodová rychlost vrtule? Vrtule má průměr $D = 12''$, (jeden palec je 2,54 cm), motor má 14 000 otáček za minutu. Uveďte v metrech za sekundu. *Lukáš se sekl o vrtuli.*

Pro rychlost pohybu po kružnici platí $v = \omega R$, kde R je poloměr a $\omega = 2\pi f$ je úhlová rychlost, resp. frekvence otáčení. Musíme správně převést jednotky, dosazovat za poloměr, nikoli průměr. Dosazením vyjde $v = \pi D f \approx 223\,\mathrm{m/s}$.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha 7 ... kytička Dominička

Dominika stojí 2 m od velkého zrcadla zavěšeného na stěně a drží malé zrcátko půl metru za hlavou. Jak daleko za velkým zrcadlem je obraz květiny, kterou má ve vlasech?

Dominika jela do San Francisca.

Obraz květiny v malém zrcátku je tak daleko za zrcátkem, jak daleko je květ před ním – 0,5 m. Obraz květiny je ve velkém zrcadle ještě o 2 m dále, takže dohromady je obraz květiny 3 m za velkým zrcadlem.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha 8 ... koule kuličky

Měděná kulička o hmotnosti $2\,\mathrm{g}$ *obsahuje* $2\cdot 10^{22}$ *atomů. Náboj na jádru každého atomu je* $29e$*. Jaký zlomek elektronů musíme odstranit, aby náboj celé kuličky byl* $+2\,\mu\mathrm{C}$*?*

Janap a její Schaum's 3000 Solved Problems in Physics.

Zjistíme, jak velký náboj v jednotkách elektronů má celá kulička. N počet atomů a N_e počet elektronů. Platí $N_\mathrm{e} = 29N$. Chceme získat náboj $q = 2\,\mu\mathrm{C}$. V tabulkách vyhledáme náboj elektronu $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C. Počet elektronů pro vygenerování dostatečného náboje je $n_\mathrm{e} = q/e$. Nakonec dáme do poměru a vyčíslíme $n_\mathrm{e}/N_\mathrm{e} = 2{,}16\cdot 10^{-11}$.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Úloha 9 ... vyžraný Měsíc

O Měsíci je známo, že předměty zde mají cca šestkrát nižší váhu než na Zemi. Spočítejte jeho hmotnost, je-li poloměr $R_M = 1{,}738\cdot 10^6$ m.

Janap a její Schaum's 3000 Solved Problems in Physics.

Budeme brát testovací tělísko o hmotnosti m_1. Je-li gravitační zrychlení na Zemi $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, pak na Měsíci je $g_\mathrm{M} = g_\mathrm{Z}/6$. Použijeme Newtonův gravitační zákon

$$F = G\frac{Mm_1}{r^2}\,,$$

za F dosadíme $m_1 g_\mathrm{Z}/6$, $r = R_\mathrm{M}$. Číselně vyjde $M = g_\mathrm{Z} R_\mathrm{M}^2/(6G) \approx 7{,}4\cdot 10^{22}$ kg.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Úloha 10 ... míček

Do jaké výšky nad hladinu vyskočí míček o hustotě $\varrho = 450\,\mathrm{kg/m^3}$*, byl-li ponořen do vody do hloubky* $h = 1$ m *a uvolněn? Velikost míčku je mnohem menší než hloubka* h *a hustota vzduchu je zanedbatelná. Povrchové napětí a vnitřní tření ve vodě i na vzduchu zanedbejte.*

Aleš si hrál.

Dále budeme ϱ značit hustotu míčku, ϱ_v hustotu vody a v rychlost, kterou míček vyletí nad hladinu. Na míček bude působit výsledná síla daná rozdílem síly vztlakové a tíhové

$$F = V\varrho_\mathrm{v} g - V\varrho g = V\varrho a\,,$$

kde V je objem míčku a a zrychlení, se kterým se míček ve vodě pohybuje. Vyjádřením zrychlení a a použitím vztahů $h = at^2/2$ dostáváme pro rychlost, se kterou míček vyletí z vody,

$$v = at = \sqrt{2gh\left(\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho} - 1\right)}\,.$$

Použitím zákona zachování energie získáme

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh'\,,$$

kde h' je námi hledaná výška, do které míček vyletí. Tedy

$$h' = \frac{v^2}{2g} = h\left(\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho} - 1\right) .$$

Dosazením zadaných hodnot dostáváme $h' = 1{,}22\,\mathrm{m}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha 11 ... výstup na Rysy

Turista pije pouze mléko. Výživová hodnota mléka je $Q = 1\,900\,\mathrm{kJ/l}$. Kolik mléka musí vypít, aby vylezl na vrchol, který má výšku $h_2 = 2\,499\,\mathrm{m\,n.\,m.}$, z výšky $h_1 = 1\,350\,\mathrm{m\,n.\,m.}$? Hmotnost turisty je $M = 100\,\mathrm{kg}$. Uvažujte pouze změnu potenciální energie, účinnost chůze je $\eta = 20\,\%$, zanedbejte změny hmotnosti během cesty včetně hmotnosti mléka. *Lukáš šel na výlet.*

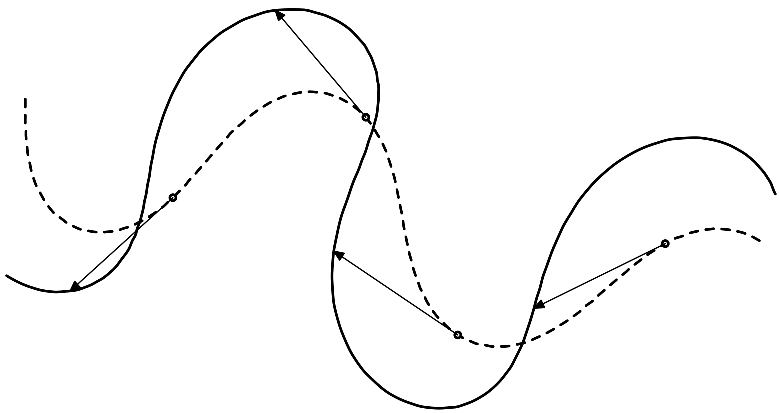
Energie potřebná k výstupu je $E = Mg(h_2 - h_1)/\eta = 1{,}13\,\mathrm{MJ}$, proto musí turista vypít $V = E/Q = 2{,}97\,\mathrm{l}$ mléka.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha 12 ... alkohol za řídítka nepatří

Na obrázku jsou trajektorie bodů dotyku předního a zadního kola bicyklu. Určete směr jízdy a která stopa patří kterému kolu.

Michal údajně odposlouchával přijímací pohovor na Dept. of Engineering na Cambridge.



Obr. 1: Polohy bicyklu nechávajícího otisk

Jelikož zadní kolo se při jízdě jenom „dotahuje“ na kolo přední, bude jeho trajektorie více vyhlazená, z obrázku je to tedy čárkovaná stopa.

Pořádně určit směr i stopu zadního kola lze podle následujícího invariantu. Směr zadního kola z konstrukce kola vždy směřuje k přednímu kolu, a tak tečna křivky zadního kola protíná stopu předního kola v konstantní vzdálenosti – rozvoru obou náprav. Zkusíme si tedy udělat na několika místech tečnu k trajektoriím a ověřit, pro kterou ze čtyř možností platí uvedený invariant (správná možnost je zakreslena v obrázku 1).

Pro zadanou situaci platí, že kolo jelo zprava doleva a čárkovaná stopa patří zadnímu kolu.

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha 13 ... totální nasazení

Plná ocelová tyčka má průměr $d_1 = 3{,}000\,\mathrm{cm}$ *při teplotě* $25\,^\circ\mathrm{C}$. *Tenký mosazný prstenec má vnitřní průměr* $d_2 = 2{,}992\,\mathrm{cm}$ *při* $25\,^\circ\mathrm{C}$. *Při jaké společné teplotě můžeme nasadit prstenec na tyč, aby mezi nimi nebyla ani vůle, ani přesah? Koeficient teplotní délkové roztažnosti je* $\alpha_1 = 11 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ *pro ocel a* $\alpha_2 = 19 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ *pro mosaz.* *Dominika – konstruktérka.*

Po změně na hledanou teplotu budou mít prstenec i tyčka průměr d. Prstenec je tenký, a proto se výrazně změní jen v jednom rozměru – obvodu, platí

$$\pi d = \pi d_2(1 + \alpha_2 \Delta t)\,.$$

Tyč se pro změnu roztahuje plošně, koeficient plošné teplotní roztažnosti je přibližně roven $2\alpha_2$. Pro plochu tyčky tedy platí

$$\pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{d_1^2}{4}(1 + 2\alpha_1 \Delta t)\,.$$

Po vyjádření d z obou rovnic, porovnání a zanedbání malého členu $\alpha_2^2 \Delta t^2$ dostáváme výsledek

$$\Delta t = \frac{d_2^2 - d_1^2}{2d_1^2\alpha_1 - 2d_2^2\alpha_2}\,,$$

odkud po dosazení a přičtení k původní teplotě dostáváme konečnou teplotu $t = 362\,^\circ\mathrm{C}$.

Úlohu lze řešit též odmocněním výrazu pro plošnou roztažnost a srovnáním s druhým výrazem. Pak dostáváme výsledek $\Delta t = (d_2 - d_1)\,/\,(d_1\alpha_1 - d_2\alpha_2)$, jenž je shodný s výše uvedeným až na členy vyšších řádů.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha 14 ... brrroky

Na nekonečně dlouhém vlákně visí dřevěná koule o hmotnosti M, *do níž začneme střílet ze vzduchovky maličkými broky o hmotnosti* m *a rychlosti* v. *Najděte rychlost velké koule* V_n *po* n *srážkách, byla-li na začátku v klidu.* *Dominika navštívila knižní svět.*

Za předpokladu nepružnosti srážek budou broky zůstávat v kouli a její hmotnost bude postupně narůstat jako $M_n = M + nm$. Podle zákona zachování hybnosti bude součet hybností n broků na počátku roven hybnosti soustavy koule a broky neboli $nmv = (M + nm)V_n$, odtud již snadno vyjádříme rychlost velké koule po n-té srážce $V_n = (nmv)/(M + nm)$.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha 15 ... HDD

Jakou kinetickou energii má v sobě uložen 3,5″ harddisk při 7 200 rpm, jestliže hmotnost rotující části je 200 g? *Jáchymovi padl pohled na externí harddisk.*

Zadání se nás ptá, jakou kinetickou energii v sobě má uloženou válec o průměru 3,5 palce s rychlostí 7 200 otáček za minutu a hmotností $m = 200\,\mathrm{g}$. Kinetická energie rotujícího tělesa je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2\,,$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa a ω jeho úhlová rychlost. Moment setrvačnosti válce je

$$J = \frac{1}{2}mr^2\,,$$

kde r je jeho poloměr. Dosazením do vzorce pro energii získáme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{4}mr^2\omega^2\,.$$

Po dosazení hodnot $r = 1{,}75'' = 4{,}45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $\omega = 2\pi \cdot 7200\,\mathrm{min^{-1}}/60\,\mathrm{s{\cdot}min^{-1}} \approx 754\,\mathrm{s^{-1}}$ a $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ získáme výsledek $E_\mathrm{k} \approx 56\,\mathrm{J}$.

Jáchym Sýkora
`jachym@fykos.cz`

Úloha 16 ... pružinky

Máme dvě pružiny s tuhostmi $k_1 = 1\,\mathrm{N/m}$ a $k_2 = 2\,\mathrm{N/m}$ a závaží o hmotnosti $m = 2\,\mathrm{kg}$. Spočítejte poměr period kmitů, pokud budou pružiny zavěšeny paralelně a v sérii.
Aleš F. potkal pružinu a zalezl s ní pod peřinu.

Pokud jsou pružiny v sérii, tak platí, že na obě působí stejná síla a tedy

$$F = -k_1y_1 = -k_2y_2\,,$$

kde y_1 a y_2 jsou výchylky jednotlivých pružinek. Předpokládáme platnost Hookova zákona i pro spojené pružinky, neboli, že platí

$$F = -k_\mathrm{s}(y_1 + y_2)\,.$$

Vyjádřením jednotlivých výchylek a dosazením máme

$$F = -k_\mathrm{s}\left(-\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2}\right)\,,$$

z čehož plyne, že

$$k_\mathrm{s} = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Perioda kmitů takové pružinky tedy bude $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{m(k_1 + k_2)/(k_1k_2)}$.

Pokud jsou pružinky paralelně, bude jejich výchylka y stejná a tedy pro síly, které na ně působí, platí

$$F_1 = -k_1y\,,$$
$$F_2 = -k_2y\,.$$

Síla působící na obě pružinky dohromady je tedy

$$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)y\,,$$

z čehož plyne pro periodu kmitů takového systému $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)}$. Poměr jednotlivých period je tedy $T_\mathrm{p}/T_\mathrm{s} = \sqrt{k_1k_2/\left(k_1+k_2\right)^2} = \sqrt{2/9}$.

Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha 17 ... pralovec

Na daleké pláni plné slunce stojí pračlověk a přemýšlí, jak ulovit pratura. Nemá moc zbraní a zrovna tu jeden běží splašený údolím (asi se ztratil stádu). Pralovec vyleze na nejvyšší útes, zvedne velký kámen a když mu jeho smysly říkají, že je pratur vzdálen $c = 70\,\mathrm{m}$ od jeho kotníků, kámen pustí. Kámen nekladl v dávných dobách vzduchu žádný odpor a padal a padal, bohužel padl $l = 4\,\mathrm{m}$ před běžícím praturem, který se ještě víc poděsil a utekl. Ubohý pralovec v zoufalství odhadl alespoň výšku skály na $h = 50\,\mathrm{m}$ a čekal na další kořist. Jakou průměrnou rychlostí pratur běžel? *Hanka měla hlad.*

Když byl pratur vzdálen c od lovce, vzdálenost, kterou byl pratur od místa dopadu skály, vypočteme jednoduše pomocí Pythagorovy věty

$$d = \sqrt{c^2 - h^2}\,.$$

Čas, který padal kámen, byl stejný jako čas, který pratur běžel vzdálenost $d - l$. Čas pádu zjistíme ze vzdálenosti pomocí vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

který už jenom porovnáme s časem běhu pratura,

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{d-l}{\bar{v}} \quad\Rightarrow\quad \bar{v} = \sqrt{\frac{g}{2h}}\left(\sqrt{c^2-h^2} - l\right) \approx 14\,\mathrm{m/s}\,.$$

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha 18 ... brzdíme

Brzdy v autě o hmotnosti $M = 1\,200\,\mathrm{kg}$ dokáží vyvolat brzdný výkon $P_\mathrm{max} = 100\,\mathrm{kW}$, koeficient tření mezi koly a vozovkou je $f = 0{,}6$ a počáteční rychlost je $v_0 = 40\,\mathrm{m/s}$. Určete minimální brzdný čas. Uvažujte, že platí $P_\mathrm{max} < Mgfv_0$ a tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. *Lukáš přemýšlel o brzdách.*

Protože koeficient tření je f, maximální brzdná síla je $F_\mathrm{max} = Mgf$, kde M je hmotnost auta. Pro brzdný výkon platí $P = F_\mathrm{t}v$, kde v je okamžitá rychlost. Je vidět, že s rostoucí rychlostí roste brzdný výkon a bude-li rychlost větší než jistá prahová hodnota $v_\mathrm{p} = P_\mathrm{max}/(Mgf)$, tak již bude přesažen „dovolený“ brzdný výkon.

Proto pro $v > v_\mathrm{p}$ brzdíme výkonem P_max. Brzdění na rychlost v_p bude trvat

$$t_1 = \Delta E/P_\mathrm{max} = M\frac{v_0^2 - v_\mathrm{p}^2}{2P_\mathrm{max}} = M\frac{v_0^2 - (P_\mathrm{max}/Mgf)^2}{2P_\mathrm{max}} = \frac{(Mgfv_0)^2 - P_\mathrm{max}^2}{2Mg^2f^2P_\mathrm{max}}\,.$$

Pro rychlost $v < v_\mathrm{p}$ již auto brzdí rovnoměrně zpomaleně, proto zastaví za čas $t_2 = v_\mathrm{p}/(gf)$. Celkový čas zastavení je tedy

$$T = t_1 + t_2 = \frac{(Mgfv_0)^2 - P_\mathrm{max}^2}{2Mg^2f^2P_\mathrm{max}} + \frac{P_\mathrm{max}}{Mg^2f^2} = \frac{(Mgfv_0)^2 + P_\mathrm{max}^2}{2Mg^2f^2P_\mathrm{max}} \approx 10{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

Auto zastaví po 10,8 s od začátku brzdění.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha 19 ... výparné

Rychlovarná konvice o výkonu 2 000 W *má porouchané automatické vypínání, a tak se vypne až minutu potom, co se voda začne vařit. Za předpokladu, že se voda vypařovala pouze po dobu varu, určete objem vody, který se vypařil, než se konvice vypnula. Měrné skupenské teplo varu vody je* 2,26 MJ/kg. *Jáchym si šel uvařit čaj.*

Za čas $t = 60\,\mathrm{s}$ konvice vydala energii v podobě tepla o velikosti $Q = Pt$, kde $P = 2\,000\,\mathrm{W}$ je výkon konvice. Toto teplo bylo spotřebováno na změnu skupenství vody o hmotnosti m. Tedy $Q = ml$, kde $l = 2{,}26\,\mathrm{MJ/kg}$ je měrné skupenské teplo tání. Vyjádříme m a podělíme hustotou, čímž získáme objem vypařené vody

$$V = \frac{Pt}{l\varrho}\,,$$

kde $\varrho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota vody. Po dosazení hodnot vychází $V \approx 53 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3} = 53\,\mathrm{ml}$.

Jáchym Sýkora
`jachym@fykos.cz`

Úloha 20 ... rotujeme

Těleso o hmotnosti m na provázku délky l se otáčí okolo pevného bodu. Spočítejte práci, kterou vykoná přitažlivá síla provázku za jedno otočení. Dominika prozkoumávala knižní svět.

Provázek působí na těleso silou, která je kolmá na směr pohybu, nekoná tedy práci.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha 21 ... zlatá koule

Jaký nejmenší poloměr musí mít dutá koule vyrobená z 1 cm *tlustého plátu zlata, aby plavala na vodě? Hustota zlata je* $19\,300\,\mathrm{kg/m^3}$. *Jáchyma napadlo při čtení pohádek bratří Grimmů.*

Aby se koule zcela nepotopila, musí být síla, která by na kouli pod vodou působila, větší než síla tíhová. Koule má povrch velikosti $4\pi r^2$ a celkový objem zlata je tedy přibližně $4\pi r^2 d$, kde r je poloměr a d je tloušťka vrstvy zlata. Hmotnost celé koule je $m = 4\pi r^2 d\varrho_\mathrm{z}$, kde ϱ_z je hustota zlata. Tíhová síla působící na kouli je $F = mg = 4\pi r^2 d\varrho_\mathrm{z} g$. Vztlaková síla by byla

$$F_\mathrm{vz} = V\varrho_\mathrm{v} g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_\mathrm{v} g\,,$$

kde ϱ_v je hustota vody. Musí tedy být splněna nerovnost $F_\mathrm{vz} > F$, neboli

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_\mathrm{v} g > 4\pi r^2 d\varrho_\mathrm{z} g$$

$$\frac{1}{3} r\varrho_\mathrm{v} > d\varrho_\mathrm{z}$$

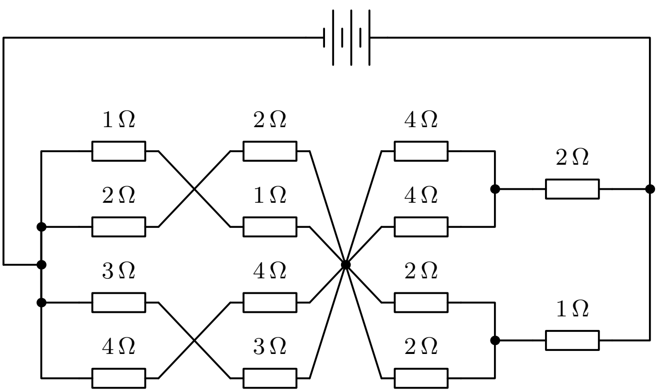
$$r > \frac{3d\varrho_\mathrm{z}}{\varrho_\mathrm{v}}\,.$$

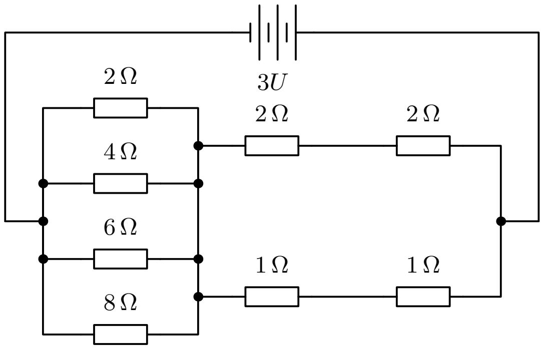
Po dosazení hodnot vychází minimální poloměr $r_\mathrm{min} \approx 58\,\mathrm{cm}$.

Jáchym Sýkora
`jachym@fykos.cz`

Úloha 22 ... zmatek na stole

Vypočtěte, jaký teče celkový proud skrz obvod na obrázku. V obrázku jsou uvedené odpory jednotlivých rezistorů. Jeden článek baterie poskytuje napětí $U = 1{,}5\,\mathrm{V}$ *a v baterii jsou tři články. Odpory jsou relativně hodně přesné a odpory vodičů zanedbatelné. Proto udejte výsledek na tři platné cifry.* *Karel si oblíbil obvody.*





Obr. 2: Transformované schéma zapojení

Celkové napětí je $U_c = 3U$. Při řešení používáme pravidla pro sčítání odporů, tj. odpory zapojené sériově sčítáme a odpory zapojené paralelně sčítáme v převrácených hodnotách. Obvod si můžeme upravit na tvar, který vidíte na obrázku 2. Pak již snadno vypočítáme celkový odpor soustavy

$$R_c = \left(\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{8\,\Omega}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{(2+2)\,\Omega} + \frac{1}{(1+1)\,\Omega}\right)^{-1} = \frac{24}{25}\,\Omega + \frac{4}{3}\,\Omega = \frac{172}{75}\,\Omega\,.$$

Když známe celkový odpor, tak můžeme vypočítat celkový proud

$$I = \frac{U_c}{R_c} = \frac{675}{344}\,\mathrm{A} \approx 1{,}96\,\mathrm{A}\,.$$

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha 23 ... bum do něj

Jaký musí být poměr hmotností dvou těles, aby po jejich dokonale nepružné srážce, kdy před srážkou jedno mělo počáteční kinetickou energii E_0 a druhé nulovou, měly dohromady kinetickou energii $E_0/9$? *Nepružný Karel.*

Označme hmotnost pohybujícího se tělesa před rázem m a druhého M. Pro dokonale nepružný ráz platí zákon zachování hybnosti a to, že rychlost těles po srážce je stejná, protože se tělesa vlastně spojí v jedno. Rychlost před srážkou označme v a po srážce u. Zapišme zákon zachování hybnosti

$$mv = (m+M)\,u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{m+M}v\ .$$

Energii po srážce můžeme zapsat jako

$$\frac{1}{9}E_0 = \frac{1}{2}\,(m+M)\,u^2 = \frac{1}{2}\,(m+M)\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m+M} = E_0\frac{m}{m+M} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{m+M} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{m} = 8\,.$$

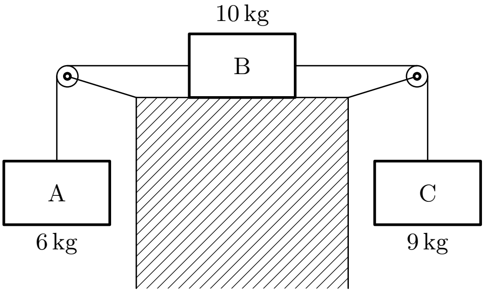
Pohybující se těleso tedy musí vrazit do osmkrát těžšího tělesa, aby jejich celková kinetická energie po srážce byla devítina původní kinetické energie.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 24 ... dynamické kvádříky

Mějme tři kvádříky o hmotnostech 6 kg, 9 kg *a* 10 kg, *umístěné jako na obrázku. Koeficient tření mezi podložkou a nejtěžším kvádříkem je* $f = 0{,}2$. *Kladky jsou nehmotné. Jaké je zrychlení systému a napětí v obou koncích provazu?*

Janap stavěla kvádříky na její Schaum's 3000 Solved Problems in Physics.



Určíme si, kde bude kladný směr naší soustavy. Kupříkladu pro 9 kg kvádřík to bude směr dolů, pro 10 kg doprava a pro 6 kg nahoru. Pro nejtěžší z kvádříků navíc platí $F_\mathrm{B} = fN = fm_\mathrm{B}g$. S pomocí 2. pohybového zákona si napíšeme rovnice

$$\begin{aligned} gm_\mathrm{C} - T_2 &= m_\mathrm{C}a\,,\\ T_2 - T_1 - F_\mathrm{B} &= m_\mathrm{B}a\,,\\ T_1 - m_\mathrm{A}g &= m_\mathrm{A}a\,,\end{aligned}$$

kde T_1 je pro lano mezi A a B, T_2 mezi B a C. Úpravami získáme rovnici $m_\mathrm{C}g - F_\mathrm{B} - m_\mathrm{A}g = (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C})a$, ze které plyne zrychlení. Zpětným dosazením získáme napětí v provazech. Číselně vychází $a = 0{,}39\,\mathrm{m/s^2}$, $T_1 = 61\,\mathrm{N}$ a $T_2 = 85\,\mathrm{N}$.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Úloha 25 ... trabant

Trabant dokáže zrychlit na $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *za 30 sekund. Brzdit nemůže s větším zrychlením než* $0{,}3g$. *Určete nejkratší potřebný čas, aby trabant ujel* 500 m, *jestliže má začít i končit s nulovou rychlostí. Předpokládejte, že zrychlovat může pouze rovnoměrně.*

Honza Hum a Buffalo Bill.

Není důvod, aby trabant jel po nějakou dobu konstantní rychlostí, protože kdyby místo toho zrychloval, ušetřil by čas. Uvažujeme pouze rovnoměrně zrychlený pohyb, takže zrychlení na prvním úseku spočteme jednoduše jako

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}74\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Zrychlení (resp. zpomalení) na druhém úseku označíme a_2 a celkovou uraženou dráhu s. Musí platit

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + \frac{1}{2}a_2 (t - t_1)^2\,,$$

kde t_1 je doba, po kterou trabant zrychloval a t celková doba pohybu. Využili jsme toho, že trabant je na konci pohybu v klidu. Z toho taky plyne, že musí platit

$$a_1 t_1 - a_2 (t - t_1) = 0\,.$$

Z posledního vztahu můžeme vyjádřit $(t - t_1)$ jako funkci t_1. To dosadíme do vztahu pro dráhu a vyjádříme čas t_1

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{(1 + a_1/a_2)\,a_1}}\,.$$

Ze stejného vztahu také dostaneme

$$t = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) t_1 = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \sqrt{\frac{2s}{(1 + a_1/a_2)\,a_1}} = 41{,}1\,\mathrm{s}\,,$$

po dosazení zadaných hodnot.

Jan Humplík
honza@fykos.cz

Úloha 26 ... od nuly k nule

Bodový náboj $q_1 = 2\,\mu\mathrm{C}$ je umístěn do počátku souřadnic, druhý $q_2 = -3\,\mu\mathrm{C}$ je umístěn do vzdálenosti $100\,\mathrm{cm}$ v kladném směru osy x. Kde na ose x bude potenciál stejný jako v nekonečnu? *Janap a její Schaum's 3000 Solved Problems in Physics.*

Napíšeme si Coulombův zákon pro takovou situaci, potenciál označíme V, k značí tradiční $1/(4\pi\varepsilon_0)$, platí

$$V(x) = k\left(\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - 1\,\mathrm{m}|}\right)\,,$$

kde můžeme dosadit $V = 0$, neboť nás zajímá, kde se potenciál vynuluje. Dostaneme rovnici $2|x - 1\,\mathrm{m}| = 3|x|$. Rovnici s absolutními hodnotami musíme vyřešit zvlášť pro tři případy: $x > 1\,\mathrm{m}$, $0\,\mathrm{m} < x < 1\,\mathrm{m}$ a $x < 0\,\mathrm{m}$. V prvním případě řešení neexistuje, ve druhém je to $x_1 = 0{,}4\,\mathrm{m}$ a v posledním $x_2 = -2\,\mathrm{m}$.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Úloha 27 ... výboj

Jak daleko od piezoelektrického zapalovače má Lukáš dát prst, aby jej jiskra od výboje co nejvíce bolela? Bolest je tím větší, čím je větší procházející proud. Výboj se zažehne v okamžiku, kdy je intenzita pole ve vzduchu větší než mezní intenzita $E_{\max}$. Uvažujte, že odpor vzduchu na jednotkovou vzdálenost je ϱ. Piezo dokáže dát jen omezené napětí U_0.

Lukáš si hrál se zapalovačem.

Výboj se zapálí ve vzdálenosti L. Indukované napětí je $U = E_{\max}L$. Pro procházející proud platí $I = U/R$. Odpor mezi kontaktem a prstem je $R = \varrho L$, proto proud je $I = E_{\max}/\varrho = \text{konst.}$ Nezávisí na vzdálenosti, proto je bolest ve všech vzdálenostech stejná až do vzdálenosti $L_{\max} = U_0/E_{\max}$, kdy se již výboj nezapálí.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha 28 ... Popelka

Máme litr hrachu a litr krupice. Hrách, resp. krupici, si můžeme představit jako kuličky o průměrech $R = 5\,\mathrm{mm}$, resp. $r = 0{,}1\,\mathrm{mm}$. Zlá macecha vezme hrách i krupici a sesype to všechno dohromady. Spočtěte, jaký minimální objem musí mít nádoba, ve které Popelka pošle směs poštou do holubníku, když víte, že velké množství koulí zabírá $k = \pi/\sqrt{18}$ z celkového objemu prostoru.

Napadlo Jančiho při pohledu na bytové doplňky.

Protože krupice vyplní všechen prostor okolo hrachu, ten do výsledného objemu přispěje jenom objemem své pevné hmoty, tedy částí k litru. Spolu s krupicí, pro kterou se nám ale vzduch mezi jejími zrnky vyplnit nepodaří, a tedy její objem zůstává 1 litr, to dělá $1 + k$ litru.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha 29 ... rozhodčí v kotli

Mějme stadion s 10 000 fanoušky, z nichž každý drží v ruce vstupenku na laminovaném papíře. Vstupenka má plochu $S = 200\,\mathrm{cm}^2$ a odrazivost $\lambda = 0{,}2$. Rozhodčí za „třicetník“ už ví, které družstvo vyhraje. To se fanouškům nelíbí, a tak na něj namíří své lístky pod úhlem $\alpha \approx 45^\circ$ (vzhledem k zemi), přičemž slunce je v zenitu. Jaký výkon dopadá na sudího, je-li sluneční konstanta $P_\odot = 1\,000\,\mathrm{W/m^2}$?

Michal rád povídku A. C. Clarka zpracovanou na webu University of Oregon.

Kvůli naklopení vstupenky je její efektivní plocha jenom $200\,\mathrm{cm}^2 \cdot \cos 45^\circ$ (plocha, na níž je přijato sluneční záření). Ze zadání víme, že vstupenka odrazí jenom 0,2 přijaté energie. Celkový výkon ode všech diváků je součtem jednotlivých příspěvků. Výsledný výkon tedy spočteme jako

$$
\begin{aligned}
P &= NP_{\text{divák}}\\
P &= NP_\odot \lambda S \;\cos\alpha\\
P &\approx 28\,000\,\mathrm{W}\,.
\end{aligned}
$$

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Úloha 30 ... hups

Na kevlarové niti délky $l = 1\,\mathrm{m}$ máme uvázánu kuličku o hmotnosti $M = 200\,\mathrm{g}$. S jakou frekvencí musíme provázkem točit, abychom jej přetrhli, víme-li, že má průměr $D = 0{,}2\,\mathrm{mm}$ a mez pevnosti v tahu $\sigma_m = 3\,\mathrm{GPa}$? Neuvažujte gravitaci a předpokládejte, že napětí se v provázku rozmístí rovnoměrně po jeho průřezu. *Pavel M. točil klíčema na náměstí.*

Při otáčení provázkem při frekvenci f působí provázek na kuličku silou, která má velikost právě rovnou odstředivé síle kuličky $F = M\omega^2 l$. Při předpokladu rovnoměrného rozmístění napětí v celém průřezu vyvolá tato síla napětí $\sigma = 4F/(\pi D^2)$. Dosazením za F, vyjádřením ω pomocí frekvence a položením sigma rovno mezi pevnosti v tahu dostáváme řešení

$$f = \sqrt{\frac{\sigma_\mathrm{m} D^2}{16\pi M l}} \approx 3{,}45\,\mathrm{Hz}\,.$$

Pavel Motloch
`pavel@fykos.mff.cuni.cz`

Úloha 31 ... ladička šla na Petřín

Z Petřínské rozhledny ($63{,}5\,\mathrm{m}$) je shozena ladička vydávající komorní 'a' ($440\,\mathrm{Hz}$), jakou frekvenci uslyší pozorovatel na vrchu rozhledny v čase $t = 2\,\mathrm{s}$. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, rychlost zvuku $v_z = 340\,\mathrm{m/s}$. *Aleš F. se procházel po Petříně.*

Zajímá nás závislost frekvence na čase, pokud víme, že v čase $t = 0$ ladičku vypustíme a tedy frekvence je $f(t = 0\,\mathrm{s}) = f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$. Protože se od pozorovatele ladička vzdaluje nastává, Dopplerův jev, jehož rovnice je

$$f = \frac{v_\mathrm{z} f_0}{v_\mathrm{z} + g t'}\,, \tag{2}$$

kde t' je takový čas, že platí $t = t' + t_\mathrm{z}$, kde t_z je čas návratu zvuku od ladičky k pozorovateli. Čas t' je tedy čas, kdy má ladička podle Dopplerovy rovnice vůči pozorovateli takovou frekvenci, jakou slyší pozorovatel v čase t. Platí $t_\mathrm{z} = s/v_\mathrm{z}$, kde s je dráha, kterou ladička urazí za dobu t', tedy $s = g t'^2/2$. Z těchto vztahů dostáváme $t_\mathrm{z} = g t'^2/(2v_\mathrm{z})$. Chceme vypočítat závislost t' na t. Víme, že $t' = t - g t'^2/(2v_\mathrm{z})$, což po úpravě dá kvadratickou rovnici

$$g t'^2 + 2v_\mathrm{z} t' - 2v_\mathrm{z} t = 0\,.$$

Její jediné nezáporné řešení je

$$t' = \frac{-v_\mathrm{z} + \sqrt{v_\mathrm{z}^2 + 2 g v_\mathrm{z} t}}{g}\,,$$

a tedy dosazením do rovnice pro Dopplerovský posun (2) dostáváme

$$f = \frac{v_\mathrm{z} f_0}{\sqrt{v_\mathrm{z}^2 + 2 g t v_\mathrm{z}}}\,.$$

Dosazením zadaných hodnot dostáváme $f(t = 2\,\mathrm{s}) \approx 416{,}6\,\mathrm{Hz}$.

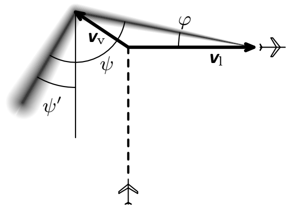
Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`

Úloha 32 ... letadlo

Na obrázku je vyobrazen směr letu letadla po provedení obratu o 90° vpravo (čárkovaně) a poloha zplodin letadla. Určete směr a velikosti kolmé a rovnoběžné složky rychlosti větru vůči směru letu (směr nakreslete do obrázku). Rychlost letadla je $v_l = 100\,\mathrm{m/s}$. Znáte velikosti úhlů vyobrazených na obrázku $\varphi = 11{,}15°$ a $\psi = 109{,}11°$. *Lukáš se koukal z okna.*

Složky rychlosti větru označíme $v_\parallel$ a $v_\perp$ a rychlost letadla v_l (kladný směr je doprava a nahoru). Pro část trajektorie po zatočení platí

$$\frac{v_\perp}{v_\mathrm{l} - v_\parallel} = \operatorname{tg}\varphi\,.$$



Obr. 3

Pro část trajektorie před zatočením platí

$$\frac{v_\parallel}{v_\perp - v_\mathrm{l}} = \operatorname{tg}(\psi + \varphi - \pi/2) = \operatorname{tg}\psi'\,.$$

Vyřešením této soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostáváme

$$v_\parallel = v_\mathrm{l}\frac{\operatorname{tg}\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg}\psi'\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\psi'\,,$$

$$v_\perp = v_\mathrm{l}\frac{1 + \operatorname{tg}\psi'}{1 + \operatorname{tg}\psi'\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\varphi\,.$$

Číselně vychází $v_\parallel = -42\,\mathrm{m/s}$ a $v_\perp = 28\,\mathrm{m/s}$, směr viz obrázek 3.

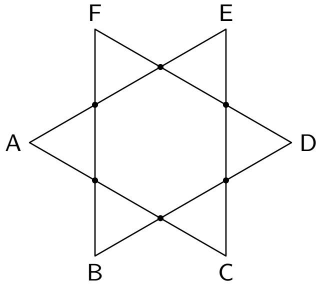
Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha 33 ... válec

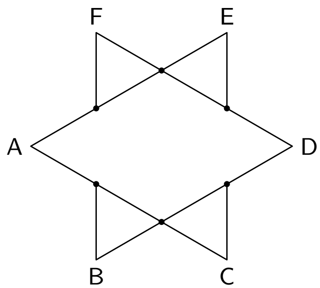
Válcová nádoba má průměr R a výšku v, určete, v jakém poměru budou minimální práce při naplnění válce kapalinou shora a zdola. Na počátku je všecha voda v úrovni dna nádoby.
Aleš plnil kýbl.

Stačí si uvědomit, že pokud rozdělíme nádobu na vrstvičky elementární tloušťky, tak pokud budeme skládat vrstvičky (pokud uvažujeme jednomolekulární vrstvičku, tak lze práci vykonanou na molekuly v jedné vrstvičce považovat za stejnou) shora, tak budeme muset každou vrstvičku vyzvednout do výšky v rovné výšce nádoby, zatímco pokud ji budeme plnit zdola, tak tam některé vrstvičky budeme muset vyzvednout do výšky v, ale jiné zase prakticky vůbec; je tedy zřejmé, že průměrná výška, do které budeme muset vrstvičky vyzdvihnout, je $v/2$, tedy pro poměr obou prací platí $W_\mathrm{h}/W_\mathrm{d} = 2$.

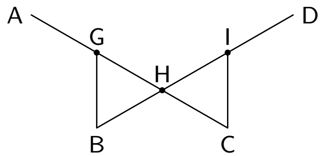
Aleš Flandera
`flandera.ales@fykos.cz`



Obr. 4: K zadání úlohy 34



(a) stejný potenciál



(b) redukce na polovinu

Obr. 5: Úpravy hvězdy

Úloha 34 ... odporující hvězda

Máme drátěný model šesticípé hvězdy, který vidíte na obrázku 4. Vzdálenost bodů A *a* C *je* $d = 10\,\mathrm{cm}$ *a metr drátu má odpor* $R_1 = 10\,\Omega$*. Jaký je elektrický odpor mezi body* A *a* D*? Drát je samozřejmě homogenní.* *Karel zapojoval dráty...*

V prvé řadě si uvědomíme, že schéma drátěného modelu hvězdy můžeme zjednodušit takovým způsobem, který je znázorněný na obrázku 5a, kde jsme se rovnou zbavili dvou drátů, skrz které nepoteče proud, protože oba jejich konce jsou na stejném potenciálu. Ještě si schéma zjednodušíme tak, že hvězdu rozdělíme na dvě větve a spočítáme odpor jedné této větve. Počítáme tedy odpor útvaru na obrázku 5b. Vzdálenost mezi sousedními body na obrázku je přesně třetina vzdálenosti mezi AC. Odpor mezi body AG a ID je

$$R_{\mathsf{AG}} = R_{\mathsf{ID}} = \frac{1}{3}\frac{R_1}{10}\,.$$

Dalším krokem je určit odpory mezi body GH a HI

$$R_{\mathsf{GH}} = R_{\mathsf{HI}} = \left(\frac{1}{R_{\mathsf{AG}}} + \frac{1}{2R_{\mathsf{AG}}}\right)^{-1} = \frac{2}{3}R_{\mathsf{AG}} = \frac{2}{9}\frac{R_1}{10}\,,$$

odpor jedné větve je tedy

$$R_{\mathrm{v}} = R_{\mathsf{AG}} + R_{\mathsf{GH}} + R_{\mathsf{HI}} + R_{\mathsf{ID}} = \frac{10}{9}\frac{R_1}{10} = \frac{10}{9}\Omega\,.$$

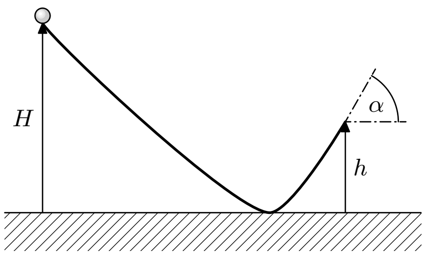
Výsledný celkový odpor hvězdy je při zapojení paralelně těchto dvou větví – tedy poloviční oproti odporu samotné jedné větve

$$R_{\mathrm{celk}} = \frac{5}{90}R_1 = \frac{5}{9}\Omega\,.$$

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha 35 ... hra s míčem

Kuličku zanedbatelného poloměru pouštíme z výšky $H = 5\,\mathrm{m}$ nad vodorovnou podložkou po dráze ve tvaru písmene L se zaobleným rohem. Dráhu opouští ve výšce $h = 2\,\mathrm{m}$ pod úhlem $\alpha = 20^\circ$ vůči horizontálnímu směru, směrem vzhůru. Do jaké vzdálenosti od konce dráhy poprvé dopadne, pokud uvažujeme tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$? Pavel M. si házel kuličkou.



Kulička má zanedbatelné rozměry, proto úlohu budeme řešit jako pohyb hmotného bodu. Na počátku pohybu má potenciální energii MgH, kde M je hmotnost kuličky. V okamžiku opuštění dráhy má jednak potenciální energii Mgh, jednak kinetickou energii $Mv^2/2$, kde v je rychlost kuličky. Ze zákona zachování energie dostáváme $v = \sqrt{2g(H-h)}$. Vertikální složka rychlosti má velikost $v\sin\alpha$, velikost této složky se s časem snižuje konstantním zpomalením g (protože g směřuje proti počátečnímu směru rychlosti), maximální výšky proto kulička dosáhne za čas $t_1 = v\sin\alpha/g$ po opuštění dráhy. Za tuto dobu vystoupá do výšky

$$L = h + vt_1\sin\alpha - \frac{gt_1^2}{2} = h + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\,.$$

Z této výšky padá po dobu $t_2 = \sqrt{2L/g}$. Celkem se tedy vzduchem pohybuje po dobu $t_1 + t_2$, za tuto dobu urazí v horizontálním směru, ve kterém má konstantní rychlost $v\cos\alpha$, vzdálenost $v\cos\alpha\cdot(t_1+t_2)$. Číselně vychází $D = 6{,}9\,\mathrm{m}$. Toto je ale vodorovná vzdálenost, po kterou byl míček ve vzduchu. Chceme-li vypočítat vzdálenost od konce dráhy, tak musíme ještě použít Pythagorovu větu $\Delta = \sqrt{D^2+h^2} = 7{,}2\,\mathrm{m}$.

Pavel Motloch
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha 36 ... modelářská

Jakou nejmenší kapku: a) vody, b) ředidla lze vytlačit z injekční stříkačky bez jehly o objemu 2 ml*? Injekční stříkačka má na výstupu průměr* 2 mm*. Povrchové napětí vody je* 73 mN/m*, ředidla* 27 mN/m*, hustota vody* 998 kg/m^3 *a hustota ředidla* 860 kg/m^3*. Výsledek uveďte v mililitrech. Uvažujte kulovou kapku.* *Kryštof, barvě figurky.*

V momentě odtržení kapky od stříkačky uvažme rovnováhu povrchové a tíhové síly působící na kapku.

$$mg = \sigma \pi d\,,$$

odkud již snadno získáme rovnici pro objem

$$V = \frac{\sigma \pi d}{g\varrho}\,.$$

Po správném dosazení a převedení na ml vychází: a) pro vodu 0,05 ml a b) pro ředidlo 0,02 ml.

Ve skutečnosti opravdu z takovéto stříkačky dostaneme něco málo přes 20 kapek vody a necelých 50 kapek ředidla na 1 ml.

Kryštof Touška
krystof@fykos.cz

Úloha 37 ... z pohádek bratří Grimmů

> *Mrštila žábou vší silou o stěnu a zvolala: „Teď dáš pokoj, ty hnusná ropucho!“ Ale světe div se, na podlahu nedopadla mrtvá žába, nýbrž živoucí, mladý princ s nádhernýma očima.*

Za předpokladu, že se veškerá kinetická energie žáby přeměnila na hmotu, o kolik menší rychlostí než je rychlost světla, musela žába letět, aby se z ní po nárazu stal princ? Hmotnost žáby je 100 g *a hmotnost prince je* 80 kg. *Jáchym pročítal pohádky bratří Grimmů.*

Ze zákona zachování energie musí být celková (relativistická) energie žáby rovna klidové energii prince. Energie žáby je

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} m_0 c^2\,,$$

kde m je relativistická hmotnost žáby, c je rychlost světla, γ je Lorentzův faktor, m_0 je klidová hmotnost žáby a v je její rychlost. Klidová energie prince je $E = Mc^2$, kde M je hmotnost prince. Vyjádřením v a jeho odečtením od c získáme

$$c - v = c\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{M^2}}\right) \approx 234\,\mathrm{m/s}\,.$$

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha 38 ... kohoutek

Z kohoutku, který je ve výšce $h = 20\,\mathrm{cm}$ nad umyvadlem a má průměr $d_1 = 1\,\mathrm{cm}$, teče do umyvadla voda rychlostí $v_1 = 4\,\mathrm{cm/s}$. Jak široký bude proud vody těsně předtím, než dopadne do umyvadla? *Dominika myla kádinky.*

Pro proud vody z kohoutku bude platit Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + h\varrho g + p_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + 0\varrho g + p_\mathrm{a}\,,$$

kde ϱ je hustota vody, g tíhové zrychlení a p_a atmosférický tlak, zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie u umyvadla. Bude také platit rovnice kontinuity $v_1\pi d_1^2/4 = v_2\pi d_2^2/4$, kde d_2 je hledaný průměr. Tyto dvě rovnice pro dvě neznámé vyřešíme vzhledem k d_2 a dostaneme výsledek

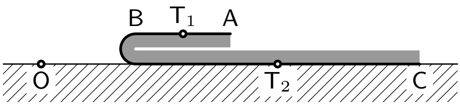
$$d_2 = d_1\sqrt[4]{\frac{v_1^2}{v_1^2 + 2hg}}\,,$$

který po dosazení dává $d_2 \approx 0{,}14\,\mathrm{cm}$.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha 39 ... koberec naruby

Na podlaze leží koberec délky d. Uchopíme jej za jednu stranu a táhneme konstantní rychlostí v tak, že se ve výsledku převrátí naruby (viz obrázek). Určete časový průběh rychlosti těžiště koberce. *200 Puzzling Physics problems, Cambridge UP.*



Obr. 6

Na obrázku 6 jsou vyznačeny body, jejichž pohyb budeme sledovat. Písmenem O označme počátek souřadné soustavy, C budiž poloha pravého konce koberce, B je poloha ohybu koberce a A je poloha levého okraje koberce. Písmeny T_1 a T_2 označme těžiště vrchní a spodní části koberce. Těžiště celého koberce nazvěme T. Hmotnost koberce označme m.

Nejdřív řekněme, co se stane, až se koberec odvalí celý. Stane se to v čase $t_\mathrm{k} = 2d/v$ a v tom případě se oba konce koberce i jeho těžiště budou pohybovat stejnou rychlostí v a bod T_1 splyne s těžištěm celého koberce. Dále počítejme s tím, že se vyskytujeme v časovém rozmezí $0 < t < t_\mathrm{k}$.

Ze zadání víme, že poloha bodu A se dá popsat jako $x_\mathsf{A}(t) = vt$, protože se pohybuje konstantní rychlostí v. Bod B vždy leží uprostřed mezi body A, jehož polohu jsme právě popsali, a O, který je statický. Proto se pohybuje právě poloviční rychlostí oproti bodu A. Takže $x_\mathsf{B}(t) = vt/2$.

Poloha těžiště koberce v čase ($x_\mathsf{T}(t)$) je dána průměrem poloh těžišť T_1 a T_2 (označme je $x_{\mathsf{T}_1}(t)$ a $x_{\mathsf{T}_2}(t)$) váženým hmotnostmi m_1 a m_2 částí, kterým jednotlivá těžiště odpovídají

$$x_\mathsf{T}(t) = \frac{x_{\mathsf{T}_1}(t)m_1(t) + x_{\mathsf{T}_2}(t)m_2(t)}{m}\,.$$

Budeme tedy potřebovat znát jednotlivé závislosti. Je zřejmé, že hmotnosti m_1 a m_2 odpovídají takové části hmotnosti koberce, která je vyjádřena poměrem jejich délek (d_1 a d_2) a celkové délky koberce d. Jednoduchou úvahou zjistíme, že odvalená část koberce m_1 má stejnou délku d_1 jako ten kus země, který zůstal jejím odvalením odkrytý, tedy $d_1 = x_\mathsf{B}(t)$. Druhá část koberce bude mít délku $d_2 = d - d_1$. Pro hmotnosti tedy vychází

$$m_1(t) = \frac{d_1}{d}m = \frac{x_\mathsf{B}(t)}{d}m = \frac{vt}{2d}m\,,$$
$$m_2(t) = m - m_1(t) = \left(1 - \frac{vt}{2d}\right)m\,.$$

Teď potřebujeme zjistit, jak se pohybují jednotlivá těžiště. Protože víme, jaká je časová závislost polohy jednotlivých konců koberce a předpokládáme, že koberec má konstantní délkovou hustotu, můžeme je hledat uprostřed mezi koncovými body.

$$x_{\mathsf{T}_1}(t) = \frac{x_\mathsf{A}(t) + x_\mathsf{B}(t)}{2} = \frac{vt + \frac{vt}{2}}{2} = \frac{3}{4}vt\,,$$
$$x_{\mathsf{T}_2}(t) = \frac{x_\mathsf{B}(t) + x_\mathsf{C}(t)}{2} = \frac{\frac{vt}{2} + d}{2} = \frac{d}{2} + \frac{1}{4}vt\,.$$

Zbývá jen dosadit do vzorce pro polohu těžiště

$$x_\mathsf{T}(t) = \frac{1}{m}\left(\frac{vt}{2d}m\frac{3}{4}vt + \left(1 - \frac{vt}{2d}\right)m\left(\frac{d}{2} + \frac{1}{4}vt\right)\right) = \frac{d}{2} + \frac{v^2t^2}{4d}$$

Rychlost těžiště určíme časovou derivací polohy

$$v_\mathsf{T}(t) = \frac{v^2}{2d}t\,.$$

Dosazením hodnoty t_k za t zjišťujeme, že se rychlost opravdu blíží k v a řešení je správně.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha 40 ... výplach mozku

Informaci měříme v bytech a daný kus informace je buď hloupost, nebo ne. Hlouposti v běžném mozku zabírají jenom 1 byte z tisíce, naopak videa na Youtube obsahují až 50 % hloupých bytů. Uvažujme, že kapacita lidského mozku je 10 TB a již na počátku je zcela využita. Sledování videa představuje tok informací o velikosti 200 kB/s a probíhá tak, že přijaté informace se v hlavě rovnoměrně promíchají s původními a přebytek je zapomenut (kapacita mozku je omezená). Po jak dlouhé době sledování videí na Youtube vzroste počet hloupostí v mozku desetkrát?

Poznámka Násobné jednotky bytů uvažuje fyzikálně, tzn. se základem 1000. Informace je pro účely úlohy spojitá. *Klasickou úlohu nádobky ve dřezu zabalil do mozkových plen Michal.*

Úloha je jenom maskovanou instancí problému látky rozpuštěné v nádobě konečné kapacity, do níž přitéká roztok jiné koncentrace a stejnou měrou odtéká vzniklá směs.

Označme: V kapacitu mozku, Q tok informací z videa, c_{in} podíl hloupostí ve videu, c_0 podíl hloupostí v čistém mozku, α faktor „zhloupnutí“.

Informace do mozku přitékají rychlostí $c_{\mathrm{in}}Q$ a opouštějí jej rychlostí cQ, kde c je okamžitý podíl hloupostí v mozku. Označme n okamžité množství hloupostí, pak pro něj platí diferenciální rovnice

$$\mathrm{d}n = (c_{\mathrm{in}} - c)\,Q\mathrm{d}t = \left(c_{\mathrm{in}} - \frac{n}{V}\right)Q\mathrm{d}t\,.$$

Rovnici snadno vyřešíme separací konstant (při integrování použijeme lineární substituci a dáme si pozor na počáteční podmínky) a závislost podílu hloupostí na čase vyjde

$$c = c_{\mathrm{in}} - (c_{\mathrm{in}} - c_0)\exp\left(-\frac{Q}{V}t\right)\,.$$

Dosazením αc_0 za c do výše uvedeného vztahu a upravením zjistíme dotazovaný čas

$$t_\alpha = \frac{V}{Q}\ln\frac{c_0 - c_{\mathrm{in}}}{\alpha c_0 - c_{\mathrm{in}}} \approx 10{,}53\,\mathrm{dne}\,.$$

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Úloha 41 ... závaží na tyči

Homogenní tyč je vodorovně zavěšena za své dva konce provázky. Na tyči je zavěšeno N závaží tak, že dvě jsou zavěšena na koncích tyče a ostatní rovnoměrně vyplňují prostor mezi nimi, přičemž hmotnost i-tého závaží od jednoho kraje tyče je im. Určete rozdíl tahových sil obou provázků. *Pikoši, na moment!*

Označme l délku tyče, M její hmotnost a g tíhové zrychlení. Jelikož se tyč nepohybuje, výsledný moment všech na ni působících sil vůči libovolně zvolené ose otáčení musí být nulový. Na tyč působí v jejím středu tíhová síla o velikosti Mg směřující svisle dolů. Dále na okrajích tyče svisle vzhůru směřující tahové síly vláken o velikostech F_1 a F_2. Také působí síly od jednotlivých závaží, ty působí směrem svisle dolů a mají velikost od mg do Nmg. Určíme velikost momentů všech sil nejdříve vzhledem k ose kolmé na tyč procházející jedním jejím koncem a poté vzhledem k ose též kolmé na tyč, ale procházející druhým koncem

$$0 = -lF_1 + \frac{1}{2}Mg + g\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i l(i-1)}{N-1}\,,$$

$$0 = -lF_2 + \frac{1}{2}Mg + g\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i l(N-i)}{N-1}\,.$$

Odtud již můžeme vyjádřit velikosti obou tahových sil a následně jejich rozdíl

$$F_2 - F_1 = \frac{g}{N-1}\sum_{i=1}^{N} m_i(N-1)\,.$$

Po dosazení $m_i = im$ dostáváme

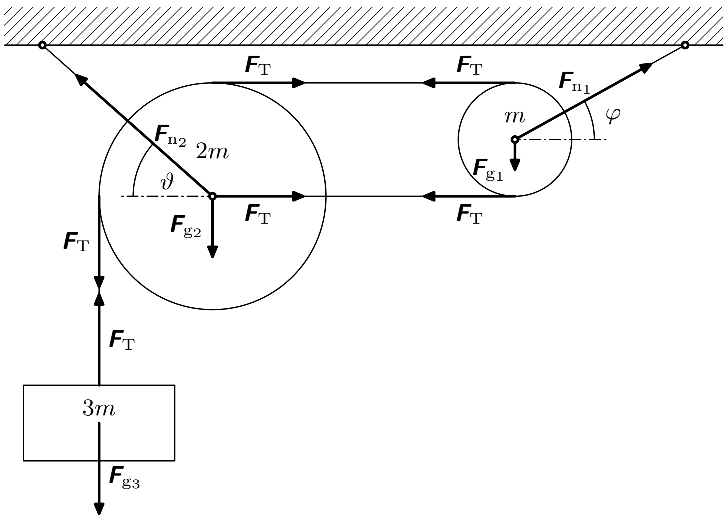
$$F_2 - F_1 = \frac{1}{6} mgN(N+1)\,.$$

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha 42 ... držíme kladky

Pod jakými úhly ϑ a φ musíme umístit držáky v soustavě na obrázku, aby plně kompenzovaly sílu působící na kladku v závěsu? Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

Aleš procházel sbírku úloh na webu University of Oregon.



Obr. 7: Síly působící v soustavě (úhly a velikosti neodpovídají realitě)

Označme sílu působící na vlákno F_T, tíhovou sílu působící na malou, velkou kladku a závaží po řadě F_{g_1}, F_{g_2} a F_{g_3} a síly působící v závěsech menší a větší kladky F_{n_1} a F_{n_2}. Síly F_{g_n} známe, jde o přímé tíhové působení na tělesa, tj. $F_{\mathrm{g}_n} = nmg$.

Na závaží působí pouze tíhová a tahová síla a protože je soustava v rovnováze, zřejmě platí

$$F_\mathrm{T} = F_{\mathrm{g}_3} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{T} = 3mg\,.$$

Postupně studujme obě kladky. U menší musí normálová síla F_{n_1} vyrovnat působení tahových sil a tíhové síly. Rozložíme si ji do svislé a vodorovné osy a dostáváme podmínku pro rovnováhu

$$F_{\mathrm{g}_1} = F_{\mathrm{n}_1} \sin\varphi\,,$$
$$2F_\mathrm{T} = F_{\mathrm{n}_1} \cos\varphi\,.$$

Vyjádříme-li si z druhé rovnice sílu $F_{\mathrm{n}_1} = 6mg/\cos\varphi$ a dosadíme-li ji do první, docházíme k výsledku

$$mg = 6mg\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad \varphi = 9{,}5^\circ\,.$$

Podobně budeme postupovat i u těžší kladky, tam rozklad sil napíšeme jako

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{g}_2} + F_\mathrm{T} &= F_{\mathrm{n}_2}\sin\vartheta\,,\\ 2F_\mathrm{T} &= F_{\mathrm{n}_2}\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

Tentokrát dosazujeme za $F_{\mathrm{n}_2} = 6mg/\cos\vartheta$.

$$5mg = 6mg\,\mathrm{tg}\,\vartheta \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{5}{6} \quad\Rightarrow\quad \vartheta = 39{,}8^\circ\,.$$

Aleš Podolník
`ales@fykos.cz`

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.