

Drazí příznivci FYKOSu,

pěťadvacátý ročník se blíží ke svému závěru, což mimo jiné znamená, že toto je poslední brožurka se zadáním jeho úloh.

Řešením této série můžete i omezeně zamávat celoročním pořadím, nicméně poslat její řešení má i další pozitivní význam – i za vyřešení jen šesté série se vám otevírá možnost účastnit se podzimmního soustředění, proto směle do toho!

Organizátoři

Aktuálně

Chcete sestavit soutěžní tým a poměřit své fyzikální znalosti s ostatními přímo od klávesnice počítače? Rozhodli jsme se uspořádat **internetovou variantu FYKOSího Fyziklání**. Registraci a další informace hledejte na webu soutěže.¹



Zadání VI. série



Termín uploadu: 22. května 2012 20.00

Termín odeslání: 21. května 2012

Úloha VI.1 ... tref svojí družici

2 body

Máme malý míček o poloměru r těsně nad míčem o poloměru R . Nejspodnější bod spodního míče je ve výšce h nad zemí. Oba míčky pustíme. Do jaké nejvyšší výšky může vystoupit horní míček? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné. Bez újmy na bodech můžete považovat hmotnost horního míčku za zanedbatelnou.

Bonus Postup zobecněte na N míčků. (Stále můžete uvažovat, že hmotnost míčku výše je zanedbatelná oproti míčku pod ním.)

Úloha VI.2 ... kosmická stanice

2 body

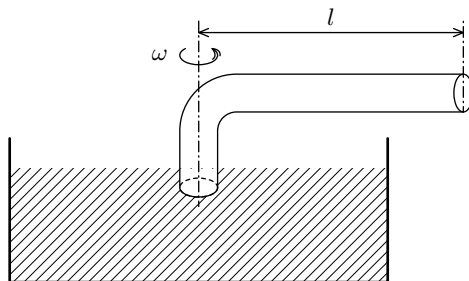
Odhadněte, jakou minimální energii musíme dodat kosmické stanici, abychom ji dostali na oběžnou dráhu. Můžete pracovat s hodnotami pro mezinárodní kosmickou stanici ISS, která obíhá Zemi ve výšce cca $h = 350$ km a má celkovou hmotnost přibližně $m = 450$ tun. Vysvětlete, proč je odhad minimální a vyjmenujte alespoň některé fyzikální skutečnosti, které vedou k tomu, že je skutečná spotřeba raket významně vyšší.

Úloha VI.3 ... čerpadlo

4 body

Mějme zahnutou trubici délky l plnou vody, jejíž spodní konec je ponořen do nádoby (obrázek 1). Trubicí otočíme jednou za čas T . Pod jakým tlakem je nasávána voda z nádoby? Viskozitu vody a tlak sloupce vody ve svislé části zanedbejte.

¹<http://online.fyziklani.cz/>



Obr. 1: Trubice ponořená ve vodě

Úloha VI.4 ... kroule

4 body

Jaká část povrchu ledové kry tvaru koule trčí nad hladinu? Hustota mořské vody je 1025 kg/m^3 , hustota ledu 917 kg/m^3 .

Úloha VI.5 ... běh na přednášku z eugeniky

4 body

Aleš sedí pod kopcem u stanu a surfuje na internetu na svém tabletu, když tu si náhle všimne, kolik je hodin, a uvědomí si, že vlastně chtěl jít na přednášku. Už je tak pozdě, že bude muset celou cestu běžet a nebude moct zastavit, ani aby se vydýchal. Proto se samozřejmě okamžitě rozběhne svou maximální běžecskou rychlostí v do kopce, který má rovnoměrné stoupání α . Po chvíli (čas T) si ale uvědomí, že má v kapse cihlu a že tu cihlu chtěl nechat u stanu. Aleš od sebe umí cihlu hodit jediné rychlostí w . Pod jakým úhlem má cihlu v tom okamžiku vyhodit, aby dopadla na kamaráda, co si právě sedl na jeho místo? Může se stát, že nedohodí? Aleš je hodně rychlý, a proto neuvažujte jeho reakční dobu a ani dobu, kterou vám zabere řešení úlohy.

Úloha VI.P ... paprsky X

4 body

Při prosvěcování prstů silným světlem je možno vidět jednotlivé cévy, ale zbytek tkáně se zdá homogenní. Vysvětlete, proč cévy vidět jsou, zatímco kosti ne.

Úloha VI.E ... plechová komprese

7 bodů

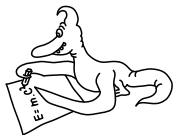
Skvělý způsob, jak rozdrtit prázdnou plechovku od coly (pokud se vám ji nechce drtit o svou hlavu a vlastně se vám nechce ji vůbec manuálně drtit), je kápnout na dno trochu vody, trochu utěsnit otvor v ní a dát ji na vařič zahřát. Když ji pak rychle ponoříte do studené vody, tak se vám s trochu šikvnosti krásně zdrtí. Vyzkoušejte si to a vyzkoušejte to i bez toho, že by v plechovce byla voda. Vysvětlete, proč to funguje jinak s vodou a bez ní, a zkuste svoji plechovku zdrtit na co nejmenší objem vůči původnímu. Ten změřte a popište podmínky, při kterých se vám to podařilo. Pošlete fotky zdrčených plechovek.

Pozor Při děláni pokusu k úloze se nespalte!

Úloha VI.S ... seriálová

6 bodů

- a) Vyjděte z Newtonova modelu vesmíru odvozeného v seriálu. Pro $E = 0$ vyřešte případ, kdy se vesmír rozpíná a hustota energie vakua se nemění. Odhadněte, jaká je na základě tohoto modelu budoucnost vesmíru.
- b) Pokud je vesmír plný hvězd, jistě k nám dřív nebo později dorazí světlo z každé hvězdy. Jak je možné, že je i přesto v noci tma? Zdůvodnění zkuste podpořit i kvantitativními odhady.
- c) V seriálu je uvedeno, jak odvodit existenci temné hmoty na kupě galaxií pomocí poměrně jednoduchého modelu. Zkuste navrhnout další způsob, jak dokázat existenci temné hmoty v kupách galaxií. Není třeba nutně podpořit výpočtem, stačí jednoduchý návrh.



Řešení V. série

Úloha V.1 ... šumivý prášek

2 body; průměr 1,38; řešilo 40 studentů

Hodíme-li do sklenice s vodou šumivý prášek, tak nejprve leží na dně a potom se zvedne. Proč? Aby přešel chřipce, vymyslel Lukáš.

Šumivá tableta je složena především z hydrogenuhlíčitanu sodného a kyseliny citronové. Po ponoření tablety do vody nastane reakce, jejíž (z našeho hlediska nejdůležitějším) výsledkem je uvolňování oxidu uhličitého. Ten na povrchu tablety vytváří díky povrchovému napětí tenkou vrstvičku s konstantní tloušťkou. Ta působí na tabletu vztlakovou silou úměrnou ploše tablety.

Předpokládejme kruhovou tabletu o poloměru r , výšce h_t a hustotě ρ_t . Hustotu vody označme jako ρ_v , hustotu CO_2 jako ρ_{CO_2} a tloušťku vrstvičky CO_2 jako h_{CO_2} .

Na tabletu působí vztlaková a také tíhová síla. Nadnášena je ale i vztlakovou silou vrstvičky CO_2 , odečteme-li tíhovou sílu oxidu uhličitého.

$$F = F_{vz,t} - F_{G,t} + F_{vz,\text{CO}_2} - F_{G,\text{CO}_2}$$

$$F = \pi r^2 h_t \rho_v g - \pi r^2 h_t \rho_t g + \pi r^2 2 h_{\text{CO}_2} \rho_v g - \pi r^2 2 h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2} g$$

$$F = \pi r^2 g (h_t \rho_v - h_t \rho_t + 2 h_{\text{CO}_2} \rho_v - 2 h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2})$$

Aby tableta stoupala vzhůru, musí být síla F kladná, tedy zjišťujeme, kdy je obsah závorky kladný. Předpokládáme přitom, že hustota tablety je větší a hustota CO_2 menší jak hustota vody.

$$0 < (h_t \rho_v - h_t \rho_t + 2 h_{\text{CO}_2} \rho_v - 2 h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2})$$

$$-h_t \rho_v + h_t \rho_t < 2 h_{\text{CO}_2} \rho_v - 2 h_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2}$$

$$h_t (-\rho_v + \rho_t) < h_{\text{CO}_2} (\rho_v - \rho_{\text{CO}_2})$$

$$h_t < 2 h_{\text{CO}_2} \frac{\rho_v - \rho_{\text{CO}_2}}{\rho_t - \rho_v}$$

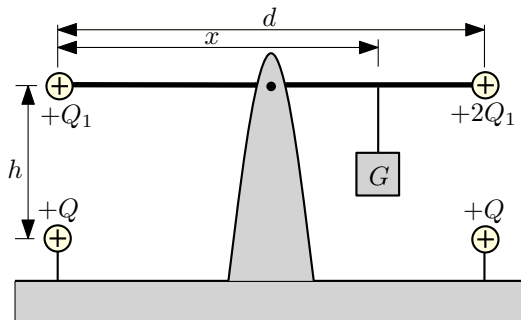
Postupným rozpouštěním tablety se snižuje její objem a tím i tíhové síla, ale objem vrstvičky CO_2 na plochu tablety ale zůstává stejný (mění se pouze poloměr r , ale ve stejném poměru jako u tablety).

Tableta vystoupá ve chvíli, kdy převládne vztlaková síla tablety a CO_2 nad jejich tíhovými silami. To nastane, bude-li pro výšku tablety platit výše uvedený vztah.

Petr Sedláček
keckas@fykos.cz

Úloha V.2 ... elektrická rovnováha

2 body; průměr 1,56; řešilo 36 studentů



Obr. 2

Na obrázku 2 je nevodivá tyč délky d zanedbatelné hmotnosti, otočná kolem svého středu. Na obou koncích tyče jsou připevněny malé vodivé koule zanedbatelných hmotností s kladnými náboji Q_1 a $2Q_1$. Tyč je vyvážená závažím o tíze G podle obrázku. Ve vzdálenosti h přímo pod každou z koulí je pevně umístěna koule s kladným nábojem Q .

- Určete vzdálenost x , pro niž je tyč vodorovná a je v rovnováze.
- Pro jakou hodnotu h bude tyč v rovnováze a nebude přitom vůbec zatěžovat čep, na němž je upevněna?

Ze sbírek vyhoukala Dominika.

Protože koule na koncích tyče mají zanedbatelnou hmotnost, působí na ně pouze odpuzivá elektrická síla o velikosti

$$F_{e1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{h^2} \quad (\text{vlevo}) \quad \text{a} \quad F_{e2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q_1 Q}{h^2} \quad (\text{vpravo})$$

směrem vzhůru. Závaží působí silou o velikosti G směrem dolů a čep na tyč normálovou silou o velikosti N směrem vzhůru.

- Aby se tyč neotáčela, je potřeba, aby součet momentů působících sil byl nulový, počítejme je vůči ose kolmé k obrázku a procházející čepem

$$F_{e1} \frac{d}{2} - F_{e2} \frac{d}{2} + G \left(x - \frac{d}{2} \right) = 0,$$

odtud

$$x = \frac{d}{2} + \frac{dQ_1 Q}{8\pi\epsilon_0 G h^2}.$$

b) Tyč nebude zatěžovat čep, pokud $N = 0$. Musí tedy navíc platit tato silová rovnováha

$$F_{e_1} + F_{e_2} - G = 0,$$

odkud

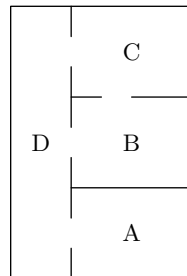
$$h = \sqrt{\frac{3Q_1Q}{4\pi\epsilon_0G}}.$$

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha V.3 ... putování faraonů

3 body; průměr 3,26; řešilo 42 studentů

Aleš bydlí ve čtyřpokojovém bytě, jehož půdorys si můžete prohlédnout na obrázku. Mára se ale rozhodl, že Alešův byt zamorí nepříjemnými mravenci faraoni. Faraoni po bytu šíleně rychle pobíhají a to ještě navíc šíleným způsobem – můžete uvažovat, že jednou za pět minut se 60% mravenců přesune do sousedních místností a jenom 40% jich zůstává pobíhat ve stejné místnosti, co předtím. Přitom se rovnoměrně rozbíhají do sousedních místností (když má místnost dvoje dveře, tak 30% jich přeběhne do jedné a 30% do druhé, když má troje dveře, tak se rozdělí po 20%). A to se opakuje každých pět minut (uvažujte jenom kroky přesně po pěti minutách). Faraonům se v bytě líbí, a tak neutíkají ven. Na druhou stranu se faraoni nemají šanci jinak dostat do bytu než propašováním, a to dělá jenom Mára, takže jinak ani faraoni v bytu nepřibývají.



a) Když Mára zlomyslně umístí 1000 faraonů do předsíně (D), kolik faraonů bude v jednotlivých místnostech po pěti minutách? Kolik jich bude po deseti minutách a po patnácti minutách? (2 body)

b) Pokud jsme našli v místnostech počty mravenců $N_A = 12$, $N_B = 25$, $N_C = 25$ a $N_D = 37$, jak byli mravenci rozmístění před pěti minutami? (1 bod)

Bonus Kolik mravenců by bylo v místnostech po hodně dlouhé (prakticky nekonečné) době, když by Mára rozmístil faraony jako v bodu a)? Záleží to na tom, jak Mára mravence rozmístil? A nejrafinovanější otázka – ustálí se počet mravenců na jedné hodnotě, nebo bude oscilovat? (bod/y navíc)

Karel si vzpomněl na Jordanův tvar matice při prohledávání literatury.

Předpokládejme, že počty mravenců v jednotlivých místnostech jsou na začátku A_0 , B_0 , C_0 a D_0 . Naším cílem je vyjádřit rozložení mravenců do místností po pěti minutách jako funkci těchto hodnot. Označme počty mravenců v jednotlivých místnostech po pěti minutách A_1 , B_1 , C_1 a D_1 . Mravenci neumírají ani nepřibývají, takže pro každou místnost musí platit, že

$$\# \text{ mravenců po 5 minutách} = \# \text{ mravenců, kteří neodejdou} + \# \text{ mravenců, kteří přijdou.}$$

Počet mravenců, kteří z místnosti neodejdou, je vždy 40% současného počtu. Počet mravenců, kteří přijdou, také známe. Například o předsíni D víme, že do ní přijde 60% mraven-

ců z místnosti A, ale jenom 30% mravenců z místností B a C, protože ty mají dvoje dveře. Napíšeme-li si stejným způsobem procenta pro každou místnost, dostáváme

$$\begin{aligned}A_1 &= 0,4A_0 + 0,2D_0, \\B_1 &= 0,4B_0 + 0,3C_0 + 0,2D_0, \\C_1 &= 0,4C_0 + 0,3B_0 + 0,2D_0, \\D_1 &= 0,4D_0 + 0,6A_0 + 0,3B_0 + 0,3C_0.\end{aligned}$$

Začínali jsme s mravenci pouze v předsíni, neboli platí $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 = 0$ a $D_0 = 1000$. Dosazením těchto hodnot zjistíme, že po pěti minutách je rozložení mravenců $A_1 = 200$, $B_1 = 200$, $C_1 = 200$ a $D_1 = 400$. Pokud tyto hodnoty dosadíme do naší rovnice jako hodnoty s indexem 0, získané hodnoty s indexem 1 budou hledané rozložení mravenců po 10 minutách (označme ho indexem 2). To samé pak zopakujeme ještě jednou a získáme rozložení po 15 minutách. Výsledné hodnoty jsou

$$\begin{aligned}A_2 &= 160, \quad B_2 = 220, \quad C_2 = 220, \quad D_2 = 400, \\A_3 &= 144, \quad B_3 = 234, \quad C_3 = 234, \quad D_3 = 388.\end{aligned}$$

V úkolu *b* máme vlastně zadány hodnoty A_1 , B_1 , C_1 a D_1 a zajímají nás odpovídající hodnoty A_0 , B_0 , C_0 a D_0 , které však pro přehlednost označíme indexem *b*. Problém se tedy redukuje na to, vyřešit tuto soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned}12 &= 0,4A_b + 0,2D_b, \\25 &= 0,4B_b + 0,3C_b + 0,2D_b, \\25 &= 0,4C_b + 0,3B_b + 0,2D_b, \\37 &= 0,4D_b + 0,6A_b + 0,3B_b + 0,3C_b.\end{aligned}$$

Ve škole vás možná učili metody jako Gaussova eliminace, kterými se takové soustavy řeší. Je však dobré si nejdříve ušetřit práci a využít vlastností problému, který popisujeme. V našem případě jsou místnosti B a C naprosto ekvivalentní a tedy lze očekávat, že pokud je v nich stejný počet mravenců, byl v nich stejný počet mravenců i před 5 minutami, neboli $B_b = C_b$. To si můžete ověřit i odečtením druhé a třetí rovnice. Tím jsme zredukovali jak počet proměnných, tak počet rovnic na 3. Dále už můžete například vyjádřit A_b z první rovnice, dosadit do poslední rovnice, následně z ní vyjádřit B_b a dosadit do druhé rovnice a již můžete vypočítat D_b a zpětným dosazováním i ostatní hodnoty. Výsledek je

$$A_b = 13, \quad B_b = 26, \quad C_b = 26, \quad D_b = 34.$$

Metodu, kterou jsme použili v bodu *a* pro výpočet rozdělení po 5, 10 a 15 minutách můžeme iterovat libovolně dlouho. Předpokládejme, že postupnou iterací se budeme blížit nějakému konstantnímu rozdělení. Konstantním rozdělením máme na mysli to, že když na něj znovu provedeme jeden krok této iterace, dostaneme zase to samé rozdělení. Tato podmínka nám stačí na to, aby jsme takové rovnovážné rozdělení našli, protože jí můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned}A_{\text{eq}} &= 0,4A_{\text{eq}} + 0,2D_{\text{eq}}, \\B_{\text{eq}} &= 0,4B_{\text{eq}} + 0,3C_{\text{eq}} + 0,2D_{\text{eq}}, \\C_{\text{eq}} &= 0,4C_{\text{eq}} + 0,3B_{\text{eq}} + 0,2D_{\text{eq}}, \\D_{\text{eq}} &= 0,4D_{\text{eq}} + 0,6A_{\text{eq}} + 0,3B_{\text{eq}} + 0,3C_{\text{eq}}.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy, které splňuje podmínku na zachování mravenců

$$A_{\text{eq}} + B_{\text{eq}} + C_{\text{eq}} + D_{\text{eq}} = 1000,$$

jsou hodnoty

$$A_{\text{eq}} = 125, B_{\text{eq}} = 250, C_{\text{eq}} = 250, D_{\text{eq}} = 375.$$

Všimněte si, že toto řešení je nezávislé na počátečním rozložení mravenců. Jediné, co jsme předpokládali, bylo, že počáteční rozložení musí být takové, aby se postupem času dostalo do konstantního stavu. Ukazuje se, že v našem případě je to pravda pro libovolnou počáteční podmínku. Důkaz je jednoduché cvičení, nicméně se neobejde bez znalosti maticového počtu. Ti z vás, co matice a jejich vlastní čísla znají, si to určitě dokáží dokázat sami. Ostatní si můžou udělat jednoduchou numerickou simulaci. Přesvědčte se, že libovolnou počáteční podmínku můžete složit pouze ze situací, kdy začínáte s 1000 mravenci pouze v jedné z místností. Numericky poté proveďte mnohonásobné iterace pro tyto čtyři různé případy a ukažte, že každý opravdu skončí v námi nalezeném rovnovážném stavu. Z toho také plyne, že počty mravenců nemůžou začít oscilovat.

Jan Humplík
honza@fykos.cz

Úloha V.4 . . . maminka a kočárek

5 bodů; průměr 1,82; řešilo 17 studentů

Maminka má kočárek o hmotnosti m a je s ním pevně spojena vláknem délky l , které je na počátku natažené. Mezi maminkou i kočárkem a podlahou, na které oba stojí, je nenulový koeficient smykového tření f . Maminka začne kočárek táhnout po přímce konstantní rychlostí v , která je kolmá na počáteční polohu vlákna. Popište trajektorii kočárku v závislosti na parametrech úlohy. Maminku i kočárek považujte za hmotné body. Doporučujeme úlohu numericky simulovat.

Maturantská.

Nejdříve upřesníme zadání – je zde uvedeno, že třecí síla působí také mezi maminkou a podlahou, tato podmínka je naprosto nepodstatná, protože máme informaci, že maminka táhne po přímce stále konstantní rychlostí, proto nemusíme provádět silový rozbor.

Dále budeme v řešení uvažovat, že provázek bude po celou dobu natažený, tj. vzdálenost maminky a kočárku bude konstantní (tuto podmínku si na konci ověříme). Pokud by tomu tak nebylo, nastal by analyticky špatně řešitelný problém: $|\mathbf{MK}| \leq l = \text{konst}$. Bylo by nutné ošetřit případ nataženého a nenataženého vlákna zvlášť.

Zamyslíme se nad tím, jaké síly nám působí na kočárek. Jednak to je síla třecí, která působí proti pohybu kočárku, jednak to je síla napínající provázek. Nyní uděláme úrok stranou – budeme celou situaci řešit v soustavě spojené s maminkou, tj. soustavě pohybující se rychlostí v . Tato soustava má tu výhodu, že vzhledem k tomu, že jsme k ní dospěli pomocí Galileiho transformace, tak se neobjeví setrvačné síly, které by nám celou situaci zkomplikovaly. Dále budeme úlohu řešit v polárních souřadnicích (polohu kočárku budeme udávat pomocí úhlu φ a vzdálenosti r od maminky). Podle předpokladu výše budeme uvažovat $r = \text{konst}$.

Přešli-li jsme do polárních souřadnic a požadujeme-li, aby platilo $r = \text{konst}$, tak nám zbude pouze jedna proměnná, a to φ . Proto nemusíme uvažovat sílu v provázku (je radiální, tj. nemění velikost tangenciální rychlosti). Stačí uvažovat pouze tangenciální složku třecí síly, která nám bude měnit rychlost „oběhu“ kočárku okolo maminky.

Víme, že velikost třecí síly je konstantní a její velikost je $F_t = m g f$. Nyní již musíme tedy pouze vypočítat její průmět do směru kolmého na provázek. Dále ještě víme, že třecí síla působí proti směru rychlosti. Proto platí

$$\frac{F_{tt}}{F_t} = \frac{w_t}{w},$$

kde F_{tt} je velikost tečné složky třecí síly, w_t je tečná složka rychlosti a w je celková velikost rychlosti. Při výpočtu třecí síly je potřeba opět uvažovat i rychlost maminky, kterou jsme výše odtransformovali Galileiho transformací, protože třecí síla působí mezi kočárkem a podložkou, ale směr se touto transformací nemění. Pro celkovou velikost rychlosti dle kosinové věty platí

$$w = \sqrt{l^2 \dot{\varphi}^2 + v^2 - 2vl\dot{\varphi} \sin \varphi},$$

kde $\dot{\varphi}$ značí derivaci úhlu φ podle času, tj. úhlovou rychlost. Pro tečnou složku rychlosti platí

$$w_t = l\dot{\varphi} - v \sin \varphi.$$

Nyní již můžeme napsat druhý Newtonův pohybový zákon

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -lF_{tt} = mglf \frac{l\dot{\varphi} - v \sin \varphi}{\sqrt{l^2 \dot{\varphi}^2 + v^2 - 2vl\dot{\varphi} \sin \varphi}},$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gf}{l^2} \frac{\dot{\varphi} - \omega \sin \varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \omega^2 - 2\omega\dot{\varphi} \sin \varphi}},$$

kde jsme označili $\omega = v/l$, tj. počáteční úhlovou rychlost pohybu kočárku.

Tato diferenciální rovnice bohužel již nelze dále řešit analyticky až na jeden triviální případ, a to $f = 0$, tj. pohyb bez tření. Potom nám na kočárek nepůsobí žádný moment síly a proto se pohybuje konstantní úhlovou rychlostí a platí

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{v}{l}t.$$

Nyní již stačí numericky vyřešit rovnici výše a navrátit všechny substituce, tj. Galileiho transformaci a polární souřadnice. Platí

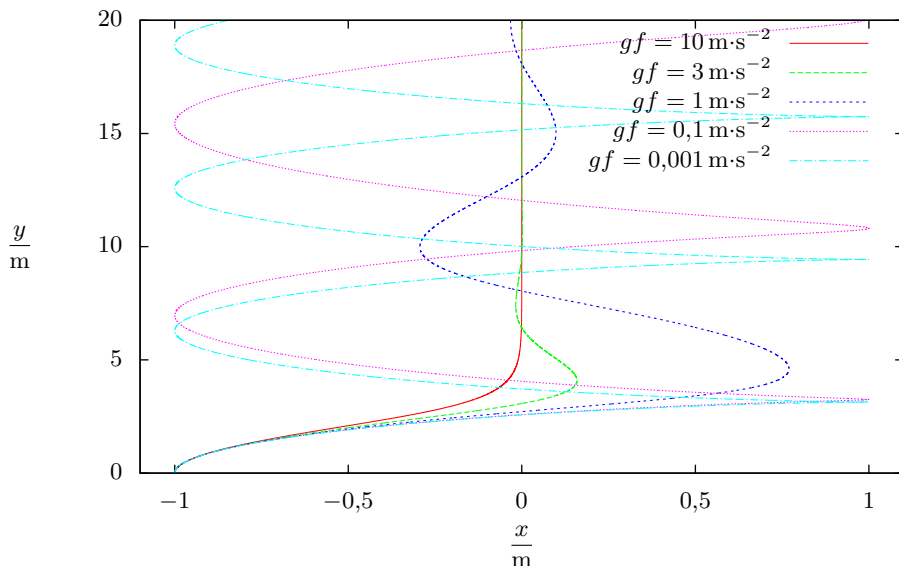
$$x(t) = -l \sin \varphi,$$

$$y(t) = vt - l \cos \varphi.$$

Na obrázku 3 jsou vykresleny trajektorie pohybu pro rychlost $v = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, délku $l = 1 \text{ m}$ a součin $gf \in \{10, 3, 1, 0,1, 0,001\} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Je zde dobře vidět, že pro velký koeficient tření $gf = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ se kočárek pohybuje téměř přímo za maminkou, tj. lze zanedbat setrvačnost kočárku. Naopak pro $gf = 0,001 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je již tření velmi malé a trajektorie odpovídá obíhání kočárku okolo maminky téměř konstantní úhlovou rychlostí.

Nyní se vrátíme k podmínce, která požaduje, aby bylo lanko plně natažené, tj. požadujeme, aby radiální síla působící na kočárek byla kladná. Radiální síla má dvě složky, jednak sílu třecí, jednak sílu dostředivou způsobenou pohybem kočárku okolo maminky. Musí proto platit

$$gf \frac{v \cos \varphi}{w} < \dot{\varphi}^2 l,$$



Obr. 3: Trajektorie pohybu pro různé počáteční parametry.

což je opět podmínka, kterou je nutno testovat numericky. Jediné, co lze říci, je, že pro $f = 0$ je splněna vždy a vlákno tedy nikdy nepřestane být napjaté.

Pokud je lano nenapjaté, je potřeba řešit soustavu dvou diferenciálních rovnic – jednak pro úhlovou odchylku, jednak pro radiální vzdálenost. Dojde-li opět k napnutí lana, tak není v zadání řečeno, jak se bude lano chovat – zdali se bude chovat pružně, tj. kočárek odskočí opět do vnitřku kruhu (zmenšenou radiální rychlostí), nebo nepružně, tj. kočárek se bude dále pohybovat po obvodu kruhu s nulovou radiální rychlostí.

Poznámky k došlým řešením

Většina z vás vůbec neuvažovala setrvačnost kočárku a ignorovala tření mezi podložkou a kočárkem, tj. předpokládala, že kočárek se pohybuje vždy ve směru lana, což je pravda pouze pokud je koeficient tření veliký. Bohužel pouze velmi málo z vás si všimlo analyticky řešitelného případu pro $f = 0$.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha V.5 ... lovec v2

4 body; průměr 1,05; řešilo 22 studentů

O kolik musíme zvýšit výkon motoru na jednoho chyceného ptáka za sekundu, pokud nad vagonem vztyčíme síť, do níž chytáme nebohé ptáky? Vlak jede rychlostí v , pták váží m , jeho rychlost je w , úhel nalétnutí do sítě je φ a síť má plochu S . Předpokládejte, že mezi jednotlivými záchyty se síť vrátí vždy do klidové polohy. *Orgové jeli vlakem.*

Rozmysleme si nejdříve, za jakých zjednodušujících předpokladů budeme úlohu řešit a jaké údaje ze zadání k tomu skutečně potřebujeme. Naší strategií bude přitom získat vyjádření přírůstku výkonu ze znalosti rovnováhy sil, neboť víme, že rychlost v vlaku se v momentu natažení sítě nezmění. Pro jednoduchost předpokládejme, že se hmotnost vlaku chytáním ptáků nemění, jinak bychom museli řešit úlohu s proměnnou hmotností. Za zmínku stojí také to, že vůbec nepotřebujeme znát plochu sítě S , přesvědčí nás o tom následující výpočet.

V okamžiku před natažením sítě má lokomotiva rychlost v a její motor má výkon

$$P = \frac{Fv}{t} = Fv.$$

Z prvního Newtonova zákona víme, že síla F , kterou působí motor na koleje, je v rovnováze s odporovou silou prostředí F_{od} , která má stejnou velikost, ale opačný směr. Spočtíme nyní, o kolik se zvětší tato odporová síla v okamžiku natažení sítě. Nechť ψ je úhel mezi normálou k síti a směrem jízdy vlaku, a φ je úhel nalétnutí ptáka do sítě. Jelikož nemáme informaci o pravděpodobnostním rozdělení směru rychlosti ptáků, předpokládejme, že rychlost ptáků w má dvě složky, rovnoběžnou s v a kolmou na rovinu pohybu vlaku (zkuste si rozmyslet, jak by se řešení změnilo, pokud bychom tento předpoklad uvolnili). Nás zajímá rovnoběžná složka w_{\parallel} , protože složka kolmá na zem je vykompenzována reakcí od kolejnic a na brzdění vlaku se nepodílí. Sílu F budeme chtít vyjádřit z první věty impulsové jako změnu hybnosti za jednotku času.

Jak se tedy změní hybnost jednoho nebohého opeřence poté, co uvízne v síti? Před chycením má rovnoběžná složka jeho hybnosti velikost

$$p_1 = mw_{\parallel} \sin(\varphi + \psi)$$

a směr opačný se směrem v . Po chycení se pták pohybuje společně s vlakem, jeho hybnost je

$$p_2 = mv.$$

Celkově tedy

$$\Delta p = m(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v).$$

Pro n ptáků za sekundu bude platit

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{ntm(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v)}{t} = nm(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v).$$

Tuto sílu musí motor vykompenzovat zvýšeným výkonem

$$\Delta P = Fv = nmv(w_{\parallel} \sin(\varphi + \psi) + v).$$

V našem konkrétním případě $n = 1$.

Pavel Irínkov
pavel@fykos.cz

Úloha V.P ... světelný meč

5 bodů; průměr 2,81; řešilo 21 studentů

Navrhňte konstrukci světelného meče, aby byl sestrojitelný za současného poznání vědy a techniky a přitom vypadal i fungoval podobně jako ten autentický ze Star Wars.

Organizátoři se inspirovali vlastní legendou.

Úvod ke světelným mečům

Uvědomíme si nejdříve, co světelný meč je. Ti, co znají Star Wars, to jistě dobře ví, a ti, kteří nikdy tuto ságu nesledovali, mohou snadno najít informace například na internetu.^{2 3}

Základem světelného meče je cca 30 cm dlouhý jílec, který má obvykle kovový vzhled, následovaný v zapnutém stavu čepelí, která je cca 1,3 m dlouhá a je tvořena jakousi „zářivou energií“ – v podstatě světlem. „Energie“ může mít různou barvu, nejčastější bývá modrá, zelená a červená. Objevily se i vzácnější světelné meče žluté, fialové a dokonce i černé⁴ (zrovna svítící černé barvy se současnou fyzikou asi nedosáhneme). V rámci všech filmů a příběhů se vyskytly i exotické meče, které měly například dvě spojené čepele, ale to byly de facto dva spojené meče. Zde udané délky jsou jenom typické střední délky, protože např. v III. epizodě je vidět, že Yoda používá kratší meč než Darth Sidious. Pro nás je ale hlavně důležitý fakt, že je délka meče konečná. Ve vypnutém stavu má pak meč rozměr rovný pouze rozměru jílice.

Důležité jsou pak další vlastnosti meče ve filmech. Zejména se s ním dá bojovat, tzn. pokud se dva meče zkrříží v rámci akční scény, tak se o sebe zastaví. Jinak by to asi nebyl moc dobrý meč. Zajímavou vlastností je, že světelný meč dokáže rozřezat téměř všechno, až na nějaké exotické materiály jako phrik, cortosis a mandaloriánskou ocel. To jsou též sci-fi materiály, takže budeme chtít, aby náš meč řezal prakticky všechno. Dalším omezením je, že chceme, aby meč byl jak sečnou, tak i bodnou zbraní (např. ukázka bodného použití⁵ v čase 3:10 a posléze v čase 4:47 i sečného).

Ze stejné nahrávky by mohlo být patrné, že použití meče na lidskou tkáň vede k automatické kauterizaci (zcelení ran pálením). Malé rozměry jílice se stávají další komplikací pro uschování dostatečně silného energetického zdroje. Zdá se také, že místo jedno- či dvoustranné čepele má válcově symetrickou čepel. Dokáže odrážet střely z blasteru. Při souboji vydává specifický zvuk.

Velice nepříjemný technický oříšek je jeho použitelnost vždy a všude. Dá se použít jak v jakékoli atmosféře, tak ve vakuu nebo pod vodou (např. Kit Fisto v čase kolem 1:00 ve videu⁶). Navíc se dá zapnout téměř okamžitě a není příliš křehký. Sice se dá rozbít, ale musí se jednat o opravdu velice agresivní pád nebo o jeho vyslovené rozříznutí.

Michio Kaku, teoretický fyzik a fanoušek sci-fi, se pokusil v rámci seriálu Sci-fi Science odhalit, jakou má současná věda možnost zkonstruovat světelný meč. Seriál můžete shlédnout na YouTube.⁷ Řešení se dále místy odvolává právě na tento pořad, snaží se ho rozšířit a upozornit na další technické problémy a možnosti.

Energetický zdroj

Dostatečně kompaktní energetický zdroj pro zbraň je jedním z klíčových problémů konstrukce. Na energetickém zdroji asi rovnou skončí naše vize mít opravdu silný meč, co rozřeže téměř cokoliv. Jsou ale určité cesty, kterými by snad mohl být napájen, i když ještě dnes nejsou úplně ve stavu, kdy by se daly rovnou použít. Vměstnat výkon nějaké menší elektrárny do jedné ruční zbraně totiž není nic dvakrát jednoduchého.

Technický výdobytek, který navrhuje Michio Kaku, je baterie z uhlíkových nanotrubiček. Uhlíkové nanotrubičky vedou elektrický proud a mohly by se tak použít jako desky miniaturních

²http://cs.wikipedia.org/wiki/Světelný_meč

³<http://en.wikipedia.org/wiki/Lightsaber>

⁴<http://www.youtube.com/watch?v=tw-rYjYnAzE&feature=related>

⁵<http://www.youtube.com/watch?v=Ku5zkPdK0BY>

⁶<http://www.youtube.com/watch?v=n3wLesNq4LI>

⁷<http://www.youtube.com/watch?v=xSNUbaa7n9o>

kondenzátorů. Vzhledem k tomu, že by se takových miniaturních destiček o šířce nanotrubičky vešlo do malých rozměrů velmi vysoké množství, tak by po nabití takový kondenzátor mohl sloužit jako zdroj energie naší zbraně. Má to ovšem určité mouchy, o kterých Kaku raději nemluví. Evidentní je, že by se muselo podařit vytvořit vždy vrstvu nanotrubiček a pak mezi ně dát nějaký co nejlépe izolující materiál. U takto malých kondenzátorů by se nejspíš stal problémem i tunelový proud mezi sousedními deskami. Pokud by se tyto problémy podařilo překonat, tak by to byl asi téměř ideální zdroj díky svojí velké skladnosti a přenosnosti.

Pokud bychom chtěli mít zdroj energie v rukojeti, tak nám opravdu nezbyvá nic než hledat nějaké nanotechnologie. Jaké různé nové druhy baterií se v dnešní době vyvíjí, si můžete přečíst např. v magazínu.⁸ Všechny mají pro nás ale dost nedostatečnou kapacitu. Proto můžeme uvažovat o tom, jak si pomoci jinak. Docela hloupá alternativa by byla nějaká baterie, kterou by měl bojovník na sobě, například v batohu na zádech, a bylo by jí potřeba připojit k meči před použitím. Hloupá je, protože by to omezovalo pohyb nositele meče, nevypadalo by to jako ve Hvězdných válkách a navíc by se meč nedal házet zapnutý, což občas jeho nositelé používají. Mohli bychom si pomoci solárními články v oblecích rytířů, ale to nebude zase příliš velká pomoc. Má stejný problém jako uložení baterie a navíc světelný meč jde použít i ve tmě, kde ho právě někdy používají Jediové místo baterky.

Zajímavou alternativou by bylo využít nápad, který měl již Nicola Tesla. Pokud bychom umístili do dostatečné blízkosti boje naši elektrárnu, co by vysílala elektrinu, či spíše energii, do okolí ve formě elektromagnetických vln, a zařídili bychom to tak, že by ji meč dokázal sbírat v průběhu boje, tak bychom měli vyhráno. Ale zase tím přicházíme o jakousi efektivnost jeho použití – musíme si s sebou vozit elektrárnu. Problém by mohl nastávat i u příjmu energie, protože by nesmělo záviset na poloze meče. Musel by přijímat nějaký stabilní minimální výkon, což nás nabádá k tomu rozmístit elektrárny více s různě polarizovanými vysílači. A pokud bychom potřebovali energii opravdu hodně, pak můžeme narazit na problém, jak neugrilovat našeho bojovníka jenom samotným elektromagnetickým zářením.

Dále už předpokládáme, že jsme energetický problém vyřešili, i když to tak zcela není.

Laserový meč

Asi každého fanouška napadne, že když se říká světelný meč, tak by měl být ze světla, a tedy nejspíše laseru. Vzhledem k tomu, že i autoři tvrdí, že uvnitř rukojeti meče se skrývá krystal, který je nejdůležitější součástí meče a který dává meči jeho barvu a další vlastnosti, pak nás to směřuje právě k laserům. Má to ovšem hned na první pohled zásadní chybu. Laserový paprsek může být sice silnou zbraní a řezat cokoli, ale není konečný a nemůže sám o sobě fungovat jako meč, protože se při souboji meče prostě minou a nemůže tak sloužit k obraně vlastníka. Má ale tu výhodu pro fanoušky, že může mít prakticky jakoukoliv barvu (kromě černé a hnědé), i když v bezprašném prostředí či za silného denního osvětlení paprsky vlastně vůbec nevidíme, takže zase nebude vypadat tak dobře.

Konečnost meče a společně s tím i jeho možné použití v boji bychom mohli zařadit výsuvným zrcátkem, které by bylo upevněno na velice pevné zásuvné tyčce. Tyčka by byla uprostřed meče a byla by dokola obklopená svazky laserového záření. Tyčka by nesměla být prakticky vůbec ohebná, protože jejím prohnutím by se změnila poloha zrcátka a to by mohlo odrazit smrtelně nebezpečné záření zpět k ruce držitele meče a při velkém průhybu by opět šlo záření úplně mimo zrcátko. Navíc její materiál by musel být laseru-odolný (obdobně jako zmíněné

⁸http://www.chip.cz/clanky/trendy/2011/05/vykonne-baterie-zitrka/article_view?b_start:int=0&C=

zrcátka). Takže rovnou ho budeme muset stavět tak, aby nerozřezal úplně všechno. S odrazy by vůbec byl problém. Při rozřezávání by náhodný odraz mohl zranit náhodné kolemjdoucí, protivníka i držitele meče. Odraz laseru zpátky do zdroje zvyšuje nároky na kontrolu síly laserového paprsku uvnitř meče, protože bychom přehnanou produkcí laserového záření, které by se nám vracelo po optické cestě zpět, mohli zničit krystaly, ve kterých laserování probíhá. Umístěním zrcátka na konec meče jsme se zbavili možnosti použití meče jako bodné zbraně, pokud bychom ho nějak nevylepšili.

Plazmový meč

Michio Kaku navrhuje konstrukci plazmového meče, ze kterého by proudilo rozžhavené plazma. Jeho „ostří“ by bylo tvořeno keramickým materiálem, který by vydržel velmi vysoké teploty. Keramika je na druhou stranu nepraktický materiál, protože je křehký.

Plazma by se vytvářelo z okolního vzduchu, který by byl nasáván do hlavice meče a proudil by skrz rukojeť, ve které by se zahříval, ionizoval a dál putoval do „ostří“, ve kterém by bylo velké množství malých otvorů a s pomocí elektromagnetického obvodu, cívky uschované v keramice, by bylo plazma rovnoměrně distribuováno do okolí čepel. Získali bychom tak meč, který by byl válcově symetrický, mohl by sloužit jak jako sečná, tak i bodná zbraň, a docházelo by u něj ke kauterizaci ran. Skladnost meče by se zajistila zásuvným mechanismem keramické čepel.

Velká nepraktičnost meče je v omezeném použití jenom v obvyklé atmosféře. Ve vakuu by nešel používat určitě, v jiných hustotách tekutin by pak minimálně potřeboval nějak seřídít a upravit, ale rozhodně by se nedal použít jen tak jednoduše.

Chlazení

S problémem vysoké spotřeby energie a potažmo i použitím vysokých teplot u plazmového meče nám vznikají velké nároky na chlazení jeho jílce. Ve filmech můžeme sledovat, jak ho drží postavy rukou, což by bylo neuskutečnitelné bez nějakého chlazení. U plazmového meče probíhá svým způsobem aktivní chlazení natahováním vzduchu z okolního prostředí, ale u této konstrukce si pak budeme úmyslně produkovat další teplo, což chlazení nepomůže.

Stoupající potřeba energie nám vadí kvůli odporům součástek, kterými poteče elektrický proud. V extrémním případě by se nám mohlo podařit i součástky vypařit. Odpor alespoň některých součástek by se dal anulovat, pokud by se podařilo objevit ultra-vysokoteplotní supravodiče supravodivé za pokojových teplot. V současné době známé látky, tzv. vysokoteplotní supravodiče, mají potřebné vlastnosti při teplotách kolem kapalnění dusíku. Bylo by samozřejmě možné mít uvnitř chladicí systém, který by chladil obvody na nižší teplotu, ale tím pádem by bylo chlazení ještě složitější.

Pro chlazení potřebujeme nějak odvádět teplo pryč z jílce. K tomu je potřeba nějaké chladicí médium. V případě přítomnosti okolní atmosféry se dá použít okolní vzduch či voda. V případě souboje ve vzduchoprázdném vesmíru narazíme na další problém. Nejspíše by ale tak jako tak byla potřeba vyvinout nějaký účinný systém chlazení pomocí cirkulace chladicí kapaliny, která by se vypařovala do okolního prostředí a měla by vysoké latentní teplo varu a teplotu varu o nějaké rozumně nízké hodnotě. Tím zase narazíme na problém s doplňováním kapaliny, kterou nikdy Jediové doplňovat nemuseli.

Závěr

Dokonalou kopii světelného meče z Hvězdných válek nejspíš nikdy nebude možné vyrobit kvůli velkému množství požadavků, které musí zároveň splňovat. Vyrobit kopii, která alespoň vypadá podobně jako meče ve filmech, se dá relativně jednoduše a jsou o tom desítky internetových stránek. Vyrobit něco, co by se mu funkčně blížilo, je dosti ošemetná věc a i když se Michio Kaku v seriálu tváří, že nejsme tak daleko od jeho realizace, tak nám v cestě stojí ještě spousta technických problémů. Pokud by ale někdo hodlal věnovat do vývoje světelného meče pár miliard dolarů, tak věřím, že za deset, dvacet let by mohl mít relativně dobře funkční výrobek.

Z hlediska hodnocení a bodování úlohy budeme brát jako důležité hlavně výčet co nejvíce fyzikálních vlastností a zhodnocení jejich možné (ne)realizace v nějakém modelu meče.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha V.E ... kávu si osladím

8 bodů; průměr 4,96; řešilo 26 studentů

V obálce vám spolu se zadáním došel i plastový sáček s podezřelým obsahem, je to cukr nebo sladidlo.

Pokuste se co nejlépe experimentálně srovnat „sladkost“ (sladivost) dodaného vzorku a několika dalších různých cukrů a sladidel. Pro odměření množství použijte přiloženou lžičku. „Sladkost“ testovaného vzorku určujte pro koncentraci jedné zarovnané lžičky cukru/sladidla v 1 dl vody. Jako jednotkovou „sladkost“ můžete brát např. rafinovaný řepný cukr (o koncentraci jedné zarovnané lžičky na 1 dl vody). Porovnávat pak můžete tak, že si připravíte roztoky o různé koncentraci známého cukru/sladidla a budete srovnávat chuť těchto roztoků s připraveným roztokem testovaného vzorku. Pro zpřesnění určení „sladkosti“ se domluvte s nějakými dalšími lidmi, kteří se do srovnávání sladkosti zapojí (ale ne s ostatními řešiteli, ať má každý svoje vlastní řešení). U každého cukru zjistěte co nejpřesněji složení a výsledky vhodně zpracujte.

Nápověda Cukr se dá sehnat řepný rafinovaný (normální bílý cukr, co se obvykle u nás používá), ale je také k sehnání např. třtinový cukr (chemicky téměř jako řepný), hroznový cukr (dextróza; v Glukopuru) a ovocný cukr (fruktóza). Ze sladidel můžeme jmenovat sorbit, huxol, sukralózu (v Cukrenu, Cukravitu), aspartam (v Irbis big sweet). Ke slazení se také používá med. Doporučujeme použít sladidla s řádově podobnou sladivostí (u některých čistých sladidel, co sladí i 600 krát tolik, co obyčejný cukr, narazíte na problémy s odvažováním).

Pokud FYKOS řešíte poprvé a měli byste zájem o vzorek, stačí o něj napsat na emailovou adresu podezrelyprasek@fykos.cz.

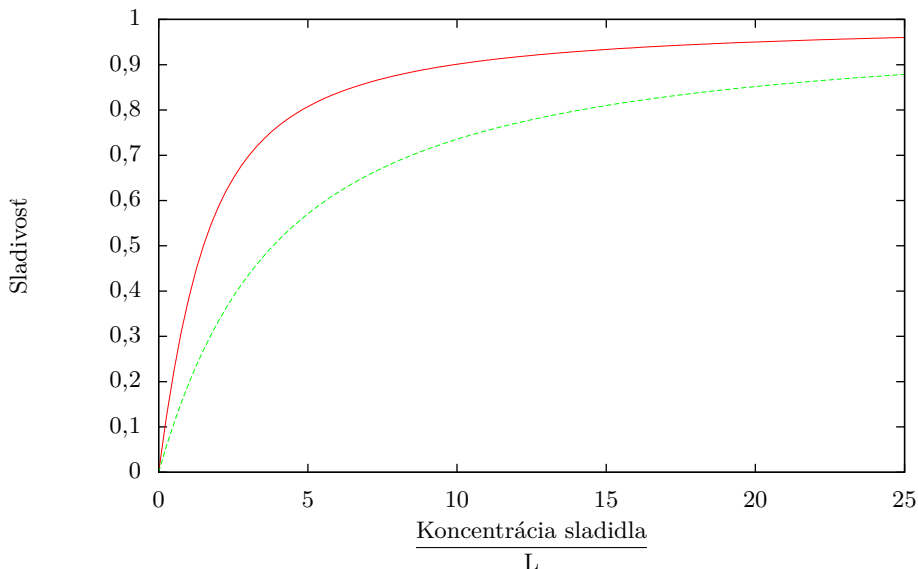
Varování Každá látka může být při zvýšené spotřebě nebezpečná. I destilovaná voda je jed. Snažte se tedy dodržovat doporučené denní dávky. Karel si rád kazí zuby sladkostí.

Teória

Každá látka pôsobí na receptory v ústach iným spôsobom. Pri každej koncentrácii sa vytvorí po chvíli rovnováha, pri ktorej budete cítiť istú sladkosť závislú od toho, na akej časti sladkocitlivých buniek je naviazané sladidlo. Tu však neplatí pekná lineárna závislosť. To znamená, že pre dvojnásobnú koncentráciu sa percento viazaných receptorov nezdvojnásobí, pretože ich máme obmedzené množstvo.

V grafe 1 sú zobrazené závislosti sladivosti od koncentrácie pre dve rôzne sladidlá. Predstavme si, že sme namerali rovnaké sladivosti pre koncentráciu nami poslaného sladidla c_1

a koncentraciu vášho kuchynského cukru c_2 . Čo by sa stalo, ak by ste teraz zistili koncentrácie zodpovedajúce rovnakým sladivostiam pre dvojnásobnú koncentráciu cukru? Koncentrácia sladidla by už *nebola* dvojnásobná! Dôvod je ten, že závislosti v grafe nie sú lineárne. Preto by ste mali používať referenciu, s ktorou porovnávate jednu konkrétnu koncentráciu sladidla, najlepšie odporúčanú jednu lyžičku cukru na 100 ml vody.



Obr. 4: Sladivosť dvoch rôznych sladidiel

Meranie

Prášku ste dostali obmedzené množstvo, takže bolo potrebné si dopredu trochu premyslieť, aké koncentrácie budete vyrábať. Najlepšie bolo držať sa zadania a vyrobiť referenčnú sladkosť jednej zarovnané lyžičky cukru v 100 ml vody. Ďalej ste riedili alebo zahusťovali zmes sladidla s vodou, až pokiaľ ste dospeli ku nemerateľnému rozdielu.

Každý z vás dostal jednu z troch rôznych možných vzoriek a to: glukózu (Glukopur), fruktózu (Fruktopur) alebo zmes umelého sladidla a cukru (Fruktafam). My sme pri meraní postupovali nasledovne. Najprv sme porovnali sladkosť referenčného roztoku a roztoku s rovnakou koncentráciou sladidla, teda 1 zarovnaná lyžička na 100 ml vody. Ak sme potrebovali riediť, zriedili sme časť tohoto roztoku s rovnakým množstvom vody, čím sme koncentráciou sladidla zmenšili na polovicu. Pri zahusťovaní sme zasa zmiešali rovnaké množstvo menej koncentrovaného a koncentrovanejšieho roztoku sladidla, čím sme dosiahli aritmetický priemer týchto koncentrácií.

Pri samotnom ochutnávaní ste si určite sami všimli, že stačilo malé množstvo na porovnanie, no oveľa istejší ste si boli po viacerých ochutnaniach oboch roztokov. Taktiež bolo vhodné pri tesnejších rozdieloch dať určiť sladkosť viacerým ľuďom.

Výsledky

Výsledky nášho merania sú zaznamenané v tabuľke 1. Ako základnú jednotku koncentrácie sme zvolili L, čo predstavuje jednu zarovnanú lyžičku látky na 100 ml vody.

Glukopur		Fruktopur		Fruktafam	
$\frac{c_g}{L}$	Vzorka bola	$\frac{c_f}{L}$	Vzorka bola	$\frac{c_s}{L}$	Vzorka bola
1	menej sladká	1	sladšia	1	sladšia
2	menej sladká	0,5	menej sladká	0,5	sladšia
3	sladšia	0,75	menej sladká	0,25	sladšia
2,5	sladšia	0,87	sladšia	0,12	menej sladká
2,25	nerozhodnuteľné	0,81	nerozhodnuteľná	0,19	sladšia
-	-	-	-	0,16	nerozhodnuteľné

Tabuľka 1: Namerané hodnoty

Pri výsledkoch merania označených nerozhodnuteľné sme vzorku testovali na 4 ľuďoch, ktorí nám povedali nie konzistenté porovnania sladkosti. Dostali sme teda takto interval, v ktorom sa určite nachádza výsledná sladkosť. Očakávaná hodnota tejto sladkosti leží zrejme v strede tohoto intervalu a stredná kvadratická chyba je niečo pod polovicou šírky tohoto intervalu (pre záujemcov, skúste si spočítať strednú kvadratickú chybu náhodnej veličiny, ktorá s rovnakou pravdepodobnosťou nadobúda všetky hodnoty medzi 0 a 1). Okrem tejto nepresnosti určenia výsledku sa vyskytujú aj iné chyby spôsobené hlavne nepresným odmeriavaním objemov vody a cukru. Takéto chyby sú však v porovnaní s touto chybou dostatočne nízke na to, aby sme ich mohli zanedbať. Ak ste to sami skúšali, vzorka sa v lyžica dala zarovnať skutočne celkom presne a rovnako porovnávanie výšky hladín sa dalo robiť s dostatočnou presnosťou.

Záver

Pre Glukopur dostávame teda výsledok, že $(2,25 \pm 0,20)$ lyžičky Glukopuru sladí rovnako ako 1 lyžička cukru. Glukopur nanešťastie neudáva sladivosť glukózy. Podľa Wikipédie⁹ je sladivosť glukózy okolo 70 % sladivosti sacharózy, ale ťažko sa určuje prepočet z jedného prášku na druhý z pomeru udávaného na Wikipédii. Naša glukóza je teda ešte o niečo menej sladká ako tá na Wikipédii.

Pre Fruktopur udáva výrobca na obale sladivosť o 30 % vyššiu ako sacharózy. Nám vyšiel ekvivalent jednej lyžičky sacharózy na 100 ml vody ako $(0,81 \pm 0,04)$ L, čo predstavuje sladivosť o (23 ± 6) % vyššiu ako cukru, čo sa dobre zhoduje s uvádzanou hodnotou.

Pre umelé sladidlo Fruktafam dostávame koncentráciu $(0,16 \pm 0,02)$ L ako ekvivalent 1 L cukru. Výrobca uvádza, že jeho sladidlo je až päťkrát sladšie ako cukor. Nám táto hodnota vyšla $(6,3 \pm 0,8)$ -krát, čo je opäť v celkom slušnej zhode s udávanou hodnotou.

Celkovo by som teda meranie prehlásil za úspešné a až prekvapivo presné. Veľa zdravy pri sladení.

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

⁹<http://en.wikipedia.org/wiki/Sweetness>

Úloha V.S . . . seriálová

6 bodů; průměr 2,33; řešilo 18 studentů

- Aktivní galaxie se na obloze stejně jako hvězdy jeví jako bodové zdroje. Zkuste navrhnout co nejlépe způsobů, jak rozlišit hvězdu a aktivní galaxii.
- Z rádiového pozorování kvasaru 3C 273 se zjistilo, že shluk hmoty v jetu se pohybuje od aktivního jádra s úhlovou rychlostí $\mu = 0,0008 \text{ rok}^{-1}$. Předpokládejte, že shluk se pohybuje v rovině oblohy kolmo na linii pozorování, vzdálenost je $d = 440/h \text{ Mpc}$, h je Hubbleova konstanta. Vyjádřete zdánlivou rychlost v_{zd} .
- Odvodte, pro jakou hodnotu úhlu φ bude β_{zd} maximální?
- Předpokládejme, že supermasivní černá díra v centru galaxie má účinnost 30%. Kolik energie vyzáří, pohltí-li objekt o hmotnosti Země?

Janapka.

Hvězda vs. galaxie

Máme-li k dispozici dostatečně dobrou technologii, mohli bychom aktivní galaxie od hvězd principiálně rozlišit tak, že kolem aktivní galaxie budeme pozorovat mlhavé halo, tedy samotnou hostitelskou galaxii. Takového výsledku je v principu možné dosáhnout s největšími dalekohledy na světě, jako je Gran Telescopio Canarias (GTC na La Palmě), Very Large Telescope (VLT v Chile) nebo Keck I a II (na Mauna Kea). Nicméně ne každý má k dispozici velký dalekohled. Principiálně lze aktivní galaxii od hvězdy rozlišit podle vyzařovaného spektra. Aktivní galaxie jsou pozorovatelné od rádiových vlnových délek až po gama. V případě hvězd nic takového nepozorujeme. Výjimkou jsou například pulsary nebo neutronové hvězdy, které můžeme pozorovat přes poměrně široké elektromagnetické spektrum.

V takovém případě nám pomůže spektrum samotných objektů. Spektrální čáry, které pozorujeme u aktivních galaxií, jsou neztotožnitelné s ničím, co bychom pozorovali u hvězd. U hvězd pozorujeme zejména spektrální čáry vodíku (neboť právě z něj jsou hvězdy tvořeny) a několika dalších těžších prvků, popřípadě u chladných hvězd, molekul. V aktivních galaxiích pozorujeme silně ionizované záření, které v hvězdách nemá co dělat. Samozřejmě roli hraje i vzdálenost. Spektra aktivních galaxií jsou posunuta do červené části spektra díky červenému posuvu. Hvězdy by na takovou vzdálenost nebyly pozorovány.

Další způsob, jak odlišit hvězdu a aktivní galaxii, je proměnlivost. Pozorujeme-li proměnlivé hvězdy, zjistíme, že proměnlivost je zpravidla periodická. V případě aktivních galaxií tomu tak není. Periodicita nebyla dosud pozorována (periodicita je způsobena pravděpodobně dopadem shluků hmoty na supermasivní černou díru, shluky nemusí mít stejnou hmotnost a díky tomu pozorujeme různé intenzity).

Kombinací těchto pozorovatelných parametrů můžeme poměrně snadno zjistit, zda-li se jedná o hvězdu nebo galaxii (a nepotřebujeme k tomu dokonce ani nejlepší dalekohledy světa).

Zdánlivě rychlá hmota

Představíme si, jak jsou promítnuty rychlosti a dojdeme k jednoduchému vztahu pro zdánlivou rychlost $v_{zd} = d\mu$. Po dosazení máme hodnotu $1,67 \cdot 10^9 \text{ h}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,57c \text{ h}^{-1}$. Do tohoto vztahu vyjádření dosadíme Hubbleovu konstantu a dostaneme hodnotu $v_{zd} = 7,85c$. Shluk hmoty se tedy pohybuje skoro osmkrát rychleji než světlo. Taková rychlost je ve fyzice nepřístupná. Zamysleme-li se nad tím, kde je v úvaze chyba, zjistíme, že jsme předpokládali, že zhustek se pohybuje v rovině oblohy. Taková podmínka zjevně nemůže platit.

Maximum

Chceme znát, jaké nejvyšší nadsvětelné rychlosti budeme pozorovat ve zdánlivých rychlostech. V seriálu je uveden poměr β pro skutečnou rychlost, nás by zajímal pro zdánlivou

$$\beta_{zd} = \frac{v_{zd}}{c} = \frac{v \sin \varphi}{c(1 - \beta \cos \varphi)},$$

kde $\beta = v/c$. Vztah můžeme přepsat do tvaru

$$\beta_{zd} = \frac{\beta \sin \varphi}{1 - \beta \cos \varphi}.$$

Ptáme se, pro jaký úhel bude hodnota β_{zd} maximální, takže budeme derivovat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{zd}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{zd}}{\partial \varphi} &= \frac{\beta \cos \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)} - \frac{(\beta \sin \varphi)(\beta \sin \varphi)}{(1 - \beta \cos \varphi)^2}, \\ \beta \cos \varphi (1 - \beta \cos \varphi) &= \beta^2 \sin^2 \varphi = \beta^2 - \beta^2 \cos^2 \varphi, \\ \varphi_{\max} &= \arccos \beta. \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do vztahu, který jsme derivovali a vypůjčíme si goniometrické identity

$$\sin(\arccos \beta) = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Nakonec získáme vztah

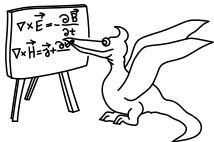
$$\beta_T^{\max} = \frac{\sqrt{\beta(1 - \beta^2)}}{(1 - \beta^2)}.$$

Půjčíme-li si relativistickou notaci $\gamma = 1/(1 - \beta^2)$, pak můžeme výsledek přepsat jako $\beta_T^{\max} = \beta\gamma$. Co to znamená? I pro nějak extrémní rychlosti zhustků hmoty, nepříliš odkloněné od linie pozorování (např. $\varphi \approx \arccos \beta$), můžeme pozorovat nadsvětelné zdánlivé rychlosti, které přesahují rychlost světla v řádech γc .

Země ke snídani

Jedná se v podstatě o úplně jednoduchý problém převodu hmoty na energii, k čemuž nám slouží nechvalně známý relativistický vztah $E = mc^2$. V tomto případě vztah upravíme o účinnost μ , tedy $E = \mu mc^2$. Hmotnost země známe ($5,9742 \cdot 10^{24}$ kg), stejně tak známe rychlost světla. Po vyčíslení dojdeme k hodnotě $1,61 \cdot 10^{41}$ J. Pro srovnání, výbuch supernovy je v řádech 10^{44} J. Srovnáme-li to z pozemskými energiemi, tak zemětřesení, které zasáhlo Japonsko v roce 2011, mělo energii 10^{22} J, popřípadě roční spotřeba energie v celých USA je v řádu 10^{20} J.

Jana Poledníková
janap@fykos.cz



Seriál: Kupy galaxií a výlet do kosmologie

V uplynulých dílech seriálu jsme zjistili, že hvězdy se shlukují do galaxií, které můžeme rozdělit nejen podle jejich morfologie, ale i podle toho, jestli se jedná o galaxie aktivní nebo neaktivní. Pozorováním se ukázalo, že galaxie ve vesmíru nejsou rozprostřeny homogenně, ale na velkých škálách tvoří jakousi kosmickou síť. Tu si můžeme představit jako pěnu v koupeli. Bubliny jsou prázdný prostor mezi galaxiemi, stěny bublin jsou místa, která tvoří kosmickou síť a tam, kde se bubliny protínají, sedí kupy galaxií. Naše pozorování jsou samozřejmě omezená, nicméně numerické modely nám pomáhají nasimulovat vesmír ve velkých škálách. Zatím nejkompaktnější provedenou simulací je tzv. Millenium simulation¹⁰, která simuluje vývoj vesmíru na krychli o straně 2 miliardy světelných let. Začíná ve chvíli, kdy je náš vesmír stár 0,2 miliardy let a končí v současnosti. Jasně body v této simulaci nejsou samotné galaxie, ale kupy galaxií.

Co je to kupa galaxií

Kupa galaxií je gravitačně vázaná skupina galaxií. Mohou jich být desítky, ale i tisíce. Ve viditelné části spektra vidíme pouze kolekci galaxií, pro které se jeví velmi nepravděpodobně, že by mohly být gravitačně svázané, neboť jejich radiální rychlosti jsou příliš velké. Chybějící hmota má dvě části, jednou z nich je tzv. *intercluster medium* – ICM, které představuje horký plyn, který je detekovatelný pouze na rentgenových vlnových délkách, neboť jeho teplota dosahuje $10^7 - 10^8$ K. Jedná se především o brzdné záření (bremsstrahlung) a záření v emisních atomových čarách. Znalost morfologie tohoto plynu je pro nás velmi důležitá, neboť nese informace o historii kupy galaxií. Z rozložení teplot a chemického složení takového plynu se můžeme kupříkladu dozvědět, zda kupa galaxií interagovala s jinou kupou nebo jestli nějakou menší kupu pohltila.

Viditelná složka kup galaxií představuje asi 1% hmoty kupy, ICM představuje cca 9%. Zbýlých 90% představuje již nechvalně známá temná hmota. Kupy galaxií byly mezi prvními systémy, kde byla temná hmota nepřímo pozorována.

Jak odvodit existenci temné hmoty

Existenci temné hmoty jsme ukázali už pro galaxie. Jak se dokazuje pro kupy galaxií? Pomocí tzv. viriálového teorému, který vyjadřuje poměrně jednoduchou skutečnost. Dává do spojitosti středovanou potenciální energii $\langle V \rangle$ a středovanou kinetickou energii $\langle K_T \rangle$ stabilního systému N částic, který je vázán potenciální energií systému

$$2\langle K_T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle V_k \rangle.$$

¹⁰Simulaci můžete zkusnout třeba na <http://www.youtube.com/watch?v=jzFbLHLJhmM>, popřípadě o ní zjistit víc informací na její domovské stránce <http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>.

Předpokládejme, že systém je mechanicky stacionární. Radiální vektor od místa v kupě k určité galaxii o hmotnosti M_σ si označíme \mathbf{r}_σ . Výslednou sílu působící na testovací galaxii můžeme napsat jako

$$M_\sigma \frac{d^2 \mathbf{r}_\sigma}{dt^2} = \mathbf{F}_\sigma,$$

po skalárním vynásobení dostaneme tvar

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (M_\sigma r_\sigma^2) = \mathbf{r}_\sigma \cdot \mathbf{F}_\sigma + M_\sigma \left(\frac{d\mathbf{r}_\sigma}{dt} \right)^2.$$

Sečteme příspěvky od všech galaxií v kupě a vyjádříme si viriál (čili vlastně potenciální energii, ale aby viriál Vir byl potenciální energií, budeme ho muset vystředovat). Polární moment hybnosti je

$$\Theta = \sum_{\sigma=1}^N M_\sigma r_\sigma^2$$

$$Vir = \sum_{\sigma=1}^N \mathbf{r}_\sigma \mathbf{F}_\sigma.$$

Pokud si K_T označíme součet kinetických energií, můžeme výše napsané skalární roznásobení napsat jako

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = Vir + 2K_T.$$

Vzpomeneme si na náš počáteční předpoklad stacionárního systému. V takovém systému je změna momentu hybnosti konstantní, respektive osciluje kolem konstantní hodnoty. Zavedeme-li takový předpoklad, pak

$$Vir = -2K_T, \quad Vir = E_p,$$

potenciální energie v tomto případě je energií gravitační. Můžeme pak napsat

$$E_p = - \sum_{\sigma < \gamma} \frac{GM_\sigma M_\gamma}{r_{\sigma\gamma}},$$

$$-E_p = 2K_T = \sum_{\sigma} M_\sigma \overline{v_\sigma^2},$$

kde v_σ je rychlost galaxie. Zkusme předpokládat, že galaxie jsou uniformně distribuované ve sféře o poloměru R , jejíž potenciální energii spočítáme jako gravitační energii, kterou sféra drží

pohromadě. Představme si, že je tvořena vzájemně na sebe působícími slupkami, každá slupka působí gravitačně na hmotu jí obepnutou, pak

$$\begin{aligned} dE_p &= -G \frac{dm_{\text{slupka}} m_{\text{koule}}}{r}, \\ E_p &= -G \int_0^R \frac{(4\pi r^2 \varrho) (\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho)}{r} dr, \\ E_p &= -\frac{16\pi^2}{15} G \varrho^2 R^5, \\ \varrho &= \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \end{aligned}$$

kde M značí celkovou hmotnost.

Uděláme ještě malou úpravu, rychlosti budeme středovat i přes hmotnosti (proto dvojité středování)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} M_{\sigma} \overline{v_{\sigma}^2} &= \overline{\mathcal{M} v^2} \\ \mathcal{M} &= \frac{5R\overline{v^2}}{3G}. \end{aligned}$$

Síla a viriál pak nabývají tvarů

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\sigma}(r) &= -\frac{GM M_{\sigma} \mathbf{r}_{\sigma}}{R^3}, \\ Vir &= \sum_{\sigma} \mathbf{r}_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} = -\sum_{\sigma} \frac{GM M_{\sigma} r_{\sigma}^2}{R^3}, \\ Vir &= -2K_T = \sum_{\sigma} M_{\sigma} \overline{v_{\sigma}^2} \Rightarrow v_{\sigma}^2 = \frac{GM r_{\sigma}^2}{R^3}. \end{aligned}$$

Vztah pro potenciální energii, který bere v úvahu celkovou hmotnost kupy galaxií, je překvapivě silný, pokud je konfrontován s pozorováním. Měli jsme předpoklad sférickosti kupy galaxií, ale není těžké zjistit, že perfektně sférické nejsou. Trochu si náš vztah naškálujeme. Vzájemné vzdálenosti naškálujeme na $R/10$ a budeme předpokládat, že většina hmoty je koncentrována ve dvou galaxiích o hmotnostech $\mathcal{M}/2$ a $\mathcal{M}/3$ ¹¹. Vztahy pro potenciální energii můžeme následně přepsat

$$E_p = -\frac{2,5GM^2}{R}, \quad E'_p = -\frac{10}{3} \frac{GM^2}{R}.$$

E_p by měla řádově být stejná jako u původního odhadu a proto beztestně můžeme napsat

$$\begin{aligned} 2K_T &= -E_p < \frac{3GM^2}{5R}, \\ \mathcal{M} &> \frac{3R\overline{v^2}}{5G}. \end{aligned}$$

¹¹Tento předpoklad není vůbec špatný, kupříkladu v případě kupy galaxií v Panně je centrální galaxií soustředující většinu hmoty galaxie M87.

Z pozorování kupy galaxií (známé jako Coma cluster) v souhvězdí Vlasy Bereniky (*Coma berenices*), bylo zjištěno, že $R = 2 \cdot 10^6$ ly. Rychlost neznáme, pouze její průmět. Předpokládejme rozložení $\overline{v^2} = 3\overline{v_{\text{los}}^2}$ (los = line of sight). Pak hmotnost přepíšeme jako

$$\mathcal{M} > \frac{\overline{v_{\text{los}}^2}}{5G}.$$

Porovnáme s napozorovaným průmětem $\overline{v_{\text{los}}^2} = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, což implikuje $\mathcal{M} > 9 \cdot 10^{46} \text{ g}$. Z celkové hmotnosti odhadneme průměrnou hmotnost galaxií jako $\overline{M} = 4,5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$. Změřená luminosita je $8,5 \cdot 10^7 L_{\odot}$. Víme, že pro hvězdy platí $L \propto M^{3,5}$. Konverzní faktor je pro nám známé systémy cca 3,5, ale z pozorování pro kupy galaxií vyplývá, že by musel být asi 500, což je nesmysl. Udělali jsme snad chybu v předpokladu stacionarity? Pro nestacionární systém by platilo

$$2K_T + Vir \geq 0,$$

což by pro vyšší potenciální energie znamenalo ještě vyšší hmotnosti a pro nižší by kupa galaxií nemohla držet pohromadě. Pro pozorovaný konverzní faktor by muselo platit $E > 0$ a $K_T \ll -E_p$, což je nesmysl, neboť takto by se kupy galaxií formovaly jen díky tomu, že se geometricky nachází blízko sebe a ne díky gravitačnímu působení. Jediným vysvětlením je tedy temná hmota.¹²

Kosmologie

Známe-li povahu většiny těles nacházejících se ve vesmíru, můžeme se zabývat vesmírem samotným a jeho vznikem. Obecně se přijímá, že vesmír vznikl okamžikem, který se nazývá *Velký třesk*. Co bylo před ním, je fyzikálně nezodpověditelné, neboť Velký třesk je okamžik, kdy vznikl čas a prostor. Od té doby se vesmír rozpíná. To má za následek základní kosmologický princip. Vzhledem k tomu, že vesmír vznikl defacto v bodě, nemůže mít žádný bod současného vesmíru privilegované postavení. V principu to znamená, že vesmír musí být homogenní a izotropní. Jak jsme si uvedli na začátku tohoto dílu seriálu, vesmír vypadá jako koupelňová pěna. Vezmeme-li si krychli o dostatečně velké hraně, budeme moci ukázat, že vesmír na skutečně velké škále homogenní a izotropní je. Přistoupíme-li na fakt, že vesmír se rozpíná, můžeme základní rysy chování vesmíru odvodit s použitím obyčejné newtonovské mechaniky.

Newtonovský model vesmíru

Předpokládejme, že pro rychlost rozpínání vesmíru platí $\mathbf{v} = H\mathbf{r}$, kde H je Hubbleova konstanta (každý necht' použije její libovolnou hodnotu, které fandí). Jak jsme zmiňovali v předchozích dílech seriálu, Hubbleova konstanta vlastně není tak konstantní a mění se v čase. Při časových

¹²Analogický výpočet provedl astronom Fritz Zwicky ve své práci v první polovině 20. století. Právě on nabídl vysvětlení obrovských hmotností nepozorovanou hmotou.

derivacích tedy nesmíme zapomenout na tuto závislost. Představme si, jak by vypadal vesmír bez gravitace

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= 0, \\ \frac{dH\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r} \frac{dH}{dt} + H \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \frac{dH}{dt} + (H\mathbf{r})H = 0, \\ \frac{dH}{dt} &= -H^2,\end{aligned}$$

velikost Hubbleovy konstanty nám klesá, zintegrujeme-li tento vztah dostaneme

$$\frac{dH}{H^2} = -dt \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{t}.$$

Toto je tempo klesání hodnoty Hubbleovy konstanty; bude-li působit i gravitace, Hubbleova konstanta bude s časem klesat rychleji.

Pro komplexnější model si zadefinujeme tzv. *škálovací faktor*. Jedná se o bezrozměrnou veličinu popisující velikost vesmíru v daný okamžik a charakterizuje jeho okamžité rozpínání. Jedná se o bezrozměrnou veličinu. Pro současnost ($t = 0$) pro škálovací faktor platí $R(t = 0) = 1$, kdežto v momentě Velkého třesku by byl roven nule. Můžeme si vyjádřit vzdálenost mezi dvěma body v čase t

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0)R(t), \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{r}(0) \frac{dR(t)}{dt} = \frac{\mathbf{r}(t)}{R(t)} \dot{R}(t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{r}(t)H(t) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\dot{R}}{R}.\end{aligned}$$

Rozpínání vesmíru může být navíc zrychlené/zpomalené. Pro vyjádření této skutečnosti byl zadefinován tzv. *decelerační parametr*, který je zadefinován jako

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{R^2}.$$

Ve vlastním modelu zanedbáme tlak, hmotnost budeme považovat za konstantní a látku budeme brát za naprosto obyčejný prach uzavřený v kouli.

$$M = M_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \varrho_0 \rightarrow \varrho = \varrho_0 R^{-3}.$$

Zároveň víme, že síla působící na jednotku hmoty je dle Newtonova zákona úměrná R^{-2} . Zvolme si na hranicích koule testovací objekt o jednotkové hmotnosti, pak

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r}, \\ &= \frac{1}{2}(Hr)^2 - G\frac{4}{3}\pi\varrho r^2, \\ &= \frac{1}{2}r_0^2 R^2 H^2 - \frac{4}{3}\pi G r_0^2 R^2 \varrho,\end{aligned}$$

což po upravení dá

$$\begin{aligned}\frac{3E}{4\pi G r_0^2 R^2} &= \frac{3H^2}{8\pi G} - \varrho, \\ &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} - \varrho_0, \\ &= \frac{3\dot{R}^2}{8\pi G R^2} - \varrho.\end{aligned}$$

Je-li energie pozitivní, čas roste do nekonečna a hustota jde k nule, v takovém případě se rozpínání nezastaví a my budeme mít co do činění s tzv. *otevřeným vesmírem*. Při záporné energii tomu bude přesně opačně a vesmír se po čase začne smršťovat. Ukazuje se, že pro vesmír zřejmě platí $E = 0$, což je vesmír s tzv. kritickou hustotou, která je funkce okamžité Hubbleovy konstanty. Pro současnost platí

$$\varrho_k = \frac{3H_0}{8\pi G}.$$

Zkusme si vyřešit, jak by při $E = 0$ vypadal vesmír plný prachu.

$$\begin{aligned}\frac{3\dot{R}^2}{8\pi G R^2} &= \varrho = \frac{\varrho_0}{R^3}, \\ \dot{R}\sqrt{R} &= \sqrt{\frac{8\pi G \varrho_0}{3}}.\end{aligned}$$

Vyřešíme metodou separace proměnných

$$\begin{aligned}R^{1/2}dR &= \left(\frac{8\pi G \varrho_0}{3}\right)^{1/2} dt = H_0 dt, \\ \frac{2}{3}R^{3/2} &= \left(\frac{8\pi G \varrho_0}{3}\right)^{1/2} t, \\ R &= (6\pi G \varrho_0)^{1/3} t^{2/3}, \\ \varrho &= \frac{\varrho_0}{R^3} = \frac{1}{6\pi G t^2}.\end{aligned}$$

Konstanty schováme do k a můžeme psát

$$\begin{aligned}H &= \frac{\dot{R}}{R} = \frac{k^{2/3} t^{-1/3}}{k t^{2/3}} = \frac{2}{3t}, \\ q &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Takový model platí pro náš blízký vesmír, ale neumí popsat větší oblasti, neboť nebere v úvahu záření. Pro případ záření bychom museli počítat s hustotou energie dělenou c^2 . Decelerační parametr pro vesmír naplněný pouze zářením bude 1, hmotnost vesmíru bude s jejím rozpínáním klesat a pro čas by platilo $T = T_0 \sqrt{t/t_0}$.

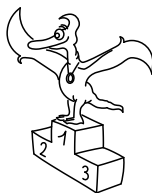
Pro určení geometrie vesmíru a další parametry nám už newtonovská fyzika nebude stačit a museli bychom uvažovat efekty obecné teorie relativity. V současné době je vesmír nekonečný, plochý, eukleidovský (trojúhelníky mají součet vnitřních úhlů 180°). Plochosť vesmíru znamená, že poměr hustoty ke kritické hustotě je jednotkový (kdyby nebyl, vzdálené objekty by se nám zdály bližší/vzdálenější).

Jak dokázat správnost modelu

Kosmologické simulace stále trpí tím, že je velmi složité namodelovat vývoj vesmíru a zahrnout do něj látku, záření, temnou hmotu a ještě navíc exotickou temnou energii, která sice vyplňuje tři čtvrtiny vesmíru, ale nevíme o ní zhora nic, krom toho, že náš vesmír jistým způsobem udržuje na kritické hustotě. Zatímco vesmír v průběhu historie prošel fázemi, kdy mu dominovalo záření a později hmota, vypadá to, že jsme právě ve fázi, kdy dominuje temná energie. Ani jednu z těchto skutečností jsme samozřejmě v našem modelu nebrali do úvahy.

Samotný fakt, že dokážeme podpořit teorii Velkého třesku bez toho, abychom si pomáhali rozsáhlými simulacemi a jejich konfrontací se skutečností, je velkým úspěchem. Samotná teorie byla konkurující teorii statického vesmíru. Mezi těmito dvěma teoriemi se prakticky rozhodlo jediným objevem, a to objevem reliktního záření, ozvěny Velkého třesku. Záření samotné bylo objeveno v šedesátých letech, ale objev samotný nestačil. Proč? Záření bylo detekováno na přesně takové frekvenci (2,7 K) a přesně opisovalo křivku záření absolutně černého tělesa, kterou bychom očekávali. Pokud by totiž záření bylo dokonale homogenní, nemohlo by vysvětlit vznik nehomogenit, ze kterých se formovaly hvězdy a galaxie. V devadesátých letech byla vypuštěna družice COsmic Background Explorer (COBE), která potvrdila, že nehomogenity se v reliktním záření vyskytují. Pomocí nich můžeme dokonce detekovat kupy galaxií. Jak mohly takové nehomogenity vzniknout?

Poměrně ambiciózní a pravděpodobná teorie, která je umí vysvětlit, je takzvaná inflační fáze vesmíru, kterou jsme vůbec nezahrnovali do našeho jednoduchého newtonovského modelu. Původně homogenní vesmír se poměrně spořádaně rozpínal a řídl, nicméně ono řídnutí zjevně způsobilo, že se ke slovu dostalo pseudovakuum s obrovskou energií, které vesmír doslova rozfouklo do obrovských rozměrů. Rozpínání vesmíru bylo v tu chvíli zrychlené, což znamená, že druhá derivace škálovacího faktoru bude pozitivní. Zajímavé je, že i dnes pozorujeme zrychlené rozpínání. Ono pseudovakuum v dnešní době převlékáme za temnou energii, která plní funkci kosmologické konstanty, která brání vesmíru, aby se při rozpínání nakonec úplně roztrhnul. Co se týče budoucnosti vesmíru, hustota temné energie se měnit nebude, ale hustota hmoty bude s rostoucími rozměry klesat, protože se nemění její celková hmotnost. A proto temná energie nakonec ve vesmíru převládne úplně.



Pořadí řešitelů po V. sérii



Z technických důvodů nejsou součty za celý rok násobené dvěma u prvních ani druhých ročníků. Směrodatné a kompletní jsou výsledky na webu.

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
		2	2	3	5	4	5	8	6	35	100	175
1. <i>Lucie Fořtová</i>	G P. de Coubertina, Tábor	1	2	4	–	1	2	7	2	19	71	96
2. <i>Jozef Bucko</i>	G, Námestie SNP, Piešťany	2	2	4	1	1	5	7	3	25	61	89
3. <i>Dalimil Ševčík</i>	G, Vyškov	2	1	3	1	1	5	8	2	23	60	84
4. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	1	4	1	1	–	3	1	13	57	83
5. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	2	2	3	1	5	8	2	25	61	82
6. <i>Eva Miklušová</i>	G J. Škody, Přerov	2	–	2	–	–	–	7	1	12	59	76
7. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	2	2	4	–	–	–	3	–	11	57	67
8. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	0	–	2	–	–	1	–	1	4	43	37
9. <i>Andrej Fúsek</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	–	1	4	–	–	–	–	1	6	51	36
10. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	3	–	–	–	–	–	3	55	35
11. <i>Jan Marek</i>	G Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	30
12. <i>Václav Kytka</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	28
13. <i>Petr Smíštel</i>	G, Bučovice	2	2	3	–	–	–	–	–	7	93	27
14. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	23
15. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	2	3	–	–	–	–	–	7	53	21
16. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	1	1	3	–	–	–	–	–	5	49	20

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
		2	2	3	5	4	5	8	6	35	100	175
1. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	2	3	4	–	4	3	8	3	27	83	128
2. <i>Tomáš Zahradník</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	1	0	–	3	1	4	7	3	19	63	95
3. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Školská, Dubnica nad Váhom	0	2	4	2	1	1	3	1	14	56	89
4. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	–	2	4	–	–	–	–	–	6	71	60
5. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	56
6. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	1	1	4	1	–	1	–	2	10	64	54
7. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	2	2	3	2	1	–	4	–	14	65	46
8. <i>Matěj Bidlák</i>	G Lučka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	44
9.–10. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	2	–	–	–	–	–	–	4	64	41
9.–10. <i>Lucie Valentová</i>	G, Boskovice	1	–	3	–	–	–	5	–	9	50	41
11. <i>Jan Studený</i>	G J. Škody, Přerov	1	–	3	–	–	–	3	–	7	47	39
12. <i>Josef Koláčný</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	34
13. <i>Daniél Slezák</i>	Svobodná chebská škola, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	–	–	37	33
14.–15. <i>Matěj Tomešek</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	30
14.–15. <i>Matouš Zavřel</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	1	–	–	–	0	–	–	–	1	45	30
16.–17. <i>Petr Kovář</i>	Matiční G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28	27
16.–17. <i>Emil Skříšovský</i>	G, Česká, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	27
18. <i>Adam Práda</i>	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	26
19.–21. <i>Patrik Štefek</i>	Matiční G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	1	–	1	42	22
19.–21. <i>Martin Raszyk</i>	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	22
19.–21. <i>Martin Wirth</i>	První české G, Karlovy Vary	1	–	4	–	–	–	–	–	5	88	22

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ	
		2	2	3	5	4	–	–	8	5	35	100	175
1. Patrik Švančara	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	3	5	4	–	–	8	5	27	93	140	
2. Jakub Kubečka	G, Nymburk	2	1	1	–	0	–	–	–	4	58	67	
3.–4. Tomáš Bárta	G, Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	61	
3.–4. Radomír Gajdošoci	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	61	
5. Daniel Hnyk	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	40	
6. Kristína Nešporová	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	39	
7. Ekaterína Berestneva	–	1	–	3	–	0	1	3	–	8	40	34	

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
		2	2	3	5	4	5	8	6	35	100	175
1. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	4	1	0	5	8	4	26	80	113
2. Filip Murár	G, Masarykovo nám., Třebíč	1	2	4	–	–	3	4	4	18	76	97
3. Miroslav Hanzelka	G, Česká Lípa	1	1	2	2	–	2	8	2	18	72	93
4. Jaroslav Průcha	G, Strakonice	2	1	4	2	3	3	3	3	21	57	91
5. Kristýna Kohoutová	G, Žamberk	2	1	4	1	2	4	–	–	14	74	84
6. Jakub Doležal	G, Špitálská, Praha	1	0	3	–	0	5	4	2	15	63	71
7. Veronika Dočkalová	G, Elgartova, Brno	2	2	3	–	–	8	–	–	15	79	70
8. Jozef Kaščák	G dukl. hrdinov, Svidník	2	–	2	–	–	1	1	–	6	49	65
9. David Hruška	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	1	2	3	2	4	–	–	–	12	82	60
10. Michal Červeňák	G Púchov	1	1	3	–	1	2	–	–	8	62	54
11. Michal Nožička	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	1	2	3	2	–	–	–	–	8	77	51
12.–13. Martin Adamec	G Tajovského, B. Bystrica	1	2	4	–	0	2	3	–	12	53	48
12.–13. Albert Štěrba	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	1	1	3	1	0	3	–	–	9	46	48
14. Jakub Cimerman	G Tajovského, B. Bystrica	–	2	4	–	–	–	–	–	6	61	43
15. Lukáš Fúsek	G, Uherské Hradiště	–	2	4	–	–	–	2	–	8	55	42
16. Lubomír Grund	G Christiana Dopplera, Praha	0	1	3	2	1	–	–	–	7	64	35
17. Vít Nosek	G a SOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	24
18. Tereza Uhlířová	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	22
19. Ondřej Kořístka	G, Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	17
20. Erik Hendrych	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	14
21.–23. Michal Choma	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	11
21.–23. Jan Rain	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	11
21.–23. Petr Zakopal	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	11
24. Vladan Glončák	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	10
25.–26. Tomáš Kello	G J. A. Raymana, Prešov	2	2	3	–	0	–	–	–	7	69	9
25.–26. Samuel Puček	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	9
27. Tomáš Axman	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	8
28.–31. Ota Kunt	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
28.–31. Thai Le Hong	G, Děčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	7
28.–31. Klauďia Mráziková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	7
28.–31. Zsóka Varga	G Imre Madácha, Šamorín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
32.–33. Alžběta Korábková	Církevní G, Kutná Hora	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6
32.–33. Tomáš Turlík	G J. A. Raymana, Prešov	0	0	2	–	–	1	3	–	6	30	6



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.