Úloha I.S ... seriálová

6 bodů; průměr 2,22; řešilo 41 studentů

a) *Některé hvězdy jsou považovány za obtočné, čili cirkumpolární. Znamená to, že jsou vidět po celý rok? Jaké hvězdy jsou v našich zeměpisných šířkách vidět po celý rok? Jaká souřadnice nám cirkumpolární hvězdy označuje? Jaká je situace u nás, na pólu a na rovníku? Pro ilustraci doporučujeme stáhnout program Stellarium*[1]*, kde si můžete zadat jakoukoliv zeměpisnou polohu a podívat se na jednotlivé situace.*

b) *Srovnejte absolutní hvězdnou velikost nejjasnější hvězdy letní oblohy, Vegy (α Lyr,* 7,76 pc *daleko, zdánlivá hvězdná velikost* $-0,01\,\mathrm{mag}$*), a Betelgeuze (α Ori,* 200 pc *daleko, zdánlivá hvězdná velikost* 0,42 mag*). Jak by se nám hvězdy jevily, kdyby si vyměnily vzdálenosti? Diskutujte viditelnosti.*

c) *Transformace a zase transformace. Zkuste si spočítat transformaci mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II. druhu. Výrazy nemusíte upravovat do verze uvedené v literatuře.*

d) *Janap má ve zvyku občas se ztratit. Ona za to nemůže, občas se to stane. Tentokrát však s sebou měla theodolit. Zázračnou krabičku, která umí určit výšku hvězd nad obzorem. Změřila si polohy hvězd Arcturus a Capella a zaznamenala přesný čas. Arcturus měl* 123,20 grad *v 18:46:30, Capella* 113,60 grad *v 19:18:30. Kdepak se Janap nacházela? (Nezapomeňte, že výška hvězd je uváděna v gradech, horizont je na úrovni 100 gradiánů, plný úhel je 400 gradiánů).*

Janapka.

Cirkumpolární hvězdy

Slovo cirkumpolární znamená v latině *kolem pólu*. V češtině takovým hvězdám říkáme obtočné. Tyto hvězdy jsou vidět po celý rok v závislosti na naší zeměpisné poloze. Nacházíme-li se na severním pólu, máme Severku (či Polárku, nebo α UMi) přímo v zenitu. Zapomeneme na chvíli na to, že Země vykonává precesní pohyb,[2] a budeme Severku považovat za pevný bod. Celá obloha se zdánlivě otáčí kolem ní, takže budeme budeme pozorovat pohyb hvězd rovnoběžný s obzorem. Budeme tedy ochuzeni o jakákoliv jižní souhvězdí. Celý rok uvidíme pouze souhvězdí severní polokoule.

Situace bude přesně opačná na rovníku. Máme-li ideální obzor, severka bude ležet přesně na něm. Obloha se bude doslova valit kolmo na obzor. V průběhu roku se nám na obloze vystřídají všechna souhvězdí severní i jižní oblohy.

Situace v našich zeměpisných šířkách (Praha: $50^\circ 05'$ N $14^\circ 25'$ E) je někde mezi oběma extrémy. Hvězdy, které u nás označíme jako cirkumpolární, musí splňovat

$$\text{vzdálenost od nebeského pólu} \leq 90^\circ - \text{zeměpisná šířka pozorovatele}\,.$$

Pro Prahu se pohybujeme na cca 40 stupních od Severky. Jinak řečeno všechny hvězdy s deklinací větší než 40° jsou u nás viditelné celý rok. Jedná se kupříkladu o souhvězdí Velké a Malé Medvědice, Cefea, Cassiopei nebo Draka.

[1] `http://www.stellarium.org/`, licence GNU GPL, takže program je ke stáhnutí zdarma.

[2] Chová se jako setrvačník, precesi Země nazýváme *Platónský rok*, trvá 25 765 let, takže precesi skutečně zanedbat můžeme.

Hvězdné velikosti

Jediné, co potřebujeme k tomuto příkladu, je jedna z modifikací Pogsonovy rovnice. Konkrétně ta, která zahrnuje vzdálenost:

$$m - M = -5 + 5\log_{10}\frac{d}{\mathrm{pc}}$$

Dosadíme-li do vzorce údaje pro Vegu, dostaneme absolutní hvězdnou velikost 0,54 mag. Pro Betelgeuze dostaneme údaj −6,09 mag. Je tedy zřejmé, že Betelgeuze je jasnější, nicméně se nám tak nejeví, neboť je dál. Kdyby si obě hvězdy vyměnily vzdálenosti, na naší obloze by se nám jevily následovně: Vega by byla sotva viditelná bez dalekohledu, neboť by její relativní hvězdná velikost dosáhla hodnoty 7,05 mag (za průměrných podmínek v České republice, tedy ne v centru Prahy, člověk rozliší hvězdy do cca 6,5 mag). Naproti tomu Betelgeuze by se stala dominantou zimní oblohy se zdánlivou hvězdnou velikostí −6,64 mag. Byla by jasnější než Venuše, což by z ní dělalo po Slunci a Měsíci nejjasnější objekt na noční obloze.

Transformace

Je třeba si uvědomit, o co a jak jsou souřadnice posunuté. Sklon roviny galaxie vůči průmětu rovníku na nebeskou sféru je 62,6°. Otočením o tento úhel si vyrovnáme inklinaci. Teď je třeba pouze vyrovnat rozdíl mezi jarním bodem a středem Galaxie. Počátek galaktické délky je definován v souhvězdí Střelce (SagA*), počátek rektascenze je v jarním bodu. Potřebujeme tedy znát rektascenzi bodu, ve kterém galaktický rovník protne světový rovník. S pomocí hvězdného atlasu atlasu zjistíme, že RA $= 18^h 49^m$ (označíme α_0, na stupně je to 282,25°). Dále víme, že galaktická délka nezačíná v jarním bodu, ale ve středu galaxie. Otáčíme kolem galaktického pólu o $l_0 = 33°$.

Jako nečárkovanou soustavu si označíme tu, kterou chceme dostat, čárkovanou označíme tu původní. Teď je třeba si uvědomit, jaká otočení děláme:

- Čárkovanou soustavu otočíme o $l_0 = 33°$ kolem osy z'.
- Nečárkovanou soustavu otočíme o $i = 62{,}6°$ kolem osy x a o $\alpha_0 = 282{,}25°$ kolem osy z.

Galaktické souřadnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= r\cos b\cos l\,, \\ y' &= r\cos b\sin l\,, \\ z' &= r\sin b\,. \end{aligned}$$

Po výše zmíněném otočení získáme tvar

$$\begin{aligned} x' &= r\cos b\cos\left(l - l_0\right), \\ y' &= r\cos b\sin\left(l - l_0\right), \\ z' &= r\sin b\,. \end{aligned}$$

Teď otočíme ekvatoriální soustavu II. druhu o úhel α_0

$$\begin{aligned} x &= r\cos\delta\cos\left(\alpha - \alpha_0\right), \\ y &= r\cos\delta\sin\left(\alpha - \alpha_0\right), \\ z &= r\sin\delta\,. \end{aligned}$$

Zbývá otočení okolo osy x, pro které obecně platí, otáčíme-li o úhel i

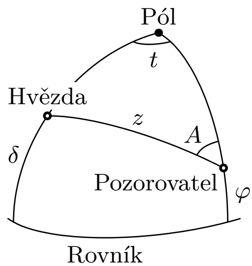
$$\begin{aligned} x' &= x\,, \\ y' &= y\cos i + z\sin i\,, \\ z' &= -y\sin i + z\cos i\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za čárkované a nečárkované souřadnice, dostaneme transformační rovnice mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II.druhu.

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-l_0) &= \cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) \\ \cos b\sin(l-l_0) &= \cos i\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) + \sin i\sin\delta \\ \sin b &= -\sin i\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0) + \cos i\sin\delta\,. \end{aligned}$$

Hvězdné GPS

Co je v této úloze důležité? Uvědomit si, co všechno známe. Známe výšku obou hvězd nad obzorem a víme, o které hvězdy se jedná. Známe také hvězdný čas pozorování (není uvedeno datum, takže můžeme předpokládat, že se jedná o místní hvězdný čas, tedy GMT+2).



Obr. 1: Sférický trojúhelník

Z toho, že víme, o jaké hvězdy se jedná, můžeme určit jejich rektascenzi a deklinaci dle katalogu. Arcturus má deklinaci 19,18241° a rektascenzi $14^h 15^m 39{,}67^s$. Capella má deklinaci 45,99799° a rektascenzi $05^h 16^m 41{,}35^s$.

Znalost času, resp. místního hodinového úhlu nám bude nemálo nápomocná. Známe také deklinaci hvězd, která je v ekvatoriální soustavě konstantní. Nakreslíme-li si situaci, zjistíme, že se pohybujeme na sférickém trojúhelníku. Bohužel je zřejmé, že bez nějakého počátečního odhadu to jen tak nepůjde. Zkusme si napsat rovnice popisující situaci.

Vzpomeneme si na zákon o kosinech pro strany sférického trojúhelníku. Chceme popsat stranu z. Předpokládanou pozici označíme indexem PP, zeměpisnou šířku budeme označovat *Lat* z anglického *latitude*, délku budeme označovat *Lon* z anglického *longitude*.

$$\cos z = \cos(90^\circ - \mathrm{Lat_{PP}})\cos(90^\circ - \mathrm{dec}) + \sin(90^\circ - \mathrm{Lat_{PP}})\sin(90\,\mathrm{deg} - \mathrm{dec})\cos t$$

Použijeme vztahu $\cos(90^\circ - x) = \sin x$ a rovnici upravíme do slušnější podoby

$$\cos z = \sin \mathrm{Lat_{PP}}\sin\mathrm{dec} + \cos\mathrm{Lat_{PP}}\cos\mathrm{dec}\cos t\,.$$

z je v našem případě zjevně vzdálenost počítaná po hlavní kružnici, spojující předpokládanou polohu a zeměpisnou polohu hvězdy a zároveň i zenitová vzdálenost. Co je příjemné a nepříjemné na takové rovnici? Popsali jsme naši situaci. Technicky vzato máme jednu rovnici pro dvě neznámé. Na druhou stranu máme dvě hvězdy, tak by to nemusel být takový problém. Horší je to s nelinearitou rovnic. Ta eliminuje jakékoliv na první pohled triviální řešení. Nejlepším řešením je naprogramovat si řešení nějaké pěkné iterativní metody.

Inspirace může vypadat třeba takto:

- f je zeměpisná šířka, která je převáděna na radiány,

- l je zeměpisná délka, která je převáděna na radiány.

Všechny úhly považujte za vyjádřené v radiánech. Písmeno d označuje deklinaci, t čas opravený na Greenwichský, a označuje rektascenzi.

```
int main(int argc, char **argv) {
    printf("Tato mista vyhovuji nejlepe:\n");
    tol = 0.0002;
    krok = 1;
    for ( f = -90; f <= 90; f += krok) {
          for ( l = 0; l <= 360; l += krok) {
              x1 = -cos(z1)+sin(f*M_PI/180)*sin(d1)+cos(f*M_PI/180)*cos(d1)*cos(t1+(l*M_PI
                   /180)-a1);
              x2 = -cos(z2)+sin(f*M_PI/180)*sin(d2)+cos(f*M_PI/180)*cos(d2)*cos(t2+(l*M_PI
                   /180)-a2);
              chyba2 = x1*x1+x2*x2;   // nebo "chyba1 = x1+x2;"

              if (chyba2 <= tol) {    // nebo "(chyba1 <= tol && chyba1 >= -tol)"
                 printf("sirka: %f  delka: %f  (chyba2: %lg)  \n", f, l, chyba2);
                                 }
          }
    }

    printf("\nPrejete si vypocet zpresnit?\n");
    printf("Vyberte si interval zemepisnych sirek\n");
    printf("Cisla oddelte dvojteckou napr.: 45:55.53\nSeverni sirka se pocita kladne,
         jizni zaporne. \n");
    scanf("%lg:%lg",&f1,&f2);
    printf("Vyberte si interval zemepisnych delek\n  1 znamena 1 st. vychodni delky, 359
         je 1 stupen zapadni delky.\n");
    scanf("%lg:%lg",&l1,&l2);

    printf("\nPocitam s presnosti na 0.01 stupnu (asi 1 minuta, asi 1 km)\n\n");
    printf("Tato mista vyhovuji nejlepe:\n");
    tol = tol/10000;
    krok = krok/100;
    for ( f = f1; f <= f2; f += krok) {
          for ( l = l1; l <= l2; l += krok) {
              x1 = -cos(z1)+sin(f*M_PI/180)*sin(d1)+cos(f*M_PI/180)*cos(d1)*cos(t1+(l*M_PI
                   /180)-a1);
              x2 = -cos(z2)+sin(f*M_PI/180)*sin(d2)+cos(f*M_PI/180)*cos(d2)*cos(t2+(l*M_PI
                   /180)-a2);
              chyba2 = x1*x1+x2*x2;   // nebo "chyba1 = x1+x2;"

              if (chyba2 <= tol) {    // nebo "(chyba1 <= tol && chyba1 >= -tol)"
                 printf("sirka: %f  delka: %f  (chyba2: %lg)  \n", f, l, chyba2);
                         }
          }
    }

    printf("\nPrejete si vypocet zpresnit?\n");
    printf("Vyberte si interval zemepisnych sirek\n Doporucuji nejvyse jednostupnovy
         interval\n");
    scanf("%lg:%lg",&f1,&f2);
    printf("Vyberte si interval zemepisnych delek\n Doporucuji nejvyse jednostupnovy
         interval\n");
    scanf("%lg:%lg",&l1,&l2);

    printf("\nPocitam s presnosti na 0.0001 stupnu (asi 1 vterina, asi 10 m)\n");
    if ((f2 - f1)*(l2 - l1) >= 10) {
    }

    printf("Tato mista vyhovuji nejlepe:\n");
    tol = tol/10000;
```

```
    krok = krok/100;
    for ( f = f1; f <= f2; f += krok) {
          for ( l = l1; l <= l2; l += krok) {
              x1 = -cos(z1)+sin(f*M_PI/180)*sin(d1)+cos(f*M_PI/180)*cos(d1)*cos(t1+(l*M_PI
                   /180)-a1);
              x2 = -cos(z2)+sin(f*M_PI/180)*sin(d2)+cos(f*M_PI/180)*cos(d2)*cos(t2+(l*M_PI
                   /180)-a2);
              chyba2 = x1*x1+x2*x2;    // nebo "chyba1 = x1+x2;"

              if (chyba2 <= tol) {     // nebo "(chyba1 <= tol && chyba1 >= -tol)"
                 printf("sirka: %f  delka: %f  (chyba2: %lg)  \n", f, l, chyba2);
                          }
          }
    }

    printf("\nDal uz to neumim.\n\n");
    return 0;
}
```

Reálně se měřilo před brněnskou hvězdárnou na Kraví Hoře. Nicméně nic není ideální, takže Janap měřením vyšla zeměpisná délka 16,439° a šířka 49,267°, což by znamenalo Veverskou Bítýšku, která je kousek od Brna kolem přehrady. Kde vznikají chyby? Ve špatně seřízených hodinkách, nepřesnosti měření theodolitu a také v iterativním výpočtu.

Jana Poledniková
`janap@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.