

## Úloha II.E ... čočkování

8 bodů; průměr 5,46; řešilo 65 studentů

V obálce jste spolu se zadáním dostali i dvě čočky. Vaším úkolem je změřit jejich parametry – druh a ohniskovou vzdálenost.

*Poznámka* Pokud nejste stávající řešitelé FYKOSu, ale máte zájem se jimi stát, pak neváhejte a objednejte si čočky až domů. A to s dostatečným předstihem, aby vám stihly dojít včas. Objednávejte na emailu [cocky@fykos.cz](mailto:cocky@fykos.cz). *Karel vykradl katedru didaktiky fyziky.*

Každý řešitel obdržel pro změření jinou dvojici čoček, naměřené hodnoty tedy nebudou v tomto řešení uvedeným hodnotám odpovídat.

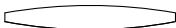
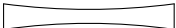




V této úloze budeme uvažovat pouze tenké čočky, tedy takové čočky, jejichž tloušťka je malá oproti křivosti lámavých ploch. Navíc zanedbáme vady čoček (chromatickou vadu, sférické zkreslení, koma).

## Druhy čoček

Existují dva druhy kulových čoček – spojky a rozptylky. Odlišit je od sebe na první pohled je jednoduché, spojky jsou ve středu tlustší než na kraji, rozptylky právě naopak. Další odlišnost získáme pohledem skrz čočku na blízký předmět. V případě spojky bude předmět zvětšen (spojky se používají jako lupy), skrz rozptylku uvidíme předmět naopak zmenšený. Třetí, na první pohled viditelný rozdíl, je v orientaci obrazu. Podíváme-li se skrz spojku na vzdálený předmět tak, abychom jej viděli ostře, budeme předmět vidět převrácený (a zmenšený), zatímco u rozptylky bude přímý (a též zmenšený).

Čočky dále diferencujeme podle jejich tvaru, viz tabulka 1.

Tabulka 1: Rozdělení čoček podle tvaru

Spojky		Rozptylky	
	dvojvypuklá (bikonvexní)		dvojdutá (bikonkávní)
	ploskovypuklá (plankonvexní)		ploskodutá (plankonkávní)
	dutovypuklá (konkávkonvexní)		vypuklodutá (konvexkonkávní)

Kromě kulových čoček existují i jiné druhy: asférické čočky (používané třeba v objektivěch fotoaparátů), Fresnelovy čočky (najdeme je třeba v reflektorech, zpětných projektorech, na majácích apod.) atd. Těmi se však dále nebudeme zabývat.

## Výpočet ohniskové vzdálenosti z poloměrů křivosti

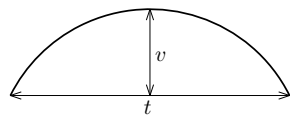
Podaří-li se nám změřit poloměry křivosti  $R_1$  a  $R_2$  obou ploch čočky (pro rovné plochy čoček je střed křivosti v nekonečnu, tedy např.  $1/R_1 = 0$ ) a víme-li, z jakého materiálu je daná

čočka vyrobena (známe tedy index lomu  $n$  tohoto materiálu), můžeme ohniskovou vzdálenost  $f$  (resp. optickou mohutnost  $D$ ) této čočky spočítat ze vztahu

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Zjistit poloměry křivosti je možné přímo u vypuklých ploch čoček. Upevníme čočku kolmo nad milimetrový papír a čočku z větší vzdálenosti (kvůli omezení vlivu perspektivy) takto kolmo na milimetrový papír vyfotíme. Na fotografii určíme výšku  $v$  a délku tětiny  $t$  (viz obrázek 1) a poloměr plochy spočítáme jako

$$r = \frac{v^2 + \frac{t^2}{4}}{2v}.$$



Obr. 1: Výpočet poloměru křivosti

Je zřejmé, že tuto metodu můžeme použít pouze u vypuklých ploch čoček. U dutých zakřivených ploch budeme muset použít složitější metodu měření. Využijeme toho, že část světla se na této ploše odráží, a ta se tak chová jako duté zrcadlo. Umístíme-li před takovou čočku předmět, vznikne na téže straně čočky skutečný (tedy převrácený) obraz tohoto předmětu. Ze vzdálenosti předmětu a obrazu od zrcadla dokážeme určit jeho ohniskovou vzdálenost, a tedy i poloměr křivosti.

Nicméně stále neznáme index lomu materiálu, ze kterého je čočka vyrobena, tedy nemůžeme určit její ohniskovou vzdálenost. Tato metoda je tedy vhodná spíše pro určení indexu lomu po změření ohniskové vzdálenosti některou z dalších metod.

### Teorie

Budeme používat následující znaménkovou konvenci:

- ohnisková vzdálenost (označovaná  $f$ ) spojky je kladná, rozptylky záporná,
- předmětová vzdálenost  $a$  je vždy kladná,
- vzniká-li obraz na opačné straně čočky, než se nachází zobrazovaný předmět, je obrazová vzdálenost  $a'$  kladná,
- vzniká-li obraz na stejné straně čočky, na níž leží předmět, je obrazová vzdálenost  $a'$  záporná.

Pro zobrazování tenkými čočkami platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'},$$

kde  $f$  je ohnisková vzdálenost čočky,  $a$  je vzdálenost předmětu od středu čočky a  $a'$  je vzdálenost obrazu od středu čočky. Při použití výše zmiňované znaménkové konvence tato rovnice platí pro zobrazování tenkou spojkou i pro zobrazování tenkou rozptylkou.

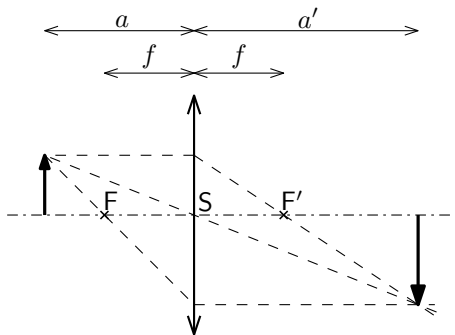
Je vidět, že  $a$  a  $a'$  můžeme zaměnit, platí tedy princip záměnnosti předmětu a jeho obrazu.

### Měření ohniskové vzdálenosti spojky – teorie

#### Měření pomocí polohy předmětu a jeho obrazu

Po upravení zobrazovací rovnice dostáváme vztah pro ohniskovou vzdálenost (označení viz obrázek 2)

$$f = \frac{aa'}{a + a'},$$



Obr. 2: Měření polohy předmětu a jeho obrazu

tedy pro určení ohniskové vzdálenosti potřebujeme změřit vzdálenost předmětu od optického středu čočky a vzdálenost jeho obrazu od optického středu čočky. Jako předmět můžeme použít například svíčku, kterou umístíme do vzdálenosti  $a$  od optického středu čočky. Na opačné straně čočky pohybuje se stínítkem, dokud na něm nedostaneme ostrý obraz svíčky. Poté změříme vzdálenost  $a'$  stínítka od optického středu čočky. Pro větší přesnost je vhodné toto měření opakovat pro různé hodnoty vzdálenosti  $a$ .

#### Přímé měření ohniskové vzdálenosti

Ze zobrazovací rovnice je zřejmé, že je-li  $a \gg a'$  (paprsky jdoucí od předmětu jsou téměř rovnoběžné), bude platit  $f \approx a'$ . Pokud jako předmět použijeme např. Slunce, paprsky se spojí přibližně přímo v ohnisku. V tomto případě navíc není třeba zobrazovat žádný předmět – posvítíme-li kolmo do čočky rovnoběžným svazkem dostatečného průměru (např. laserovým), spojí se také v ohnisku.

#### Besselova metoda

Besselova metoda měření ohniskové vzdálenosti spojky využívá principu záměnnosti chodu paprsků. Zvolíme při ní pevnou vzdálenost  $d$  (musí platit  $d > 4f$ , tedy  $d$  volíme dostatečně velké) předmětu a stínítka. Existují dvě polohy čočky mezi předmětem a stínítkem, při nichž se na stínítku zobrazí ostrý obraz předmětu. Vzdálenost  $s$  těchto poloh změříme. Všimněme si, že v tomto případě měříme jen změnu polohy čočky, nikoliv absolutně její polohu, čímž eliminujeme chybu určení optického středu čočky.

Zvolíme-li označení podle obrázku 3, platí  $a_1 = -a'_2$  a  $a'_1 = -a_2$ . Dále s ohledem na znaménkovou konvenci platí

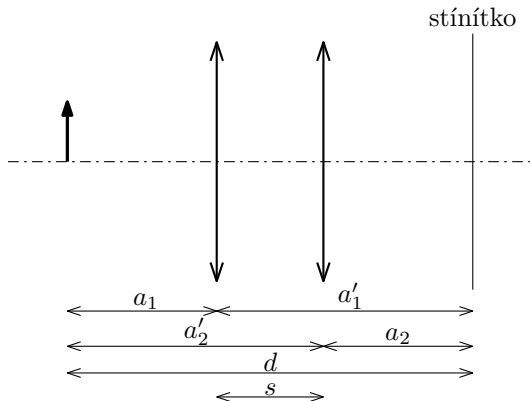
$$\begin{aligned} d &= a'_1 - a'_2 = a'_2 - a_2, \\ s &= a'_1 - a'_2, \end{aligned}$$

odkud

$$a'_1 = -\frac{1}{2}(d + s), \quad a_1 = \frac{1}{2}(d - s),$$

z čehož již můžeme spočítat ohniskovou vzdálenost

$$f = \frac{d^2 - s^2}{4d}.$$



Obr. 3: Schématické znázornění Besselovy metody

*Měření pomocí zvětšení*

Změřit ohniskovou vzdálenost čočky je možné i pomocí určení jejího zvětšení. Pro zvětšení  $Z$  platí

$$Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{f}{a-f},$$

odkud

$$f = \frac{a'}{1+Z} = \frac{aZ}{1+Z}.$$

Zvětšení zjistíme jako poměr velikostí předmětu a obrazu, tedy jako předmět zvolíme např. milimetrové měřítko a stínítko též opatříme milimetrovým měřítkem. Jestliže se  $n$  dílků stupnice na stínítku kryje s  $n'$  dílky zobrazované stupnice, zvětšení určíme jako  $Z = n/n'$ .

*Měření ohniskové vzdálenosti spojky – experiment*

Nyní k samotnému experimentu. Měřena byla ohnisková vzdálenost neznámé tenké spojky podobné těm, které byly rozesílány spolu se zadáním. Pro měření byla použita Besselova metoda. Pro několik různých vzdáleností  $d$  předmětu (čelovky) od stínítka (zdi) byly hledány takové polohy spojky, kdy se na zdi zobrazil ostrý obraz diod čelovky. Byly změřeny vzdálenosti  $a'_1$  a  $a_2$  (označení viz obrázek 3). Jelikož nás zajímá pouze rozdíl těchto vzdáleností, byly měřeny od okraje čočky, čímž jsme se vyhnuli chybě při určování optického středu čočky. Z naměřených hodnot pak byla určena ohnisková vzdálenost měřené čočky na  $(28,1 \pm 0,6)$  cm.

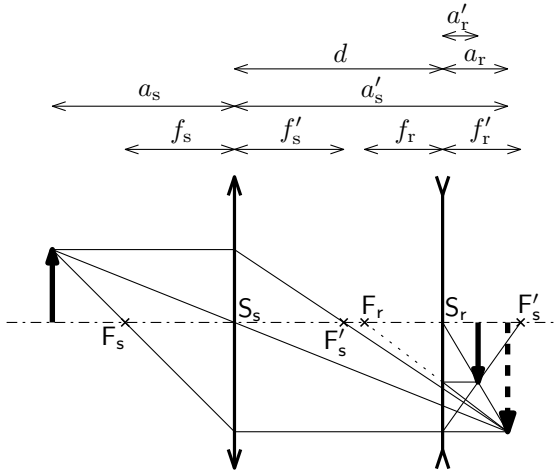
*Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky – teorie*

Změřit ohniskovou vzdálenost rozptylky není možné pomocí vzdálenosti obrazů, jelikož obraz zobrazený rozptylkou není skutečný, nelze jej tedy zachytit na stínítku. Využijeme principu záměnnosti předmětu a jeho obrazu. Vytvoříme spojkou skutečný obraz, který bude sloužit jako zdánlivý předmět pro zobrazení rozptylkou. Ta pak vytvoří skutečný obraz, lze jej tedy zachytit na stínítku (chod paprsků viz obrázek 4).

Tabulka 2: Naměřená data pro určení ohniskové vzdálenosti spojky

$n$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{ a'_1 }{\text{cm}}$	$\frac{ a_2 }{\text{cm}}$
1	230	197	33
2	220	187	34
3	210	177	34
4	200	166	34
5	190	156	34
6	180	145	35

$n$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{ a'_1 }{\text{cm}}$	$\frac{ a_2 }{\text{cm}}$
7	170	134	35
8	160	123	36
9	150	112	37
10	140	102	38
11	130	89	41
12	120	76	44



Obr. 4: Schématické zobrazení soustavy spojky a rozptylky

Z obrázku je zřejmé, že platí  $a_r = d - a'_s$  (vzdálenost  $a_r$  je dle zmiňované znaménkové konvence záporná). Dosadíme-li do zobrazovací rovnice, dostáváme vztah pro výpočet ohniskové vzdálenosti rozptylky

$$f_r = \frac{a'_r a_r}{a_r + a'_r} = \frac{a'_r (d - a'_s)}{d - a'_s + a'_r}.$$

Máme dvě možnosti, jak postupovat při měření. Můžeme změřit vzdálenost  $a'_s$ , tedy vzdálenost ostrého obrazu na stínítku od spojky. Poté mezi stínítko a spojku umístíme rozptylku. Dále pohybem rozptylky (ne ve všech polohách rozptylky vzniká obraz) a stínítkem nalezneme ostrý obraz a změříme vzdálenosti  $a'_r$  (vzdálenost obrazu od spojky) a  $d$  (vzdálenost spojky a rozptylky).

Druhou možností je změřit pouze vzdálenosti  $a_r$  a  $a'_r$ . Opět je vhodné měření opakovat pro různé  $a_s$  a  $d$ .

*Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky – experiment*

Popisovanou metodou byla měřena ohnisková vzdálenost tenké rozptylky. Jako předmět byla opět použita čelovka a hledal se ostrý obraz diod. Všechny vzdálenosti byly měřeny právě od diod čelovky. Nejdříve byla do určité vzdálenosti  $a_s$  vložena spojka a změřena vzdálenost  $a_s + a'_s$ . Poté byla mezi spojkou a ostrý obraz vložena rozptylka do vzdálenosti  $a_s + d$  a byla změřena vzdálenost  $a_s + d + a'_r$  ostrého obrazu vytvořeného rozptylkou od předmětu. Z naměřených hodnot byla určena ohnisková vzdálenost měřené rozptylky na  $(-12,0 \pm 1,1)$  cm. Je vidět, že chyba měření je v tomto případě velká, protože jsme měřili čtyři vzdálenosti, což bylo v podstatě zbytečné (stačilo změřit vzdálenosti  $a_r$  a  $a'_r$ ), a všechny byly zaokrouhleny na centimetry.

Tabulka 3: Naměřená data pro určení ohniskové vzdálenosti rozptylky

$n$	$\frac{a_s}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + a'_s}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + d}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + d + a'_r}{\text{cm}}$
1	50	89	80	113
2	50	89	82	99
3	50	89	84	93
4	60	94	87	105
5	60	94	90	96
6	60	94	91	95
7	70	102	92	137
8	70	102	94	116
9	70	102	95	111
10	80	110	100	153
11	80	110	102	126
12	80	110	105	114

*Diskuse a chyby měření*

Při měření ohniskové vzdálenosti čočky většinou měříme vzdálenosti, které při popisovaných měřeních nabývají hodnoty od několika centimetrů až po několik metrů. Je vidět, že zvolíme-li větší vzdálenosti, chyba měření bude menší.

Abychom měření zpřesnili, je třeba měření opakovat pro různé počáteční podmínky (např. pro různé vzdálenosti předmětu od čočky při měření ohniskové vzdálenosti spojky pomocí polohy předmětu a jeho obrazu). Z každého měření spočítáme ohniskovou vzdálenost, určíme aritmetický průměr a odchylku.

U některých popisovaných metod je třeba měřit vzdálenosti od optického středu čočky. Ten však nemusí být vždy jednoduše přesně určitelný. U měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky tuto chybu eliminuje Besselova metoda, u níž měříme pouze změnu polohy čočky. V popisované metodě měření ohniskové vzdálenosti rozptylky je však třeba polohu optického středu odhadnout. Pro přesnější měření ohniskové vzdálenosti rozptylky je možné použít spojkou, jejíž

ohniskovou vzdálenost známe nebo jsme ji změřili přesnější metodou.

*Tomáš Pikálek*  
pikos@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.