

Úloha II.S . . . vzdálenosti a černé těleso 6 bodů; průměr 2,41; řešilo 27 studentů

- a) Absolutně černé těleso z definice pohltí všechno světlo, co na něj dopadne, a ve všech vlnových délkách. Zároveň je to ideální zářič s charakteristickým spektrem. Můžeme si ho představit třeba jako temné okno domu. Slunce však na první pohled energii pouze vydává. Jak je tedy možné, že jeho záření lze v prvním přiblížení aproximovat absolutně černým tělesem?
- b) V textu jsme vyjádřili Planckovu funkci jako funkci vlnové délky a teploty. Zkuste ji vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci. Dokažte, že pro velké vlnové délky a vysoké teploty Planckova funkce přechází v Rayleighův-Jeansův zákon $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$ a naopak ve Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2/\lambda^5 \exp(-hc/\lambda kT)$ pro nízké teploty a malé vlnové délky.
- c) Kruh, který napozoroval Hubbleův vesmírný dalekohled v supernově SN1987A, má podél hlavní poloosy úhlový průměr $1,66''$. Má jít o cirkulární objekt, který je díky natočení vůči nám pozorován jako elipsa. Světlo ze vzdálenější části elipsy doletělo k Zemi o 340 dnů později než z bližšího konce. Proměřte fotografii¹, určete úhel natočení vůči pozorovateli a zkuste spočítat poloměr kruhu. S pomocí trigonometrie určete vzdálenost objektu.
- d) Pro určení červeného posuvu se zpravidla používají spektrální čáry vodíku. Odhadněte, do jaké hodnoty červeného posuvu z se pomocí spekter můžeme dostat. Zkuste zjistit (nebo navrhnout), jak se měří z u vzdálenějších objektů.

Absolutně černou magii pěstuje Janap.

Černé těleso

Pro odpověď na tuto otázku se stačí zamyslet nad definicí absolutně černého tělesa (dále AČT) a nad tím, jak se asi sluneční záření od záření AČT liší. Podíváme-li se na spektrální distribuci slunečního záření, zjistíme, že křivka AČT je narušena pouze absorpčními čarami. Pokud Slunce vyzařuje jako AČT, musejí být procesy vyzařování a absorpce zcela v rovnováze. Když se podíváme na Slunce detailněji, zjistíme, že jeden foton, který unikne ze slunečního jádra, má před sebou dlouhou cestu, kdy je opakovaně pohlcen, vyzářen, rozptýlen, což mu prodlouží cestu na cca 40 000 let. Pokud je každý foton takto po cestě absorbován a vyzařován, ve velkém měřítku nakonec vidíme rovnováhu, tedy AČT. A kde se vezmou absorpční čáry (kupříkladu ty Fraunhoferovy)? Dokud je plyn ve Slunci dost teplý, rovnováha funguje, ale jakmile se dostaneme ke vnějšímu okraji Slunce, plyn už tak horký nebude a bude pouze absorbovat.

Chování Planckovy funkce

Pro vyřešení této úlohy se potřebujeme pouze pár matematických triků a dobrý úsudek. Základem bude napsat si Planckův vyzařovací zákon

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}.$$

Pokud tento zákon chceme vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci, musíme si uvědomit, že musí platit nejenom globálně, ale i lokálně. Lokální platnost nám napovídá, že bude třeba derivovat a využít pravidla derivace složené funkce, které říká

$$\frac{\partial B}{\partial \nu} = \frac{\partial B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}.$$

¹http://www.stsci.edu/~inr/observ/dpics/SN1987A_Rings.gif

$$B_\lambda(T)|d\lambda| = B_\nu(T)|d\nu|,$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu,$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}.$$

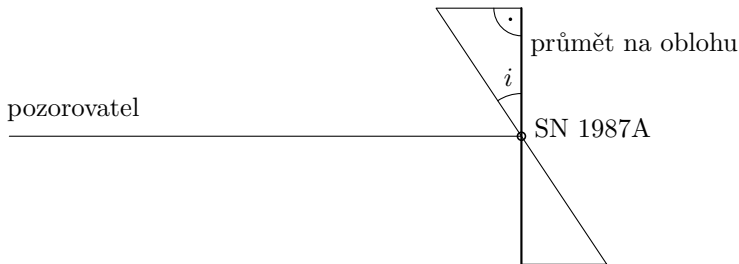
Splňuje Planckova funkce pro dlouhé vlnové délky Rayleighův-Jeansův zákon? Pro dlouhovlnné záření platí $\lambda k_B T \gg hc$. Podíváme-li se výše na argument exponenciály, zjistíme, že je blízký nule. Zkusíme tedy provést Taylorův rozvoj okolo nuly

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Tento výraz dosadíme namísto exponenciály a po jednoduchých úpravách získáme tvar $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$. Pro Wienův zákon je situace ještě jednodušší. λ je malé číslo, tudíž exponent je číslo velké. V tom případě tedy můžeme zanedbat odečítanou jedničku a výsledkem je Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2 \exp(-hc/\lambda kT)/\lambda^5$.

Hubbleův teleskop

Uvědomíme si, jaké informace jsou nám známé. Úhlový průměr a fakt, že se jedná o dokonalý kruh, který je díky geometrii pozorování zdeformovaný na elipsu. Bude se nám hodit hlavně informace, že jde o dokonalý kruh. Máme štěstí, neboť známe alespoň úhlový průměr hlavní poloosy. Vytiskneme si obrázek, proměříme hlavní poloosu, proměříme vedlejší poloosu a jednoduchou trojčlenkou určíme její úhlový průměr (spíše pro zajímavost, stačí nám poměr). Ted můžeme z jednoduché geometrické představy určit inklinanční úhel – úhel natočení.

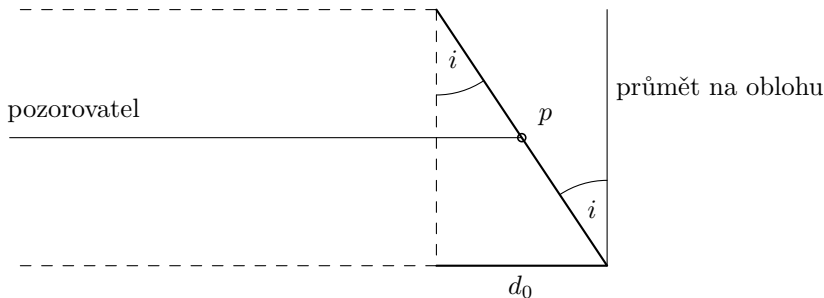


Obr. 1: Zkosení vlivem nepřímého pohledu

Dále se nám hodí znát skutečný průměr kruhu, jinak se nám vzdálenost bude počítat poměrně špatně. K tomu využijeme znalost rychlosti světla c a zpoždění detekce o 340 dnů, která je uvedena v zadání. Opět si pomůžeme jednoduchou trigonometrií.

Jakmile známe průměr kruhu, jsme za vodou a můžeme počítat vzdálenost.

A jak to vypadá číselně? Velikost obrázku samozřejmě závisí na tiskárně, popřípadě na zobrazení monitoru. Pro jeden konkrétní případ byla velká poloosa 51 mm, malá poloosa 37 mm.



Obr. 2: Zpoždění signálu z protějších konců disku

K určení inklinacího úhlu můžeme použít úhlový průměr nebo jen poměr naměřených velikostí. Můžeme napsat

$$\cos i = \frac{\text{malá poloosa}}{\text{velká poloosa}} = 43,49^\circ.$$

Zpoždění je $t = 340$ dnů, rychlost světla c , opožděnou vzdálenost označíme d_o , průměr p . Z geometrické představy vidíme, že

$$\begin{aligned}\sin i &= \frac{d_o}{p}, \\ d_o &= ct, \\ p &= \frac{ct}{\sin i}, \\ p &\approx 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}.\end{aligned}$$

Se znalostí průměru kruhu nakonec vypočítáme samotnou vzdálenost $d = p/\text{velká poloosa} = 61,7$ kpc. Vzdálenost můžeme zkusit porovnat se skutečnou naměřenou hodnotou. Podíváme-li se třeba na Wikipedii či do odborných článků, zjistíme, že skutečná vzdálenost je $(51,2 \pm 3,1)$ kpc (Panaglia et al. 1991 & erratum 1992). Metoda použitá v článku byla taktéž založena na geometrii, nicméně v jejich případě byly stanoveny přesnější parametry kruhu (už inklinací úhel se liší, neboť správná hodnota je $(42,8 \pm 2,6)^\circ$).

Červený posuv

Úloha je zaměřená hlavně na vyhledání všemožných informací. Spíše než nad principem se musíme zamyslet nad limitem technologie. Oblíbená spektrální čára většiny astronomů je poměrně výrazná čára Balmerovy série vodíku H_α , která sama o sobě je poměrně červená (656,281 nm). Co když ji posuneme třeba na $z = 9$?

Z jednoduchého vztahu

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{pozorovaná}}}{\lambda_{\text{emitovaná}}},$$

zjistíme, že jsme desetkrát natáhli vlnovou délku, na které bychom takovou spektrální čáru pozorovali. Zkusme najít, jaké extrémní vlnové délky umějí pozorovat naše dalekohledy. Kupříkladu z Wikipedie zjistíme, že takové vlnové délky jsou považovány za střední infračervené (mid

IR). Takové vlnové délky by mohl pozorovat třeba Spitzerův vesmírný dalekohled. Kde je háček? Uvažovali jsme ideální případ. V reálném případě je mezi námi a naším zdrojem hromada vesmírného smetí a prachu, který rád zrovna infračervenému záření cloní. Připočtíme pak fakt, že intenzita záření klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Objekty s takovým červeným posuvem se nám budou odhalovat hodně špatně.

Pokud se poohlédneme po internetových vodách, zjistíme, že nejvzdálenější objekt, který má spektroskopicky změřený červený posuv, má $z = 8,55$. V tomto případě se měření neprovádí pomocí H_α , ale pomocí vodíkové čáry Lymanovy série, Ly_α , která má laboratorní vlnovou délku 121,7 nm. Zatímco H_α je přechod ze 3. na 2. energiovou hladinu, Ly_α je přechod z 2. na 1. hladinu. Zmíněný objekt se jmenuje *UDFy-38135539* (Ultra Deep Field) a byl pozorován pomocí spektrografu SINFONI na Very Large Telescope (VLT) v Chile. Aby bylo spektrum takového objektu co k čemu, muselo se exponovat okolo 14 hodin, což není proveditelné pro každý objekt.

Řekněme tedy, že v ideálním případě jsme schopni pozorovat objekt do $z = 9$. Ve skutečnosti je takové pozorování zatíženo výraznou chybou. Objektů nad $z = 8$ je pomálu, nad $z = 7$ to také slavné není. Obtížné je získat i $z > 6$. Rozumným odhadem bude cca 50% nejvyššího naměřeného červeného posuvu.

A co se dá dělat, když spektrum nestačí? Nastoupí tzv. fotometrický červený posuv. Využijeme toho, že snímání oblohy v různých filtrech o známých vlnových délkách je vlastně vytváření spektra s velmi nízkým rozlišením. Pozorováním určitého typu objektu v různých funkcích můžeme zkusit odhadnout, jak se takový objekt bude chovat posunutý do červené části spektra. Tato metoda však obecně dává vyšší červené posuvy.

Všeobecná poznámka k řešení V případě, že jste si rozumně obhájili nějakou reálnou hodnotu červeného posunu, body jste dostali.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.