Úloha IV.E ... nástěnkový boj brček

8 bodů; průměr 4,83; řešilo 18 studentů

Když si vezmete běžné plastové brčko (slámku) a otřete ho kapesníkem, dokážete brčko nabít tak, že bude dokonce držet na některých stěnách a nástěnkách díky svému náboji. Vysvětlete jev a odhadněte, jak velký náboj dokážete na brčku vytvořit.

Nápověda *Hodilo by se použít dvě brčka.* *Karlovi došly magnety a připínáčky.*

Snadno si s pár brčky a ubrouskem můžeme vyzkoušet, že jevy popsané v zadání fungují. Brčko je nevodič. Při tření brčka například ubrouskem přeskočí mezi brčkem a ubrouskem pár elektronů a na brčku se tak vytvoří náboj. Když brčko přiblížíme třeba ke zdi, tak se povrchové atomy polarizují tak, že na povrchu zdi se vytvoří parciální náboj opačného znaménka než na brčku, díky kterému tam brčko drží (nám drželo na zdi asi hodinu, říká se ale, že tam může vydržet i přes týden). Když tedy dáme dvě brčka k sobě, tak je jasné, že se budou odpuzovat. Zkusme odhadnout, jak velký náboj se na nich vytvoří.

Odhady

Náš experiment bude velice jednoduchý. Nabijeme dvě brčka, jedno z nich upevníme a druhé budeme lehce prsty přidržovat a zjišťovat, v jaké vzdálenosti d nad prvním brčkem bude mít stabilní polohu, tj. v jaké vzdálenosti se vyrovnají tíhová F_G a odpudivá elektrostatická F_e síla. Tíhovou sílu určíme jednoduše $F_G = mg$, kde m je hmotnost brčka a g tíhové zrychlení. Elektrostatickou sílu můžeme odhadnout několika způsoby, získané odhady na závěr porovnáme.

Nejdříve budeme uvažovat náboj na brčku jako bodový náboj (má to k tomu sice daleko, ale odhad je od toho, že to je odhad). Elektrostatická odpudivá síla má pak klasický Coulombovský tvar

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\,,$$

kde ε_0 je permitivita vakua. Uvažujeme, že na obou brčkách je stejný náboj. Když to dáme do rovnosti s tíhovou silou, dostaneme pro náboj odhad

$$q_1 = d\sqrt{4\pi m g\varepsilon_0}\,.$$

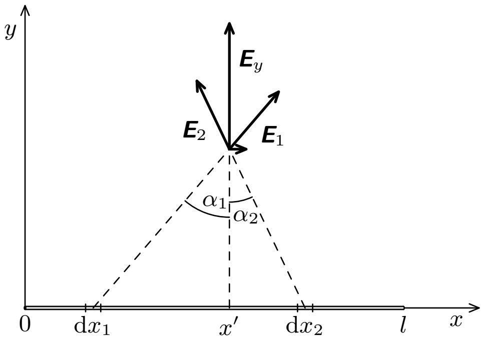
Dále můžeme brčko délky l považovat za nekonečně dlouhou rovnoměrně nabitou tyčku s délkovou hustotou náboje $\tau = q/l$. S využitím Gaussova zákona určíme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od tyčky

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 d l}\,.$$

Po vynásobení q dostaneme hledanou sílu, kterou dáme opět do rovnosti s tíhovou a vyjádříme náboj

$$q_2 = \sqrt{2\pi\varepsilon_0 d l m g}\,.$$

Nakonec můžeme brčka považovat za dvě tyče rovnoměrně nabité délkovou hustotou náboje $\lambda = \mathrm{d}q/\mathrm{d}x = q/l$. Na lepší odhad se asi ani nezmůžeme, protože nerovnoměrné a nestejné rozložení náboje, které je při každém pokusu trochu jiné, popsat nedokážeme. Odvození vzorce pro sílu, kterou se tyče odpuzují, není úplně triviální, nicméně šikovný středoškolák si na něm může vyzkoušet integrování. Tak tedy sledujme obrázek 1: nejprve si vypočítáme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od jedné rovnoměrně nabité tyče. Budeme počítat y-ovou složku intenzity – budeme z ní potom počítat sílu v y-ovém směru. Uvažujme bod, který má



Obr. 1: Dvě rovnoměrně nabité tyče konečné délky

x-ovou souřadnici x'. Od malých elementů tyče $\mathrm{d}x_1$ a $\mathrm{d}x_2$ do y-nové složky intenzity přispívají $\cos\vartheta_1 \mathrm{d}E_1$ a $\cos\vartheta_2 \mathrm{d}E_2$, kde význam úhlů je zřejmý z obrázku. Celkovou intenzitu získáme, když tyto elementy zintegrujeme přes celou tyč

$$
\begin{aligned}
E_y &= \int \mathrm{d}E_y = \int_0^{x'} \cos\alpha_1 \mathrm{d}E_y + \int_{x'}^{l} \cos\alpha_2 \mathrm{d}E_y = \\
&= \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^{x'} \frac{1}{\left[(x'-x)^2+y^2\right]^{3/2}} \mathrm{d}x_1 + \int_{x'}^{l} \frac{1}{\left[(x-x')^2+y^2\right]^{3/2}} \mathrm{d}x_2 \right) = \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \left(\frac{l-x'}{\sqrt{(l-x')^2+y^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y^2}} \right) .
\end{aligned}
$$

Teď dáme do vzdálenosti d od této tyče další, úplně stejnou, tyč. Odpudivou sílu (která míří ve směru y), kterou na sebe budou působit, spočítáme takto

$$
\begin{aligned}
F &= \int \mathrm{d}F = \int E_y \mathrm{d}q = \int_0^l E_y \lambda \mathrm{d}x = \\
&= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \int_0^l \left(\frac{l-x'}{\sqrt{(l-x')^2+y^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y^2}} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 l^2} \left(\sqrt{1+\frac{l^2}{d^2}} - 1 \right) .
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme, jako předtím, dát tuto sílu do rovnosti s tíhovou a určit náboj:

$$
q_3 = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m g l^2}{\sqrt{1+\frac{l^2}{d^2}} - 1}} .
$$

Měření

Zvážili a změřili jsme několik brček a z měření určili hmotnost m a délku nabité části brčka l: $m = (0{,}52 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g}$, $l = (14{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{cm}$. Dále jsme měřili, v jaké výšce nad jedním nabitým brčkem se pro druhé nabité brčko vyrovná tíhová a elektrostatická odpudivá síla: $d = (2{,}3 \pm 0{,}5)\,\mathrm{cm}$.

Z těchto údajů jsme spočítali hodnotu náboje, chybu jsme určili podle zákona šíření nejistot.[1] Chyba měřidel (vah a pravítka) je v tomto případě zanedbatelná.

$$q_1 = (17 \pm 4)\,\mathrm{nC}\,,$$
$$q_2 = (38 \pm 3)\,\mathrm{nC}\,,$$
$$q_3 = (32 \pm 5)\,\mathrm{nC}\,.$$

Výsledky se v rámci nejistot sice neshodují, ale jsou velmi podobné – všechny tři odhady pro řádový odhad postačí. Dle očekávání je ten třetí, tedy nejpřesnější, mezi zbylými dvěma – tj. brčko bude pravděpodobně něco mezi bodovým nábojem a nekonečně dlouhou nabitou tyčkou.

Komentář k došlým řešením

Vaše řešení šla rozdělit to dvou druhů – ta, v kterých byl náboj odhadnut dobře, a ta, v kterých nebyl. Řada z vás sestavila nějakou pěknou aparaturu na měření – pověsila brčka na provázky a měřila, jak moc se odpuzují, nebo jak drží na zdi či nástěnce. Líbila se nám řešení Miroslava Hanzelky a Terezy Uhlířové, která byla pěkně zpracovaná a nic podstatného tam nechybělo.

Chybu v odhadu lze často odhalit už selským rozumem – náboj na brčku pravděpodobně nebude menší než elementární náboj a ani nebude v řádech coulombů. Napětí mezi brčkem a zdí nebude v řádech tisíců voltů, když v zásuvce je efektivní hodnota 230 V. Proto se vždycky zamyslete, jestli vaše řešení dává smysl. Také pořádně popište, jak jste experiment prováděli – záhadná krabička „měřič náboje“ je nepřesný popis :).

A na závěr, bohužel to byla častá výtka, dávejte si pozor na správně zapsaný výsledek, nejlépe ve tvaru „veličina = (číslo±chyba) jednotka“. Chybu zaokrouhlete na jednu nebo dvě platné číslice (první nenulové) a podle toho i výsledek, například $(43{,}545\,829\,1 \pm 1{,}755\,485\,2) \doteq (44 \pm 2)$, $(145{,}486\,574\,61 \pm 28{,}485\,78) \doteq (150 \pm 30)$, $(85{,}016\,555\,485 \pm 0{,}521\,781\,6) \doteq (85{,}0 \pm 0{,}5)$.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

[1] Pokud je veličina y funkcí několika veličin x_i: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a známe chybu Δx_i každé z těchto veličin, lze chybu veličiny y vypočítat ze vztahu $\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$.