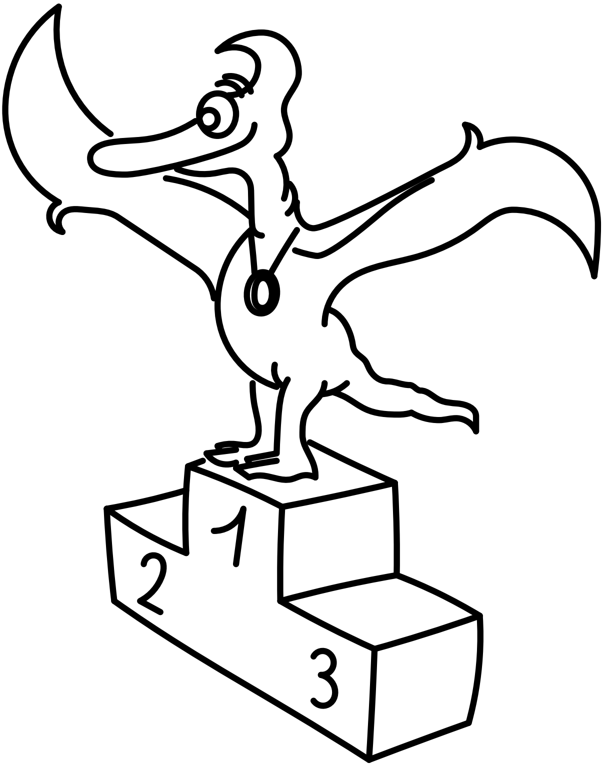
Řešení úloh 8. ročníku FYKOSího Fyziklání



Úloha AA ... z toho se nevykroutíš

Kolikrát musíme otočit šroubem o délce 2 cm, aby se celý zašrouboval, pokud stoupání závitů je 0,5 mm? *Nikdo nevěděl, jak uhodit hřebík na hlavičku.*

Jedním otočením zašroubujeme šroub o 0,5 mm. K zašroubování o 2 cm potřebujeme $20/0{,}5 = 40$ otočení.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha AB ... na Měsíci

Jakou hmotnost v gramech má na Měsíci závaží, které má na Zemi hmotnost 1 kg? Hmotnost Země je $M = 5{,}972\,7\cdot 10^{24}$ kg, hmotnost Měsíce je $m = 7{,}35\cdot 10^{22}$ kg a vzdálenost Země a Měsíce je $d = 384\,400$ km. *Kiki má slabost pro chytáky.*

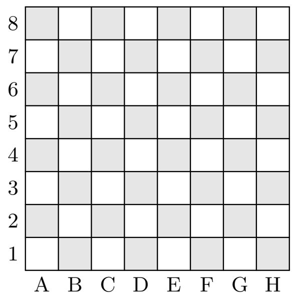
I na Měsíci lze provádět triviální převody jednotek – jeden kilogram je tisíc gramů.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha AC ... zamilovaný král

Černý král, který je na svém hradě na E8, je pozván na hrad krále bílého (na E1). Vyrazí tedy nejkratší možnou cestou (E7–E6...) tak, že za 7 dní (tahů) dorazí na E1. Během zpáteční cesty (vrací se opět na svůj hrad na E8) se rozhodne navštívit svou paní, která se zrovna nachází na H4. Bohužel zpáteční cestu musí stihnout také za 7 dní. Jaký bude poměr průměrných rychlostí cest tam a zpátky? Předpokládejme, že se král pohybuje přímočaře a na začátku i konci tahu se nachází přesně ve středu políčka. Během tahu se posune na jedno z osmi sousedních políček. *Lukáš má rád šachové paradoxy.*

Délku strany políčka si můžeme označit například a. Potom je zřejmé, že při cestě tam urazí král dráhu $7a$. Při zpáteční cestě půjde například takto E1–F2–G3–H4–G5–F6–E7–E8. Cesta z E1 na H4 je za daných podmínek určena jednoznačně. Z H4 na E8 se dá dojít čtyřmi způsoby – při všech ovšem půjde třikrát po diagonále a jednou rovně. Délku cesty po diagonálách určíme jednoduše Pythagorovou větou. Celková dráha, kterou král musí během zpáteční cesty urazit, je tedy $a(1+6\sqrt{2})$. Jelikož mu cesta tam i zpátky trvala stejně dlouho, je poměr rychlostí roven poměru uražených drah, tedy:



Obr. 1: Šachovnice

$$\frac{v_{\mathrm{tam}}}{v_{\mathrm{zpět}}} = \frac{7a}{a(1+6\sqrt{2})} = \frac{7}{1+6\sqrt{2}}\,.$$

Lukáš Fusek
lukasf@fykos.cz

Úloha AD ... alchymie

Karel má dvě amfory s vodou s teplotami $40\,^\circ\mathrm{C}$ *a* $70\,^\circ\mathrm{C}$. *V obou amforách jsou* $2\,\mathrm{l}$ *vody. S velkou pompou smíchá třetinu obsahu každé amfory v tenké hliníkové misce. Jaká bude výsledná teplota směsi? Měrná tepelná kapacita vody je* $c = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. *Zanedbejte tepelné ztráty.*

Karel vaří těstoviny.

V zadání jsou nadbytečné údaje. Mícháme dohromady stejné objemy vody, takže výsledná teplota bude průměrem počátečních teplot. Teplejší voda předá teplo Q chladnější vodě, ale protože mají stejné hmotnosti, bude též změna teploty obou dílů vody stejná až na znaménko. Výsledná teplota bude tedy $T = 55\,^\circ\mathrm{C}$.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha AE ... Titanic

Dutá ocelová krychle s délkou hrany $a = 2\,\mathrm{m}$ *a hmotností* $M = 100\,\mathrm{kg}$ *plave na vodě s hustotou* $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Jaká část objemu je pod hladinou, jestliže dno krychle zůstává stále rovnoběžné k hladině vody? Tíhové zrychlení je* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Mirek fandí DiCapriovi.*

Nejprve si řekneme Archimédův zákon a pak jej použijeme.

> *Těleso je vytlačováno silou, která je rovna tíze kapaliny o objemu ponořené části tělesa.*

Protože je krychle v klidu, tak jsou síly na ni působící v rovnováze. Tíhová síla je Mg. Vztlaková síla je $\varrho a^2 hg$, kde h je hloubka ponoření a objem tělesa pod hladinou je $V_0 = a^2 h$. Platí

$$V_0 = \frac{M}{\varrho}\,.$$

Pod hladinou je část objemu $p = V_0/V$, kde $V = a^3$ je objem celé krychle. Platí tedy

$$p = \frac{M}{\varrho a^3} = 1{,}25\,\%\,.$$

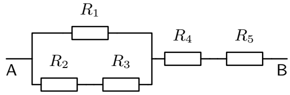
Pod hladinou bude pouze $1{,}25\,\%$ celkového objemu.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha AF ... cestou nejmenšího odporu

Mějme obvod jako na přiloženém obrázku. Přiřaďte pětici rezistorů R_1 *až* R_5 *pětici odporů* $1\,\Omega$, $1\,\Omega$, $3\,\Omega$, 5Ω, $5\,\Omega$ *tak, aby byl celkový odpor (mezi body* A *a* B*) zapojení co nejmenší. Určete jeho hodnotu.* *Mirek nechtěl nikomu odporovat.*

Z Ohmova zákona plyne, že odpor sériově zapojených rezistorů je roven součtu jejich odporů a převrácená hodnota odporu paralelního zapojení je rovna součtu převrácených hodnot odporů jednotlivých rezistorů. Pro odpor R daného zapojení platí



Obr. 2: Obvod

$$R = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 + R_5$$

a není těžké uhodnout, že R bude minimální při přiřazení hodnot odporů $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 5\,\Omega$, $R_4 = R_5 = 1\,\Omega$. Po dosazení vyjde $R \doteq 4{,}31\,\Omega$.

Pokud bychom chtěli odvodit, proč má právě toto zapojení minimální odpor, můžeme uvažovat následovně. Podíváme-li se na zlomek v obecném výrazu, snadno si rozmyslíme, že jeho jmenovatel je invariantní vůči permutování R_1, R_2, R_3. Budeme se proto soustředit pouze na jeho čitatel. Také si rozmyslíme, že bude výhodné, když do spodní paralelní větve dáme co největší odpory a do druhé malý odpor – celkový odpor zapojení pak bude blízký odporu v druhé větvi. Určitě tedy zvolíme $R_2 = R_3 = 5\,\Omega$. Nyní zbývá rozhodnout, zda položíme $R_1 = 1\,\Omega$, nebo jestli bude výhodnější nechat jednotkové odpory v sérii a položit $R_1 = 3\,\Omega$. Napišme nerovnost

$$a + (a + \delta) + \frac{as}{a + s} > a + a + \frac{(a + \delta)s}{a + s}\,,$$

kde $s = R_2 + R_3$, $a = 1\,\Omega$, $a + \delta = 3\,\Omega$. Snadno ukážeme, že tato nerovnost platí, a proto je lepší volit $R_1 = 3\,\Omega$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha AG ... padající řetízek

Paťo dostal homogenní řetízek, který váží $m = 50\,\mathrm{g}$ *a má 50 oček. Jako fyzik chtěl změřit koeficient tření řetízku a stolu, a tak nechal přes stůl viset 10 oček. Paťo ale zapomněl na to, že jeho stůl je vlastně dokonale hladký, a řetízek se okamžitě začal sesouvat ze stolu. Vypočítejte, jaké bylo zrychlení řetízku na začátku pohybu.*

Paťo přemýšlel, co bude dělat s dokonale hladkým stolem.

Přes okraj stolu visí jedna pětina řetízku, která má hmotnost $10\,\mathrm{g}$. Tato část řetízku stahuje celý řetízek dolů. Celková hmotnost řetízku je $50\,\mathrm{g}$, tedy 5krát větší. Můžeme tedy dosadit do 2. Newtonova zákona $F = ma$. F bude $mg/5$, zrychlení tedy musí být $g/5$, tedy pětina tíhového zrychlení.

Patrik Švančara
patrik@fykos.cz

Úloha AH ... hustá krychle

Mirek vzal krychli s hranou délky $10\,\mathrm{cm}$ *a pořádně ji stlačil ve svěráku, až změnila rozměry na* $11 \times 11 \times 7\,\mathrm{cm}^3$. *Jaký je poměr nové a staré hustoty této krychle?* *Mirek drtí křídu.*

Při deformaci se nemění hmotnost krychle. Pro hustotu platí $\varrho = m/V$, můžeme vyjádřit hmotnost a triviální úpravou dostáváme

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{V}{V'}\,.$$

Objem kvádru je roven součinu délek jeho hran. Dosadíme-li hodnoty ze zadání, dostáváme pro poměr hustot $\varrho'/\varrho = 1{,}18$.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha BA ... roztržitá voda

Nalijeme si do sklenice čisté vody o teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$, avšak každá N-tá molekula vody se zničehonic rozpadne na čistou energii (uvolní se z ní energie $E = mc^2$, kde m je hmotnost molekuly a c je rychlost světla). Jaké musí být N, aby se voda za normálního tlaku začala vařit? Měrná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4\,186\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$. *V Jančim to vřelo. Zničehonic.*

Označme M hmotnost vody ve sklenici. Položíme-li teplo potřebné k ohřátí vody z $20\,^\circ\mathrm{C}$ na $100\,^\circ\mathrm{C}$ rovno klidové energii získané přeměnou každé N-té molekuly na čistou energii, máme

$$c_\mathrm{v}\Delta T\left(1-\frac{1}{N}\right) = \frac{c^2}{N}\,,$$

kde $\Delta T = 80\,^\circ\mathrm{C}$ a kde jsme se již postarali o to, že nemusíme ohřívat přeměněné molekuly. Máme tedy

$$N = 1 + \frac{c^2}{c_\mathrm{v}\Delta T} \approx \frac{c^2}{c_\mathrm{v}\Delta T}\,,$$

protože pro zadané parametry platí $c^2 \gg c_\mathrm{v}\Delta T$. Číselně $N \doteq 2{,}7\cdot 10^{11}$.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha BB ... vrhni

Lukáš se připravoval na XLII. intergalaktickou olympiádu. Trénoval vrh koulí, a aby tréninkové podmínky vyhovovaly vysokým olympijským standardům, nechal v celém areálu MFF UK v Troji vytvořit vysoké vakuum. Kouli hodil vodorovně z desátého patra katedrového objektu rychlostí $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Za jak dlouho koule dopadne na vodorovnou zem, jestliže výška jednoho patra je $H_0 = 3{,}5\,\mathrm{m}$? (Podlaha prvního patra je ve výšce H_0 nad zemí.) Tíhové zrychlení má velikost $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Tomáše bolela hlava.*

Jde o vodorovný vrh. Pohyby ve vodorovném a svislém směru jsou nezávislé. Pohyb ve vodorovném směru je rovnoměrný a na čas dopadu nemá vliv. Ve svislém směru jde o volný pád. Pro dobu pádu platí

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\,,$$

kde $H = 10H_0$ je počáteční výška a g je tíhové zrychlení. Po dosazení dostáváme $T \doteq 2{,}67\,\mathrm{s}$.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha BC ... termodynamická rozcvička

Ideální plyn jsme adiabaticky převedli ze stavu A *do stavu* B *a potom izotermicky ze stavu* B *do stavu* C*. Při prvním ději plyn vykonal práci $W_1 = 4\,\mathrm{J}$, při druhém práci $W_2 = 5\,\mathrm{J}$. Jak se změnila jeho vnitřní energie při přechodu ze stavu* A *do* C*?* *Xellos a písemka z Fyziky I.*

Při izotermickém ději se vnitřní energie nemění, zajímá nás proto jen její změna při prvním ději. Z 1. termodynamického zákona $U_\mathsf{B} - U_\mathsf{A} = Q - W_1$ a jelikož při adiabatickém ději platí $Q = 0$, bude změna energie $\Delta U = U_\mathsf{B} - U_\mathsf{A} = -W_1 = -4\,\mathrm{J}$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha BD ... utahování opasků

Šroub má stoupání závitů Δ. Otáčíme jím momentem síly o velikosti M. Jakou silou tlačí spodek šroubu? Zanedbejte veškeré tření. *Lukáš chtěl rozdrtit černou díru.*

Pri otočení o 2π vykonáme rukou prácu $2\pi M$. Môžeme si to predstaviť ako pôsobenie silou M/r na dráhe $2\pi r$. Predstavme si, že sa skrutka, napríklad, pomaly zarýva do mäkkého materiálu. Keďže nezrýchľuje, tak sila, ktorá na ňu pôsobí, je rovnaká ako sila, ktorou pôsobí na materiál (označme ju F). Pri jednej otočke teda tento koniec vykoná prácu $F\Delta$, a keďže zanedbávame trenie, celá energia je predaná ďalej. Silu jednoducho dopočítame z rovnosti prác.

$$F = \frac{2\pi M}{\Delta}\,.$$

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha BE ... ekologické zasněžování

Předpokládejte, že teplota vzduchu na sjezdovce je $0\,^\circ\mathrm{C}$ a že do sněžných děl se pouští směs vody a etheru o teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$. Jaká část (hmotnostní zlomek) směsi musí být ether, aby voda zmrzla? Měrné skupenské teplo tuhnutí vody je $l_{\mathrm{t,v}} = 334\,\mathrm{kJ}$, měrné skupenské teplo vypařování etheru je $l_{\mathrm{v,e}} = 377\,\mathrm{kJ}$. Předpokládejte, že ether absorbuje pouze teplo odpovídající jeho skupenskému teplu vypařování. *Lukáš chtěl mít zasněžené sjezdovky, i když je nad nulou.*

Na hmotnost vody m_v musí připadat taková hmotnost etheru m_e, aby skupenské teplo získané jejím odpařením odpovídalo skupenskému teplu, které musíme odebrat dané hmotnosti vody, aby zmrzla (za předpokladu, že ether absorbuje pouze teplo odpovídající jeho skupenskému teplu vypařování). Musíme tedy mít $l_{\mathrm{t,v}} m_\mathrm{v} = l_{\mathrm{v,e}} m_\mathrm{e}$, kde $l_{\mathrm{t,v}}$ je měrné skupenské teplo tuhnutí vody a $l_{\mathrm{v,e}}$ je měrné skupenské teplo vypařování etheru. Hledaný poměr tedy je

$$p = \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{v}} = \frac{l_{\mathrm{t,v}}}{l_{\mathrm{t,v}} + l_{\mathrm{v,e}}}\,.$$

Číselně $p \doteq 0{,}470$.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha BF ... nemocné peníze

Bankovka je pokryta $N = 26\,000$ smrtonosnými bakteriemi. Bankovka je obdélníkový kus papíru se stranami $a = 158\,\mathrm{mm}$, $b = 74\,\mathrm{mm}$. Jaká bude střední vzdálenost mezi sousedními bakteriemi? **Stačí řádový odhad.** *Lukáš střílel gumičkou po komárech.*

Označíme-li δ charakteristickou vzdálenost mezi bakteriemi, tak plocha, kterou obývá jedna bakterie, je δ^2. Proto je-li plocha bankovky S, tak počet bakterií bude přibližně

$$N \approx S/\delta^2\,,$$

a tedy charakteristická vzdálenost mezi bakteriemi (bankovka má dvě strany)

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2ab}{N}} \doteq 0{,}95\,\mathrm{mm}\,.$$

Střední vzdálenost mezi bakteriemi je přibližně milimetr.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha BG ... porcování planety

Rozhodli jsme se vyprojektovat soustavu dvou těles ve vzdáleném vesmíru ve velké vzdálenosti od galaxií a dalších hmotných bodů. Máme nějakou hmotu o hmotnosti m a chceme ji rozdělit na dva kusy, které z estetických důvodů chceme umístit do větší vzdálenosti od sebe, takže rozměry těles, které takto vytvoříme, budou zanedbatelné vůči jejich vzdálenosti. V jakém poměru máme hmotu rozdělit mezi dvě tělesa, aby byla gravitační síla působící mezi tělesy co největší? *Karel se zabýval projektováním hvězdných soustav.*

Budeme skúmať, kedy bude sila maximálna. Označíme hmotnosť prvého telesa m_1 a hmotnosť druhého $m_2 = m - m_1$. Po dosadení do známeho vzorca

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_1\,(m - m_1)}{r^2}\,,$$

hľadáme maximum F_g. Alebo inak povedané vrchol paraboly. Existujú dva spôsoby – buď deriváciou podľa m_1, teda

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_1 m - m_1^2}{r^2}\,,\quad 0 = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{g}}{\mathrm{d}m_1} = G\frac{m - 2m_1}{r^2} \quad\Rightarrow\quad 0 = m - 2m_1 \quad\Rightarrow\quad m_1 = \frac{1}{2}m\,.$$

Alebo doplnením na štvorec a nájdením vrcholu paraboly ako

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_1 m - m_1^2}{r^2}\,,\quad \frac{r^2 F_\mathrm{g}}{G} = m_1 m - m_1^2\,,\quad -\frac{r^2 F_\mathrm{g}}{G} = \left(m_1 - \frac{1}{2}m\right)^2 - \frac{1}{4}m^2 \quad\Rightarrow\quad m_1 = \frac{1}{2}m\,.$$

Sila F_g bude maximálna, keď bude $-r^2 F_\mathrm{g}/G$ minimálne. Toho dosiahneme tak, že zátvorku položíme rovnú nule (je to najlepší prípad, pretože záporná byť nemôže). Zátvorka bude nulová práve pre $m_1 = m/2$. Hmotu musíme rozdeliť v pomere $m_1 : m_2 = 1 : 1$.

Michal Červeňák
`miso@fykos.cz`

Úloha BH ... těžká váha

Při normálním izotopickém zastoupení vodíku v těle člověka tvoří lehký vodík x %, deuterium y % a tritium 0 %. Pokud by veškerý vodík v těle byl pouze deuterium, vzrostla by hmotnost člověka o Δm. Kolik atomů vodíku (lehkého vodíku, deuteria a tritia) má člověk v těle? Molární hmotnost atomárního lehkého vodíku je M_1 a molární hmotnost atomárního deuteria je M_2.

Kiki přemýšlí, proč přibrala.

Rozdíl v hmotnostech člověka Δm vydělený rozdílem molárních hmotností izotopů $\Delta M = M_2 - M_1$ představuje počet molů lehkého vodíku. Pokud počet molů vynásobíme Avogadrovou konstantou N_A, získáme počet atomů lehkého vodíku v těle. Jelikož víme, jaké procento ze směsi izotopů tvoří v těle lehký vodík, můžeme dopočítat celkový počet atomů vodíku v těle člověka (nějaké deuterium totiž obsahoval už na začátku, což se ve změně jeho hmotnosti neprojeví). Víme, že počet atomů lehkého vodíku představuje x %, takže celkový počet vodíku v lidském těle (100 %) získáme tak, že počet atomů lehkého vodíku vydělíme x a vynásobíme 100. Výsledek má tedy tvar

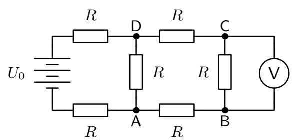
$$n = \frac{100}{x}\frac{\Delta m}{\Delta M} N_\mathrm{A}\,.$$

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha CA ... napětí v obvodu

Do obvodu na obrázku přivádíme napětí U_0. Jaké napětí U naměříme na vybraném rezistoru (mezi body B a C)? Všechny rezistory jsou stejné a odpory vodičů zanedbejte.

Karel strkal prsty do zásuvky.



Obr. 3: Obvod.

Spočteme celkový odpor obvodu R_c

$$R_\mathrm{c} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R+R}\right)^{-1} + R = \frac{11}{4}R\,.$$

Celkový proud tekoucí obvodem je

$$I_\mathrm{c} = \frac{U_0}{R_\mathrm{c}} = \frac{4U_0}{11R}\,.$$

Napětí na rezistoru uprostřed (mezi A a D) je

$$U_\mathsf{AD} = U_0 - I_\mathrm{c}R - I_\mathrm{c}R = \frac{3}{11}U_0\,.$$

Vzhledem k tomu, že za sebou (ABCD) jsou zapojené tři stejné rezistory, tak se napětí mezi nimi rozdělí rovnoměrně a pro hledané napětí platí

$$U = U_\mathsf{BC} = \frac{1}{3}U_\mathsf{AD} = \frac{1}{11}U_0\,.$$

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CB ... smrt shůry

Určete velikost plochy, kterou můžeme zasáhnout výstřelem z katapultu, jestliže projektil vylétá pod úhlem 45°, počáteční rychlost v_0 je z intervalu $\langle 45; 55\rangle\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a maximální odchylka od přímého směru je $\Delta\varphi = 0{,}5^\circ$. Odpor vzduchu zanedbejte, tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Mirek se inspiroval středověkými válečnými stroji.

Hledaná plocha je výseč mezikruží o velikosti $\varphi = 1^\circ$ s vnitřním a vnějším poloměrem odpovídajícím maximálnímu dostřelu pro $v_1 = 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_2 = 55\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Z rovnic pro šikmý vrh

$$x(t) = vt\cos\alpha\,,$$
$$y(t) = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

odvodíme

$$d = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Označme $d(v_1) = r_1$, $d(v_2) = r_2$. Hledaná plocha je potom

$$A = \frac{\varphi}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) = \frac{\varphi\sin^2(2\alpha)}{2g^2}\left(v_2^4 - v_1^4\right) \doteq 460\,\mathrm{m}^2\,.$$

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha CC ... srážka

V okamžiku, kdy těleso 1 začne volně padat z výšky $H + h = 8\,\mathrm{m}$ nad podložkou, je těleso 2 vrženo z podložky svisle vzhůru rychlostí v_0. Určete velikost v_0 tělesa 2 tak, aby se setkalo s tělesem 1 ve výšce $h = 2\,\mathrm{m}$ nad podložkou. Nedojde-li ke srážce, do jaké maximální výšky pak těleso 2 při této rychlosti vystoupí? Tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Terka pouštěla kuličky.

Budeme měřit y-ovou souřadnici směrem vzhůru s nulou na podložce. Jsou-li tělesa vypuštěna v čase $t = 0\,\mathrm{s}$, můžeme pro jejich y-ové souřadnice psát

$$y_1(t) = h + H - \frac{1}{2}gt^2\,,$$
$$y_2(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Setkají-li se tělesa v čase t', musíme mít $y_1(t') = y_2(t')$, a tedy $t' = (h + H)/v_0$. My ale chceme

$$y_1(t') = y_2(t') = h = h + H - \frac{1}{2}g\left(\frac{h+H}{v_0}\right)^2\,,$$

a tedy

$$v_0 = (h + H)\sqrt{\frac{g}{2H}}\,.$$

Číselně $v_0 \doteq 7{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Výška, do které následně těleso 2 vystoupí, je $h_\mathrm{m} = v_0^2/2g$, číselně $h_\mathrm{m} \doteq 2{,}7\,\mathrm{m}$.

Jakub Vošmera
`kuba@fykos.cz`

Úloha CD ... beduínův bublifuk

Beduín putující Saharou se zastavil u oázy, a zatímco se velbloud napájel, vytáhl beduín svůj oblíbený bublifuk a začal vyfukovat bubliny. Průměrná bublina má ihned po utvoření poloměr $R_0 = 2\,\mathrm{cm}$. Teplota beduínova dechu, kterým bublinu nafoukne, je $T_0 = 40\,{}^\circ\mathrm{C}$. Určete nárůst poloměru poté, co se vzduch v bublině ohřeje na okolní teplotu $T_1 = 55\,{}^\circ\mathrm{C}$. Předpokládejte přitom, že vliv povrchového napětí na tlak v bublině je zanedbatelný a tlak vzduchu je $p_0 = 103\,\mathrm{kPa}$ (jsme v oblasti vysokého tlaku). *Mirek vymýšlel zadání k řešení.*

Nejprve zkusme zjistit, jakou roli by zde hrálo povrchové napětí. Bublinu si pomyslně rozdělíme na dvě polokoule. Tlaková síla bublinu rozpíná silou $F_1 = (p_\mathrm{in} - p_0)\pi R^2$, zatímco povrchové napětí působí směrem dovnitř silou $F_2 = 2\sigma \cdot 2\pi R$. Píšeme explicitně 2σ, protože bublina má dva povrchy. Z rovnosti sil F_1 a F_2 plyne vztah

$$(p_1 - p_0) = \frac{4\sigma}{R}\,.$$

Můžeme odhadnout, že pro rozumné hodnoty povrchového napětí (v řádu desítek $\mathrm{mJ\cdot m^{-2}}$) se jedná o rozdíl tlaků v řádu desítek Pa, zatímco okolní tlak má řád stovek kPa. Vliv povrchového napětí proto zanedbáváme oprávněně a budeme dále uvažovat obyčejný izobarický děj. Jelikož $V \sim R^3$, můžeme rovnou psát

$$\Delta R = \sqrt[3]{\frac{T_1}{T_0}}R_0 - R_0 \doteq 3{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}\,.$$

Kdybychom počítali s povrchovým napětím, dostali bychom pro nový poloměr kubickou rovnici

$$R^3 + \frac{4\sigma}{p_0}R^2 - \frac{T_1}{T_0}R_0^3 = 0\,,$$

z níž s přesností na dvě platné číslice dostaneme stejný výsledek $\Delta R \doteq 3{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha CE ... bohatý elektrikář

Mějme 10 stříbrných mincí poskládaných na sebe a spojených dokonale vodivou pastou. Mince mají tloušťku h, jejich průměr je d, hustota ρ a rezistivita j. Jaký je celkový odpor mincí?
Janči filozofoval nad smyslem peněz.

Mince jsou v podstatě vodičem. Odpor vodiče určíme podle vztahu

$$R = j\,\frac{L}{S}\,,$$

kde $L = 10h$ je délka a $S = \pi d^2/4$ je plocha mince. Po dosazení dostáváme $R = 40jh/(\pi d^2)$.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha CF ... pružinková

Mechanický oscilátor tvoří pružinka s miskou se závažím, perioda oscilátoru je 0,75 s. Přidáním dalšího identického závaží se perioda oscilátoru zvětší na 0,95 s. O kolik cm se přidáním závaží posunula rovnovážná poloha oscilátoru? Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Výsledek uveďte na tři platné číslice. *Tom a Kiki skákali na trampolíně.*

V prvním případě bude perioda oscilátoru $T_1 = 2\pi\sqrt{M/k}$, v druhém $T_2 = 2\pi\sqrt{(M+m)/k}$, kde k je tuhost pružiny, pro kterou platí $k = F/\Delta l$, kde $F = mg$, což představuje sílu, která způsobila prodloužení pružiny o Δl. Abychom něco hezkého získali z výrazů pro periody, odečteme od sebe jejich druhé mocniny:

$$T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2(M+m)}{k} - \frac{4\pi^2 M}{k} = \frac{4\pi^2(M+m-M)}{k} = \frac{4\pi^2 m}{k}\,.$$

Ze získaného výrazu si lze vyjádřit

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_2^2 - T_1^2}$$

a poté tento výraz dosadit do vztahu pro tuhost oscilátoru, ze kterého si vyjádříme Δl a dostaneme

$$\Delta l = \frac{mg}{\frac{4\pi^2 m}{T_2^2 - T_1^2}} = \frac{g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{4\pi^2}\,.$$

Po číselném dosazení a výpočtu zjišťujeme, že rovnovážná poloha oscilátoru se posunula asi o 8,45 cm.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha CG ... nech mě spát!

Lukášovi do oken na koleji v noci svítí reflektor. Má podezření, že v noci je v pokoji stejně světla jako ve dne. Uvažujme, že ze Slunce na $1\,\mathrm{m^2}$ dopadá výkon 100 W (je zataženo). Reflektor je od okna o ploše $2\,\mathrm{m^2}$ vzdálen 20 m. Odhadněte, jaký musí mít světelný výkon, aby na okno dopadal stejný výkon jako ze Slunce. Uvažujte, že světlo z reflektoru i od Slunce dopadají kolmo a reflektor osvětluje poloprostor. *Lukáš hledal výmluvu, proč zaspal zkoušku.*

Celkový výkon, který dopadá na okno ze Slunce, je 200 W. Odpovídá to součinu plochy okna a plošného výkonu. Reflektor osvětluje část sféry o prostorovém úhlu $\Phi = 2\pi$ a osvětlená plocha je $2\pi R^2$, kde R je poloměr sféry (v našem případě 20 m). Chceme, aby dopadající výkon byl $100\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, takže výkon reflektoru musí být přibližně 250 kW. Poznamenejme ještě, že reflektory mají příkon (nikoli výkon) maximálně několik kW, takže v pokoji není nikdy tolik světla jako ve dne.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha CH ... dvojlinka

Měděná dvojlinka tvořená dvěma dráty o průměru $d = 1\,\mathrm{mm}$ se zlomila a zkratovala. Jak nejblíže k jističům na proud $I = 10\,\mathrm{A}$ se tohle může stát, aby jističe nevypadly? Napětí v zásuvce je $U = 230\,\mathrm{V}$, rezistivita mědi je $\varrho = 17\,\mathrm{n\Omega{\cdot}m}$. *Vymyslel Lukáš s nefunkční žehličkou v ruce.*

Musíme spočítat odpor vodiče a z toho proud, který jím prochází. Odpor dvojlinky je

$$R = \varrho\frac{2L}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{U}{I} \quad\Rightarrow\quad L = \frac{\pi U d^2}{8I\varrho}\,,$$

kde jsme nezapomněli, že d je průměr a délka vodiče je $2L$, kde L je vzdálenost zkratu od zásuvky. Po dosazení hodnot vychází $L \doteq 531\,\mathrm{m}$.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha DA ... pyramida

Určete, jakou práci museli vykonat dělníci při stavbě stupňovité pyramidy. Uvažujte, že se stupňovitá pyramida skládá z kamenných krychlí o objemu $1\,\mathrm{m}^3$, její základna má čtvercový tvar o délce strany $200\,\mathrm{m}$, je vysoká $98\,\mathrm{m}$, délka schodu je $1\,\mathrm{m}$ a hmotnost jedné krychle je $3\,\mathrm{t}$. Hmotnost dělníků a práci potřebnou k dopravení bloků k pyramidě zanedbejte. Počítejte s přesností na tři platné číslice a uvažujte hodnotu tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pokud uznáte za vhodné, můžete použít následující vzorce pro sumy:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}\,, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2\,, \quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}\,.$$

Verča stavěla pyramidu.

Úloha po nás v podstatě chce, abychom určili, o kolik se zvýší potenciální energie všech bloků použitých na stavbu. Ze zadání víme, že potenciální energie bloků prvního patra se nijak nezmění, proto můžeme toto patro považovat za nulté a z dalších úvah jej vynechat. Dále víme, že každé patro bude o dva bloky užší než předchozí. To znamená, že bude mít $(200-2i)^2$ bloků, kde i je pořadové číslo patra. Protože každé patro má jiný počet bloků a nachází se v jiné výšce, bude na jeho postavení třeba také rozdílná potenciální energie. Celkovou změnu potenciální energie určíme jako sumu potenciální energie potřebné pro každé patro. Všichni dobře víme, že potenciální energie se v homogenním tíhovém poli počítá jako $E = mgh$, v našem případě tedy dostáváme

$$E = \sum_{i=1}^{97} (200-2i)^2\, mghi\,,$$

kde i značí pořadí patra a $h = 1\,\mathrm{m}$ výšku jednoho bloku. Výraz v závorce můžeme upravit a konstanty vytknout před sumu

$$E = 4mgh\sum_{i=1}^{97}\left(100^2 i - 200i^2 + i^3\right)$$

a velkou sumu můžeme rozdělit na tři menší

$$E = 4mgh\left(\sum_{i=1}^{97} 100^2 i - \sum_{i=1}^{97} 200 i^2 + \sum_{i=1}^{97} i^3\right) .$$

Po vytknutí konstant dostáváme

$$E = 4mgh\left(100^2 \sum_{i=1}^{97} i - 200 \sum_{i=1}^{97} i^2 + \sum_{i=1}^{97} i^3\right) ,$$

což už dokážeme spočítat pomocí vzorců ze zadání. Po dosazení všech číselných hodnot dostáváme potenciální energii $E \doteq 9{,}81 \cdot 10^{11}$ J.

Veronika Dočkalová
`verca@fykos.cz`

Úloha DB ... diskoráz

Jaký má být poměr hmotností disků, aby po centrálním pružném rázu, kdy jeden před rázem měl rychlost v a druhý 0, byly jejich rychlosti u a $3u$? Vyjádřete také rychlost u pomocí v. (Disky nerotují.) *Karel si koulel s mincemi.*

Označme hmotnost disku, který se původně pohyboval, jako m_1 a hmotnost druhého m_2. Při pružném rázu platí jak zákon zachování hybnosti, tak zákon zachování energie, které si napíšeme pomocí rovnic

$$m_1 v = m_1 u + 3 m_2 u ,$$
$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 (3u)^2 .$$

Rovnice upravíme

$$m_1 (v - u) = 3 m_2 u ,$$
$$m_1 \left(v^2 - u^2\right) = 9 m_2 u^2 .$$

Následně vydělíme rovnici pro zákon zachování energie zákonem zachování hybnosti a dostáváme

$$v + u = 3u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2} v .$$

Tím jsme určili rychlost u pomocí v, což byla jedna část úlohy. Pokud vyjádříme u z rovnice pro zákon zachování hybnosti, tak dostáváme

$$u = \frac{m_1}{m_1 + 3m_2} v = \frac{1}{2} v \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_1 + 3m_2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = 3 m_2 .$$

Poměr mezi hmotností disků je tedy $m_1/m_2 = 3$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha DC ... aby jim výtah dobře Shell

Přes pevnou kladku s poloměrem $R = 30\,\mathrm{cm}$ je v pokoji přehozené homogenní lano hmotnosti $m = 300\,\mathrm{g}$ a délky $L = 4\,\mathrm{m}$. Jeden z visících konců lana je o $L/2$ výše než druhý. Na nižším konci je mimo toho zavěšené závaží vážící $m_1 = 250\,\mathrm{g}$ a na vyšším konci závaží vážící $m_2 = 50\,\mathrm{g}$. Vypočítejte zrychlení této soustavy lana a závaží v násobcích tíhového zrychlení g. Tření neuvažujte. *Xellose irituje chodit do schodů.*

Je jasné, jak bude pohyb vypadat – nižší konec s těžším závažím se hýbe dolů (na zamyšlení: pro jaké hmotnosti závaží a lana to tak je?). Hledané zrychlení si označme a.

Ideální přístup je přes energie. Ve směru pohybu působí na soustavu výsledná síla $F = (m + m_1 + m_2)a$; při posunutí o Δx vykoná tato síla práci $W = F\Delta x$.

Při tom se změní potenciální energie soustavy. Závaží 1 se totiž posune o Δx dolů, závaží 2 se posune o Δx nahoru a ještě se kousek lana délky Δx „přesune“ z vyššího konce na nižší. Celková změna potenciální energie je tedy

$$\Delta E_\mathrm{p} = -m_1 g\Delta x + m_2 g\Delta x - \tau\Delta x g\frac{L}{2} = -\left(m_1 - m_2 + \frac{\tau L}{2}\right) g\Delta x\,,$$

kde $\tau = m/L$ je délková hustota lana.

Pro práci a potenciální energii platí z definice $W = -\Delta E_\mathrm{p}$, práci totiž koná pouze tíhová síla. Nyní už umíme vyjádřit

$$a = \frac{-\Delta E_\mathrm{p}}{(m + m_1 + m_2)\Delta x} = \frac{\left(m_1 - m_2 + \frac{\tau L}{2}\right)}{m + m_1 + m_2} g = \frac{2\,(m_1 - m_2) + m}{2\,(m + m_1 + m_2)} g = \frac{7}{12} g \doteq 0{,}58 g\,.$$

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha DD ... biologická mřížka

Letěly si takhle dvě aminokyseliny kolem ribozomu a závistivě sledovaly nově syntetizované proteiny. Zatímco čekaly, než si je vyzvedne tRNA, přemýšlely, v jaké vzdálenosti bude 1. a 3. světlý pás na stínítku (kde nultý pás uvažujeme na ose experimentu), které umístíme do obrazové ohniskové roviny čočky s ohniskovou vzdáleností $f = 100\,\mathrm{cm}$, zobrazujeme-li ohybovou mřížku se 100 vrypy na mm, kterou osvětlujeme kolmo rovnoběžným svazkem o vlnové délce $\lambda = 700\,\mathrm{nm}$. Poradíte jim správnou odpověď dřív, než jejich přátelství rozdělí genetický kód? *Dominika oslněná proteosyntézou.*

Po osvětlení mřížky bychom v nekonečnu pozorovali Fraunhoferovu difrakci. Protože světlu dáme do cesty čočku, tak příslušný obrazec budeme pozorovat v jejím ohnisku. Jednoduše (v každé učebnici optiky) se odvodí vzorec pro difrakci na mřížce

$$a \sin\alpha = m\lambda\,,$$

kde a je mřížková konstanta (vzdálenost vrypů) a α je úhel mezi osou a m-tým maximem. V našem případě

$$\sin\alpha = \frac{l}{\sqrt{f^2 + l^2}}\,,$$

kde l je vzdálenost m-tého maxima od středu. Má-li mřížka 100 vrypů na mm, pak její mřížková konstanta bude $a = 10^{-5}\,\mathrm{m}$. Dosadíme tedy do vzorce pro difrakci na mřížce zjištěný $\sin\alpha$ a vyjádříme

$$l = \frac{m\lambda f}{\sqrt{a^2 - m^2\lambda^2}}\,.$$

Máme určit vzdálenost prvního a třetího maxima. Určíme l pro $m = 1$ a $m = 3$ a spočteme jejich rozdíl

$$\lambda f\left(\frac{3}{\sqrt{a^2 - 9\lambda^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}\right) \doteq 14{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Úloha DE ... aerodynamický tunel

Proudící vzduch v aerodynamickém tunelu má rychlost o velikosti $v_1 = 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a tlak p_1. V určitém místě horní hrany křídla vloženého do tunelu se změní velikost rychlosti proudícího vzduchu na v_2 a tlak na hodnotu p_2. Měřením byl zjištěn rozdíl tlaků $p_1 - p_2 = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$. Jak velká je rychlost v_2? Vzduch považujte za nestlačitelný (jinak ideální) plyn o hustotě $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Terka se fénovala.

Z Bernoulliho rovnice ihned máme

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2\frac{p_1 - p_2}{\rho}}\,.$$

Číselně $v_2 \doteq 70\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Jakub Vošmera
`kuba@fykos.cz`

Úloha DF ... Kdo neuteče, vyhraje!

Náry a Faleš se potkají v lese, Faleš má v ruce šišku a protože nevidí důvod, proč ji po Nárym nehodit, hodí ji po něm. Náry jeho úmysl vytuší, a tak se ve stejném okamžiku, kdy Faleš šišku hodí šikmým vrhem s elevačním úhlem 40° a s počáteční rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, rozhodne dát do přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu směrem od Faleše. Počáteční vzdálenost Náryho a Faleše je $s_0 = 9\,\mathrm{m}$. Náry i šiška jsou hmotné body pohybující se ve stejné rovině, rovněž rozměry Faleše lze zanedbat. S jakým rovnoměrným zrychlením by Náry určitě neměl utíkat, pokud nechce, aby jej šiška trefila? Výsledek uveďte na tři platné číslice, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Kiki se těší na soustředění.

Úloha se v podstatě ptá na to, s jakým rovnoměrným zrychlením by Náry utíkal, pokud by jej šiška trefila, což představuje situaci, kdy je Náry a šiška ve stejné vzdálenosti s od Faleše v době dopadu šišky. Ze zadaných údajů lze určit jak dobu letu šišky t (což je i doba Náryho běhu)

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\,,$$

tak vzdálenost s, kterou šiška urazí (což je vzdálenost, kterou urazí Náry, bez 9 m),

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\,.$$

Pak už jen stačí tyto výrazy dosadit do rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = s_0 + at^2/2$, vyjádřit zrychlení a, dopočítat číselný výsledek a dozvíme se, že pokud Náry nechce být trefen šiškou, neměl by utíkat se zrychlením

$$a = \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{s_0 g^2}{2v_0^2 \sin^2\alpha} \doteq 1{,}21\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha DG ... došla ropa

Z neznámých důvodů došla lidem ropa, tak se na pumpách místo benzínu kupovaly roztočené válce, které se používaly na pohon aut. Standardní válec byl homogenní, měl poloměr $r = 0{,}7\,\mathrm{m}$, délku $l = 1{,}0\,\mathrm{m}$, hmotnost $m = 940\,\mathrm{kg}$ a byl roztočený na úhlovou rychlost $\omega = 60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ kolem své osy symetrie. Auto má hmotnost $M = 2\,500\,\mathrm{kg}$, příčný průřez $S = 2{,}5\,\mathrm{m^2}$, koeficient odporu $C = 0{,}1$ a účinnost $\eta = 30\,\%$. Chceme s autem ujet vzdálenost $d = 10\,\mathrm{km}$ (přibližně 20 Karlových mostů) na vodorovné silnici konstantní rychlostí $v = 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Rozjezd a brzdění auta zanedbejte. Nejméně kolik válců máme koupit? Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}29\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Jakub aproximoval mačku s chlebom a maslom za valec.

Předpokládáme, že rotační energie válců se použije s účinností η na překonání odporové síly po délce d. Rotační energie jednoho válce je

$$E_1 = \frac{1}{2} I\omega^2\,,$$

kde $I = mr^2/2$ je moment setrvačnosti válce. Odporová síla má velikost

$$F = \frac{1}{2} C\varrho S v^2\,.$$

Práce vykonaná proti této síle po dráze d bude $W = Fd$. Máme N válců s energií NE_1. Potom pro účinnost můžeme psát

$$\eta = \frac{W}{NE_1}\,.$$

Dosadíme a vyjádříme

$$N = \frac{2C\varrho S v^2 d}{\eta m r^2 \omega^2} \doteq 8{,}1\,.$$

Nás zajímal minimální počet, což bude 9.

Jakub Kocák
`jakub@fykos.cz`

Úloha DH ... odporné teplo

Byl tropický den a Žužu přivádělo k zoufalství, že neví, jak moc je teplo. Tak si vzala rezistor, strčila ho do chladničky, kde byla teplota $t_1 = 6\,{}^\circ\mathrm{C}$, a naměřila velikost odporu $R_1 = 320\,\Omega$. Potom vložila rezistor do vařící vody ($t_2 = 100\,{}^\circ\mathrm{C}$) a naměřila velikost odporu $R_2 = 370\,\Omega$. Potom nechala rezistor vychladnout na okolní teplotu a naměřila odpor $R_3 = 336\,\Omega$. Žužu už byla spokojená. Jaká byla okolní teplota? Předpokládejte lineární závislost odporu na teplotě.

Jakub jezdil električkou.

Podle zadání máme uvažovat lineární závislost odporu na teplotě. Znamená to také, že opačně teplota závisí lineárně na naměřeném odporu

$$t = A + BR\,.$$

Koeficienty A a B získáme ze dvou známých teplot pro dva odpory, aby platilo

$$t_1 = A + BR_1\,,$$
$$t_2 = A + BR_2\,.$$

Výsledná lineární závislost potom vypadá takto

$$t = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{R - R_1}{R_2 - R_1}\,,$$

což můžeme ověřit dosazením hodnot R_1 a R_2 za R. Dosazením odporu R_3 určíme okolní teplotu

$$t_3 = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{R_3 - R_1}{R_2 - R_1} \doteq 36\,{}^\circ\mathrm{C}\,.$$

Jakub Kocák
`jakub@fykos.cz`

Úloha EA ... elektroskopové kuličky

Máme dvě malé izolující kuličky, přičemž každá je zavěšena na tenkém vlákně délky $l = 100\,\mathrm{cm}$ vyrobeném z dokonale izolujícího materiálu. Hmotnost každé kuličky je m. Obě vlákna jsou připevněná v jednom bodě a kuličky visí v místě s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Víme, že obě kuličky jsou rovnoměrně nabité stejným nábojem $Q = 200\,\mathrm{nC}$, a proto jsou od sebe ve vzdálenosti $d = 80\,\mathrm{cm}$. Jaký náboj musíme z každé kuličky odebrat, aby se jejich vzdálenost snížila na polovinu? Z obou kuliček odebíráme stejně velký náboj.

Karel si málo cvrnkal s kuličkami, když byl malý.

Na počátku je na obou kuličkách stejný náboj a jsou jako kyvadla obě vychýleny o stejný úhel α ze svislé polohy. Úhel, o jaký jsou vychýleny, můžeme jednoduše spočítat, protože platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{g}}\,,$$

kde F_e je elektrická síla a F_g tíhová síla. Za tyto síly můžeme dosadit ze známých vztahů

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}}{mg}\,,$$

kde ε_0 je permitivita vakua a g je tíhové zrychlení. Stejně tak si můžeme vyjádřit tento úhel (tentokrát ho označíme β) po odebrání náboje

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2}{d^2}}{mg}\,,$$

kde q jsme označili náboj, který na kuličce zůstane. Úhly α a β, resp. jejich tangenty, si můžeme vyjádřit také pomocí délky závěsu a vzdálenosti kuliček. Nejprve si ovšem musíme pomocí Pythagorovy věty spočítat délku odvěsny přilehlé k úhlu. Pro α to bude $\sqrt{l^2-(d/2)^2}$ a pro β je tato délka $\sqrt{l^2-(d/4)^2}$. Dostáváme tedy druhé vyjádření tangenty

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2\sqrt{l^2-(d/2)^2}}\,,\qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{4\sqrt{l^2-(d/4)^2}}\,.$$

Obě vyjádření dejme do podílu. Po pár úpravách dostáváme výsledek:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{d}{2\sqrt{l^2-(d/2)^2}}}{\frac{d}{4\sqrt{l^2-(d/4)^2}}} = 2\sqrt{\frac{l^2-(d/4)^2}{l^2-(d/2)^2}}\,,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}}{mg}}{\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2}{d^2}}{mg}} = \frac{Q^2}{4q^2}\,,$$

a tedy

$$q = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2-(d/2)^2}{l^2-(d/4)^2}}} = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\frac{l^2-(d/2)^2}{l^2-(d/4)^2}}\,.$$

Získali jsme tedy téměř kýžený výsledek. Abychom odpověděli na otázku, jaký náboj musí být odebrán, stačí provést rozdíl

$$\Delta Q = Q - q = Q\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\frac{l^2-(d/2)^2}{l^2-(d/4)^2}}\right) \doteq 132\,\mathrm{nC}\,.$$

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EB ... ale proč dva?

Máme dvě rovnoběžná zrcadla s hmotností $m = 5\,\mathrm{g}$ ve vakuu naproti sobě. Světelný paprsek s vlnovou délkou $\lambda_0 = 450\,\mathrm{nm}$ se postupně odrazí od obou zrcadel. Po druhém odrazu bude mít vlnovou délku λ. Určete $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$. Uvažujte, že se fotony pružně odrážejí od zrcadel.

Xellos hrál Fish Fillets.

Vezmeme si jedno zrcadlo a foton s hybností (ve směru osy x kolmé na zrcadlo) p, který se od něho odrazí. Po odrazu bude mít hybnost $-(p-\Delta p)$, a zrcadlo bude mít hybnost p_z. Ze zákona zachovaní hybnosti v směru osy x máme

$$p = p_\mathrm{z} - p + \Delta p$$

a ze zákona zachovaní mechanické energie při odrazu (energie fotonu s hybností p je pc)

$$pc = (p - \Delta p)c + \frac{p_z^2}{2m}\,.$$

Z těchto rovnic vyjádříme

$$c\Delta p = \frac{p_z^2}{2m} = \frac{(2p - \Delta p)^2}{2m}$$

a jelikož zrcadlo je o dost těžší než foton, můžeme čekat, že $\Delta p \ll p$ a psát

$$(2p - \Delta p)^2 = 4p^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{2p}\right)^2 \approx 4p^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)\,,$$

takže

$$c\Delta p \approx \frac{2p^2}{m}\left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{2p^2}{m} - \frac{2p\Delta p}{m} \quad\Rightarrow\quad \Delta p = \frac{2p^2}{mc + 2p}\,.$$

Ve jmenovateli výrazu pro Δp můžeme zase zanedbat $2p$ proti mc a dostáváme

$$\Delta p = \frac{2p^2}{mc}\,.$$

Pro dvě zrcadla potřebujeme jen použít tento vzorec dvakrát za sebou, přičemž před prvním odrazem je hybnost fotonu $p_0 = h/\lambda_0$. Přitom můžeme využít, že hybnost p_1 po prvním odrazu bude přibližně rovna p_0, čili hybnost při každém odrazu klesne přibližně o stejnou hodnotu. Potom je po druhém odraze hybnost

$$p_2 = p_0 - \frac{4p_0^2}{mc} = \frac{h}{\lambda} \quad\Rightarrow\quad \frac{4p_0^2}{mc} = p_0 - p_2 = \frac{h\Delta\lambda}{\lambda\lambda_0} \approx \frac{h\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\,,$$

a tedy

$$\Delta\lambda = \frac{4h}{mc} \doteq 1{,}8 \cdot 10^{-39}\,\mathrm{m} = 1{,}8 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{nm}\,,$$

což dokonce nezávisí na λ_0. Odtud je rovněž zřejmé, že všechny aproximace byly opodstatněné.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

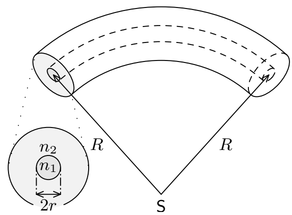
Úloha EC ... vlnovod

Určete, jaký poloměr R (viz obrázek) by musela mít kruhová smyčka na optickém kabelu, aby se každý vedený paprsek dostal z jádra o poloměru $r = 0{,}3\,\mathrm{cm}$ s indexem lomu $n_1 = 1{,}7$ do obalu kabelu s indexem lomu $n_2 = 1{,}5$. *Mirek řešil problémy s připojením.*

Uvažujme případ, kdy paprsek vedený vlnovodem bude v jednom místě smyčky tečný k vnitřní kružnici, jak je nakresleno na obrázku. (Takový případ určitě někdy nastane.) Ze Snellova zákona plyne, že minimální úhel β od kolmice, při kterém se paprsek ještě odrazí, je dán vztahem Z obrázku můžeme vyjádřit

$$\sin\beta = \frac{n_2}{n_1}\sin\frac{\pi}{2}\,.$$

$$\sin\beta = \frac{R - r}{R + r}$$



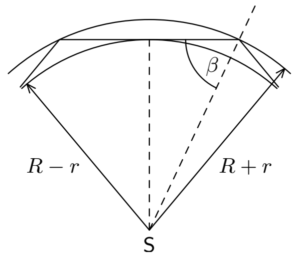
Obr. 4: Vlnovod

a porovnáním uvedených vztahů dostaneme poloměr

$$R = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} r = 4{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

V prvním přiblížení bychom tedy museli na optickém kabelu vytvořit smyčku o poloměru 4,8 cm a menším, aby se vedený paprsek dostal mimo jádro kabelu.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`



Obr. 5: Chod paprsku vlnovodem

Úloha ED ... blížení elektronu

Kolikrát by se musela zvýšit gravitační konstanta G (z Newtonova vztahu pro gravitační sílu), abychom mohli pohyb elektronu ve vodíku ^{1}H (Bohrův model) považovat za pohyb po kruhové dráze s poloměrem o 10 % menším než ve skutečnosti? Uvažujte, že konstanta k v elektromagnetické síle se nezmění. *Karel uvažoval, jak zkombinovat astrofyziku a jadernou fyziku.*

Pre atóm vodíka používame Bohrov model. Podľa neho sa elektrón s hmotnosťou m_e pohybuje okolo protónu s hmotnosťou m_p po kruhovej dráhe s polomerom r rýchlosťou v. Moment hybnosti elektrónu potom môže nadobúdať len hodnoty

$$L = m_\mathrm{e} v r = n\hbar \tag{1}$$

pre $n \in \mathbb{N}$. Elektrón a protón majú náboje $-e$ a e.

Na elektrón pôsobia odstredivá, elektrická (Coulombova) a gravitačná sila. Pri pohybe po kružnici nastáva rovnováha síl

$$\frac{m_\mathrm{e} v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} + \frac{G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}}{r^2}\,, \tag{2}$$

dosadením za v z (1) potom dostaneme

$$\frac{n^2\hbar^2}{m_\mathrm{e} r^3} = \frac{ke^2}{r^2} + \frac{G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}}{r^2}\,,$$

z čoho vyjadríme

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{m_\mathrm{e}(ke^2 + G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p})}\,. \tag{3}$$

Nás ale zaujíma G', pre ktorú by (pre ten istý elektrón, teda pri rovnakom n) bol polomer $r' = 9r/10$. Na to, aby sme ju zistili, stačí použiť rovnicu (3) raz pre G, raz pre G' a upraviť

$$\frac{9}{10}\frac{n^2\hbar^2}{m_\mathrm{e}(ke^2 + G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p})} = \frac{n^2\hbar^2}{m_\mathrm{e}(ke^2 + G' m_\mathrm{e} m_\mathrm{p})}$$

$$9(ke^2 + G' m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}) = 10(ke^2 + G m_\mathrm{e} m_\mathrm{p})$$

$$G' = \frac{ke^2}{9 m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}} + \frac{10}{9} G\,,$$

čo po dosadení tabuľkových hodnôt dá výsledok $G'/G = 2{,}52 \cdot 10^{38}$. Vidíme, že ide o strašne veľké číslo. Dôvod je ten, že gravitačná sila je (pre G) oveľa menšia ako elektrická, a konštantu G musíme zväčšiť tak, aby vôbec začala byť podstatná.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha EE ... dobře vybavená laborka

Máme k dispozici ideální cívku s indukčností $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$ a ideální kondenzátor s kapacitou $C = 10\,\mathrm{\mu C}$. Chceme sestavit sériový RLC obvod s impedancí $Z = 200\,\Omega$, ale v naší laborce se bohužel zrovna nenachází vhodný rezistor. Máme ovšem k dispozici velké množství měděného drátu o průměru $d = 0{,}6\,\mathrm{mm}$. Jak dlouhý drát budeme muset do obvodu zapojit? Frekvence zdroje je $f = 50\,\mathrm{Hz}$, rezistivita mědi je $\varrho = 1{,}69 \cdot 10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$.

Mirek má špatné zkušenosti z laborek na střední.

Vzorec pro impedanci RLC obvodu můžeme považovat za tabulkovou záležitost, nebo si spočíst

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + \mathrm{j}\omega L - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}\,,$$

$$Z \equiv |\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

(samozřejmě můžeme použít místo komplexních čísel fázorový diagram). Ze zadání známe frekvenci f, takže vyjádříme $\omega = 2\pi f$. Odpor vodiče je popsán vztahem $R = \varrho l/S$, kde S je obsah průřezu drátu. Stačí nám tedy dosadit do vzorce pro impedanci a vyjádřit délku l. Dostaneme

$$l = \frac{\pi d^2}{4\varrho}\sqrt{Z^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \doteq 1\,980\,\mathrm{m}\,.$$

Zjistili jsme, že chybějící rezistor můžeme nahradit dvěma kilometry měděného drátu. Nezbývá než doufat, že je izolovaný.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha EF ... střelecké perpetuum mobile

Mějme dlouhou dřevěnou tyč o délce $l = 2\,\mathrm{m}$ s krátkými tyčkami uprostřed na její zavěšení tak, aby byla přesně uprostřed podepřená, ale aby se mohla volně otáčet okolo svého středu a byl k ní zdola přístup. Střelíme-li do této tyče o hmotnosti $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ zdola přesně doprostřed puškou, vyletí do výšky $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (kulka v ní zůstane) a vůbec se neroztočí. Pokud pušku kousek posuneme, tyč nejenže vyletí, ale také se roztočí kolem svého středu.

Pokud se tyč roztočí kolmo na svoji délku s frekvencí otáčení $f = 0{,}8\,\mathrm{Hz}$, o kolik více procent kinetické *energie jsme ze střely vytěžili? Používejte hodnotu tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Hmotnost kulky je řádově menší než hmotnost tyče.*

Vojta si propočítával video Bullet Block Experiment z jůtůbu.

Ze zákona zachování hybnosti plyne, že rychlost těžiště tyče bude v obou případech (bez rotace a s rotací) po zásahu kulkou stejná. Těžiště rotující tyče tedy vyletí taktéž do výšky h. Kinetická energie translačního pohybu těžiště tyče je rovna potenciální energii v bodu obratu, tj. $T_{\text{trans}} = mgh$. Rotační energie je

$$T_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{6}\pi^2 f^2 m l^2 \,,$$

kde jsme dosadili $I = ml^2/12$ za moment setrvačnosti tyče kolem středu a $\omega = 2\pi f$ za úhlovou rychlost. Výtěžek kinetické energie se tedy zvýší o

$$\frac{T_{\text{rot}}}{T_{\text{trans}}} \cdot 100\,\% \doteq 29\,\% \,.$$

Nejedná se přitom o žádný prohřešek proti zákonu zachování energie, protože v prvním případě se pouze větší část kinetické energie kulky přeměnila na teplo.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Úloha EG ... tání ledu

Ledová kulička o poloměru $r = 1\,\mathrm{mm}$ a s teplotou $T_k = -0{,}01\,^\circ\mathrm{C}$ se nachází v prostředí o teplotě $T_o = 2\,^\circ\mathrm{C}$. Za jak dlouho začne kulička tát? Uvažujte pouze přenos tepla zářením. Kulička i okolí jsou absolutně černé a kulička dobře vede teplo. *Peter tavil železo.*

Výkon vyzařovaný z kuličky je $P_\mathrm{k} = \sigma S T_\mathrm{k}^4$. Výkon přijímaný kuličkou z okolí je $P_\mathrm{o} = \sigma S T_\mathrm{o}^4$, kde $S = 4\pi r^2$ je obsah povrchu kuličky, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a teploty jsou v kelvinech. Jejich rozdíl je roven celkovému výkonu, který zůstává v kuličce

$$P = P_\mathrm{o} - P_\mathrm{k} = \sigma S \left(T_\mathrm{o}^4 - T_\mathrm{k}^4\right) \,.$$

Na to, aby kulička začala tát, potřebuje přijmout teplo[1]

$$Q = c_\mathrm{l} m \Delta T = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho c_\mathrm{l} \Delta T \,,$$

kde $\Delta T = 0{,}01\,\mathrm{K}$, $c_\mathrm{l} \doteq 2\,108\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita ledu a $\varrho \doteq 917\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota ledu za normálních podmínek (atmosférický tlak, $0\,^\circ\mathrm{C}$). Čas potřebný k přijetí skupenského tepla tání tedy je[2]

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{r \varrho c_\mathrm{l} \Delta T}{3\sigma\left(T_\mathrm{o}^4 - T_\mathrm{k}^4\right)} \doteq 0{,}69\,\mathrm{s} \,.$$

Peter Ondáč
`ondac@fykos.cz`

[1] Kulička dobře vede teplo, takže uvažujeme, že teplota je všude v kuličce stejná.

[2] Výkon P se pro teploty $-0{,}01\,^\circ\mathrm{C}$ a $0\,^\circ\mathrm{C}$ změní asi o 0,25%, takže ho můžeme s velkou přesností považovat za konstantní.

Úloha EH ... nedotýkej se mě!

Dvě vodivé kuličky o poloměrech $r_1 = 2r_2$ a shodné velikosti plošné hustoty náboje σ se ve vzdálenosti $d \gg r_1$ přitahují silou $F_1 = 10\,\mathrm{N}$. Poté kuličky spojíme dlouhým tenkým vodičem. Jak velká síla F_2 mezi nimi bude působit nyní? Její směr vyjádřete znaménkem − pro přitažlivou a + pro odpudivou sílu. *Nejjednodušší úloha, kterou Mirek dokázal vymyslet.*

Označme náboj na druhé kuličce $Q_2 = \sigma S_2$, kde S_2 je povrch kuličky. Na první kuličce je potom náboj $Q_1 = -\sigma S_1 = -4\sigma S_2 = -4Q_2$. Znaménko je opačné, protože síla je přitažlivá. Po propojení dojde k výměně náboje. Původní náboje se sečtou a rozdělí mezi kuličky v závislosti na jejich poloměru tak, aby měly obě kuličky stejný potenciál. Pro nové náboje Q'_1, Q'_2 platí

$$\frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{r_1}{r_2} = 2\,,$$

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = -3Q_2\,,$$

z čehož plyne

$$Q'_1 = -2Q_2\,, \quad Q'_2 = -Q_2\,.$$

Jestliže na kuličky před spojením působila síla

$$F_1 = k\frac{-4Q_2^2}{d^2} = -10\,\mathrm{N}\,,$$

bude na ně potom působit síla

$$F_2 = k\frac{2Q_2^2}{d^2} = -\frac{1}{2}F_1 = 5\,\mathrm{N}\,.$$

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FA ... pružná voda z vesmírné stanice

Koule vody v klidu ve vzduchu ve stavu beztíže (například na Mezinárodní vesmírné stanici) je vyrušena šťouchnutím. Šťouchnutí rozpohybuje těžiště vodního útvaru rychlostí $2\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ a způsobí v něm objem zachovávající oscilace mezi tvarem zploštělého a protáhlého elipsoidu. Oscilace jsou takové, že oproti svému původnímu poloměru se vodní útvar protáhne nejvíc o 10 %.

Jakou celkovou kinetickou energii předalo šťouchnutí kouli vody? Plocha protáhlého elipsoidu o hlavních poloosách $a = b$ (kratší) a c (delší) je pro malé protažení přibližně $S = 4\pi a^2(1 + 2c/a)/3$. Objem vody je $V_0 = 500\,\mathrm{ml}$, její hustota $\varrho = 0{,}998\,\mathrm{kg\cdot l^{-1}}$ a její povrchové napětí při daných podmínkách $\sigma = 72{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. *Vojta sledoval videa ISS na jůtůb.*

Kinetická energie translačního pohybu těžiště útvaru je $T_{\mathrm{tr}} = \varrho V_0 v^2/2 = 99{,}8\,\mathrm{\mu J}$.

Když si uvědomíme, že při maximálním protažení se kmit zastaví a elipsoid se pak zase začne zplošťovat, zjistíme, že všechna energie oscilace musí být v okamžik maximálního protažení v povrchovém napětí, tj. $T_{\mathrm{osc}} = E_{\max} = \sigma\Delta S_{\max}$, kde ovšem musíme odečítat původní povrchové napětí koule před šťouchnutím. Lze snadno ověřit, že v případě koule je $S_0 = \sqrt[3]{36\pi V_0^2}$. Ze zachování objemu víme, že

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi a^2 c = \frac{4}{3}\pi r_0^3\,,$$

kde r_0 je původní poloměr vodní koule. Pro maximálně prodloužený elipsoid také platí $c_{\,\mathrm{max}} = 1{,}1 r_0$ a ze zachování objemu tedy získáme $a = r_0/\sqrt{1{,}1}$.

Aplikací přibližného vztahu pro povrch elipsoidu získáváme

$$S_{\mathrm{max}} = \frac{4}{3\cdot 1{,}1}\pi r_0^2 \left(1 + 2(1,1)^{3/2}\right) = \frac{S_0}{3{,}3}\left(1 + 2(1{,}1)^{3/2}\right) .$$

Pro změnu povrchu tedy po úpravě dostáváme

$$\Delta S = \frac{\sqrt[3]{36\pi V_0^2}}{3{,}3}\left(1 + 2(1{,}1)^{3/2} - 3{,}3\right) .$$

Po dosazení V_0 ve správných jednotkách a vynásobením σ dostáváme $T_{\mathrm{osc}} \doteq 4{,}97\,\mu\mathrm{J}$ a po sečtení s energií translačního pohybu dostáváme po zaokrouhlení na správný počet cifer celkovou kinetickou energii $T \doteq 105\,\mu\mathrm{J}$.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Úloha FB ... skoromethan

Jaká je potenciální energie soustavy pěti bodových nábojů, kde čtyři z nich o velikosti q tvoří vrcholy pravidelného tetraedru o straně délky a a v těžišti tetraedru je bodový náboj o velikosti $-q$? Potenciál uvažujte v nekonečnu nulový.

Tomáš Bárta si četl na záchodě noviny a v tu ránu ho to napadlo!

Mějme rovnostranný trojúhelník jako podstavu tetraedru. Nejprve nás bude zajímat vzdálenost těžiště tohoto trojúhelníka od jeho vrcholů. Víme, že výška rovnostranného trojúhelníka o straně a je $a\sqrt{3}/2$ a těžiště bude ležet ve třetině výšky, takže vzdálenost každého z vrcholů trojúhelníka od jeho těžiště je

$$d = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a .$$

Nyní můžeme dopočítat výšku tetraedru, jelikož jeho čtvrtý bod bude ležet přesně nad těžištěm.

$$v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}a .$$

Dále víme, že i těžiště tetraedru bude ležet nad těžištěm podstavy. Využijeme definici těžiště

$$\boldsymbol{r_T} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r_i} .$$

V našem případě mají všechny body stejnou váhu, můžeme tedy uvažovat $m_i = 1$ a $M = 4$. Pokud budeme uvažovat, že podstava leží v rovině $z = 0$, tak bude z-ová složka $\boldsymbol{r_T}$ rovna čtvrtině výšky tetraedru. Pro výšku těžiště tedy platí

$$h = \frac{1}{4}v = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

a pro vzdálenost těžiště od vrcholů tetraedru (poloměr kružnice opsané) platí

$$r = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a\,.$$

Nyní začneme do bodů tetraedru umisťovat bodové náboje o velikosti q. Dva náboje budou mít energii kq^2/a. Když do třetího bodu z nekonečna přiblížíme třetí náboj, vykonáme práci $2kq^2/a$ a při přibližování čtvrtého náboje vykonáme práci $3kq^2/a$. Při umístění náboje $-q$ do středu naopak energii ztratíme, a to

$$4k\frac{q^2}{a\sqrt{6}/4}\,.$$

Celková energie tedy bude

$$E = (1+2+3)k\frac{q^2}{a} - 4k\frac{q^2}{a\sqrt{6}/4} = \left(6 - \frac{16}{\sqrt{6}}\right)k\frac{q^2}{a}\,.$$

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz

Úloha FC ... obecná planetka

Mějme družici, která obíhá své slunce o hmotnosti M po eliptické dráze s hlavní poloosou a s numerickou excentricitou ε. Gravitační konstantu značíme G. Vyjádřete obecně rychlost družice v_p v perihelu (přísluní) v závislosti na a, ε, G a M.

Poznámka k excentricitě: Numerickou excentricitou rozumíme $\varepsilon = e/a$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, kde b je vedlejší poloosa dráhy. *Karel si hrál s planetami.*

Začneme s tím, že si pomocí druhého Keplerova zákona, zákona ploch, vyjádříme vztah rychlostí v afelu v_a a v perihelu. V perihelu je vzdálenost od slunce $a_\mathrm{p} = a\,(1-\varepsilon)$ a v afelu $a_\mathrm{a} = a\,(1+\varepsilon)$, jak snadno nahlédneme z geometrie elipsy.

$$v_\mathrm{a} a_\mathrm{a} = v_\mathrm{p} a_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{a} = v_\mathrm{p}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,.$$

To jsme si připravili vztah mezi dvěma body na dráze družice. Sice možná zatím není zřejmé proč, ale vzápětí zjistíme, že když si matematicky zapíšeme i zákon zachování mechanické energie pro stejné body na dráze, pak budeme moci právě za v_a dosadit předchozí vztah. Nyní již samotný zákon zachování mechanické energie, kde m je hmotnost družice

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - G\frac{mM}{a_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - G\frac{mM}{a_\mathrm{a}}\,.$$

Rovnici za použití výše uvedených vztahů postupně upravujeme

$$v_\mathrm{p}^2 - \frac{2GM}{a}\frac{1}{1-\varepsilon} = v_\mathrm{a}^2 - \frac{2GM}{a}\frac{1}{1+\varepsilon}\,,$$
$$v_\mathrm{p}^2 - v_\mathrm{a}^2 = \frac{2GM}{a}\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\,,$$
$$v_\mathrm{p}^2\left(1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right) = \frac{2GM}{a}\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}\,,$$
$$v_\mathrm{p}^2\frac{4\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2GM}{a}\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,.$$

Rychlost družice v perihelu je $v_\mathrm{p} = \sqrt{GM\,(1+\varepsilon)\,/\,[a\;(1-\varepsilon)]}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FD ... pružinkotyčový závěs

Máme soustavu tvořenou nehmotnou pevnou tyčí AB, pružinou BC a závažím o hmotnosti m na provázku BD v uspořádání, které vidíte na obrázku.

Provázek a tyč považujte za dokonale tuhé objekty. Délka pružiny v nenatažené formě je $2l$. Pokud přímo na pružinu zavěsíme (mimo toto uspořádání) závaží o hmotnosti m v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením g, pak se protáhne přesně o l. Délka tyče je $5l$. Jaký bude úhel $\sphericalangle$BAC, pokud je soustava upevněna v bodech A a C k pevné svislé zdi v homogenním tíhovém poli g a závaží necháme v klidu viset? Vzdálenost |AC| bodů upevnění je $4l$.

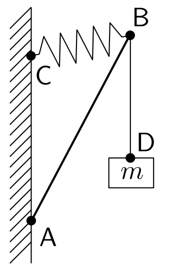
Zanedbejte hmotnosti pružiny, tyče i provázku. Zanedbejte vztlak. (Body upevnění jsou samozřejmě otočné, ale jinak pevné.)

Karel si říkal, co tak Dominika v inženýrství asi může řešit...

Nejdříve zjistíme tuhost pružiny. Protáhne-li se pružina o l po zavěšení závaží o hmotnosti m, pak pro její tuhost k máme $k = mg/l$.

Označme $x = |\mathrm{BC}|$, $\alpha = \sphericalangle\mathrm{BAC}$ a $\beta = \sphericalangle\mathrm{ABC}$. Aby byla soustava v rovnováze, musí být v bodě B velikost složky síly pružinky kolmé na tyčku rovna velikosti složky tíhové síly závaží kolmé na tyčku, neboli

$$mg\sin\alpha = k\,(x-2l)\sin\beta = \frac{mg}{l}\,(x-2l)\sin\beta\,,$$
$$\sin\alpha = \left(\frac{x}{l} - 2\right)\sin\beta,$$



Obr. 6: Pružinkotyčový závěs.

kde ze sinové a kosinové věty píšeme

$$\sin\beta = \frac{4l}{x}\sin\alpha\,,$$
$$x = l\sqrt{41 - 40\cos\alpha}\,.$$

Dosazením za $\sin\beta$ a x tedy máme

$$1 = 4\left(1 - \frac{2l}{x}\right) = 4\left(1 - \frac{2}{\sqrt{41-40\cos\alpha}}\right)\,,$$

odkud ihned dostaneme $\cos\alpha = 61/72$, neboli $\alpha \doteq 32^\circ 5'$.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha FE ... dvojlinka reloaded

Měděný vodič poloměru $b = 1\,\mathrm{mm}$ hustě natáčíme na papírový válec o poloměru $a = 2\,\mathrm{cm}$. Jaká je minimální délka natočeného drátu, aby při připojení na zásuvku nevyrazil jističe na proud $10\,\mathrm{A}$. Napětí v zásuvce je $U = 230\,\mathrm{V}$, frekvence $f = 50\,\mathrm{Hz}$, měrná vodivost mědi je $\varrho = 17\,\mathrm{n\Omega{\cdot}m}$. Vzniklou cívku můžete považovat za solenoid. *Lukáš motal drát na prst.*

Naši měděnou cívku si můžeme představit jako ideální cívku o indukčnosti L spojenou sériově s rezistorem o odporu R. Připojíme-li ji ke střídavému napětí o efektivní hodnotě U, bude obvodem procházet proud o efektivní hodnotě $I = U/\sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$.

Označme s délku namotaného drátu. Potom pro počet závitů platí $N = s/(2\pi a)$. Rovněž, pokud l je délka takto vzniklého solenoidu, bude $l = 2bN$. Z Ampérova zákona potom pro indukční tok solenoidem máme

$$\Phi = N\pi a^2 \frac{\mu_0 N I}{l} = \frac{\mu_0 a s}{4b} I\,,$$

kde I je proud tekoucí solenoidem. Můžeme tedy odečíst indukčnost

$$L = \frac{\mu_0 a s}{4b}\,.$$

Odpor navinutého drátu pak jednoduše spočteme jako $R = (\varrho s)/(\pi b^2)$. Pokud máme mít $I < I_{\mathrm{krit}}$, pak tedy musíme mít

$$s > s_{\mathrm{krit}} = \frac{U}{I_{\mathrm{krit}}\sqrt{\left(\frac{2\pi f \mu_0 a}{4b}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{\pi b^2}\right)^2}}\,.$$

Číselně $s_{\mathrm{krit}} \doteq 4\,000\,\mathrm{m}$.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha FF ... mapy.cz

Rovnoměrně (spojitě) otáčíme kolečkem myši úhlovou rychlostí ω a zoomujeme (in) mapu. Považujte Zemi za rovinu a určete závislost rychlosti virtuální kamery na čase. Při jedné otočce kolečka se měřítko zmenší dvakrát a na počátku se kamera nachází ve výšce h_0.
Michal viděl málo.

Rozměr zobrazeného území dle zadání závisí na čase jako

$$l(t) = l_0 2^{-\omega t/(2\pi)}\,,$$

kde l_0 je nějaká referenční délka (šířka či výška obdélníkového výřezu mapy, který se nám zobrazuje). Z podobnosti trojúhelníků pak plyne obdobná závislost pro výšku kamery nad povrchem

$$h(t) = h_0 2^{-\omega t/(2\pi)}\,.$$

Nás zajímá rychlost, čili výše uvedený výraz zderivujeme dle času a dostáváme

$$v(t) = -\frac{h_0 \omega \ln 2}{2\pi} 2^{-\omega t/(2\pi)} \,.$$

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha FG ... vodivé kolečko

Uvažujte vodivý disk o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$ a poloměru $a = 10\,\mathrm{cm}$, který se otáčí kolem vlastní osy v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$ (indukční čáry jsou kolmé na rovinu disku a rovnoběžné s osou otáčení). Disk je vodivě spojen s osou, na které se točí s konstantní úhlovou rychlostí $\omega = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$, a ta je pak pomocí drátku a kartáčkového kontaktu zpátky napojena na obvod disku. Má-li soustava celkový odpor $R = 10\,\Omega$, spočtěte proud, který jí prochází. Uvažujte, že proud teče pouze radiálně.

Kubovi to opět nedalo a vymyslel druhou úlohu.

Kolečko se za čas $\mathrm{d}t$ otočí o úhel $\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t$ a z pohledu magnetického pole se tedy obsah vodivé plochy změní o

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \pi a^2 = \frac{1}{2} \omega a^2 \mathrm{d}t \,.$$

Časová derivace indukčního toku kolečkem tedy bude $\dot{\Phi} = B\dot{S} = B\omega a^2/2$ a z Faradayova zákona bude velikost napětí v obvodu rovna $U = B\omega a^2/2$. Proud tekoucí obvodem pak bude

$$I = \frac{B\omega a^2}{2R} = 0{,}5\,\mathrm{mA} \,.$$

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha FH ... vodivé kolečko reloaded

Uvažujte vodivý disk o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$ a poloměru $a = 10\,\mathrm{cm}$, který se otáčí kolem vlastní osy v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$ (indukční čáry jsou kolmé na rovinu disku a rovnoběžné s osou otáčení). Disk je vodivě spojen s osou, na které se točí, a ta je pak pomocí drátku a kartáčkového kontaktu zpátky napojena na obvod disku. Soustava má celkový odpor $R = 10\,\Omega$. Roztočíme-li disk úhlovou rychlostí $\omega = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$, spočítejte čas, za který se tato úhlová rychlost zmenší na polovinu. Veškeré tření a odpor prostředí zanedbejte. Uvažujte, že proud teče pouze radiálně.

Kubovi se to zdálo moc jednoduché.

Velikost momentu síly, který působí na kolečko, spočítáme jako

$$M = \int_0^a BIl \mathrm{d}l = \frac{1}{2} BIa^2 \,,$$

kde I je proud procházející kolečkem. Ten spočítáme následovně: kolečko se za čas $\mathrm{d}t$ otočí o úhel $\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t$ a z pohledu magnetického pole se tedy obsah vodivé plochy změní o

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \pi a^2 = \frac{1}{2} \omega a^2 \mathrm{d}t \,.$$

Časová derivace indukčního toku kolečkem tedy bude

$$\dot{\Phi} = B\dot{S} = \frac{1}{2}B\omega a^2$$

a z Faradayova zákona tedy bude velikost napětí v obvodu rovna

$$U = \frac{1}{2}B\omega a^2\,.$$

Proud tekoucí obvodem tedy bude

$$I = \frac{B\omega a^2}{2R}\,.$$

Píšeme tedy pohybovou rovnici

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\omega} = -\frac{1}{2}BIa^2 = -\frac{B^2\omega a^4}{4R}\,,$$

neboli

$$\dot{\omega} = -\frac{B^2a^2}{2Rm}\omega\,,$$

což je rovnice popisující radioaktivní rozpad. A tedy, „poločas přeměny“ bude

$$\tau_{1/2} = \frac{2Rm}{B^2a^2}\ln 2\,.$$

Číselně, $\tau_{1/2} \doteq 23\,\mathrm{min}$.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha GA ... radar

Radarový vysílač v místě M *je klidný vůči vztažné soustavě S', která se pohybuje doprava rychlostí $v = 0{,}2c$ vůči vztažné soustavě S. Vysílač emituje pravidelné radarové pulzy s periodou $\tau_0 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ měřenou v S', které se pohybují rychlostí světla a jsou přijímány v přijímači, který je v klidu v S a nalevo od* M. *Jaký je časový interval τ na přijímači mezi pulzy přicházejícími z vysílače?* *Peter zbožňuje velká písmena.*

Časový interval mezi pulzy vysílanými z vysílače měřený vzhledem k S je

$$t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Vzdálenost mezi dvěma pulzy přicházejícími z vysílače vzhledem k S je $tv + tc$, a tedy časový interval τ na přijímači mezi pulzy přicházejícími z vysílače je

$$\tau = \frac{tv+tc}{c} = \frac{\tau_0(v+c)}{\sqrt{c^2-v^2}} = \tau_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,.$$

Peter Ondáč
ondac@fykos.cz

Úloha GB ... nepříjemná propast

Máme nekonečnou tenkou desku s plošnou hustotou $\sigma = 1{,}17 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ a v ní velmi malou dírku. Do dírky svisle hodíme kámen rychlostí $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Vrátí se kámen v konečném čase zpátky? Pokud ano, za jaký čas se to stane? *Xellos hrál Fish Fillets.*

Deska je nekonečná, proto bude intenzita gravitačního pole v každém bodě záviset pouze na vzdálenosti tohoto bodu od desky a bude směřovat kolmo na desku. Aplikujme Gaussův zákon pro válec, jehož středem prochází deska rovnoběžně s podstavami; plocha každé podstavy je S. Tok intenzity gravitačního pole pláštěm válce je nulový, intenzita E na podstavách je na ně kolmá a konstantní, proto platí

$$2SE = 4\pi G S\sigma \quad \Rightarrow \quad E = 2\pi G\sigma\,,$$

čili kámen bude přitahovaný k desce konstantním zrychlením $a = E = 2\pi G\sigma$ a je jasné, že se vrátí. Celkový čas letu je potom

$$T = \frac{2v}{a} = \frac{v}{\pi G\sigma} \doteq 4{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha GC ... rakety

Dvě stejné kosmické lodi A *a* B *se od sebe v čase $t = 0$ (čas budeme měřit v soustavě těžiště obou lodí) rozlétly opačnými směry, každá rychlostí o velikosti v. V čase $t = t_0$ vyšle loď* A *směrem k lodi* B *světelný signál. Loď* B *okamžitě odpoví, přičemž odpověď se zpět k lodi* A *dostane v čase $t = 3t_0$. Vypočtěte v v násobcích c.* *Kuba stále nemá dost.*

Pohyb raket si zakreslíme do grafu (x, ct) (tzv. prostoročasový diagram), kde rakety vylétávají z bodu $(0, 0)$ v opačných směrech x. Přímky znázorňující pohyb raket mezi sebou svírají úhel 2φ a každá svírá úhel φ s osou ct. Potom zřejmě $v/c = \operatorname{tg}\varphi$. Světelné signály se v našem obrázku pohybují po přímkách se sklonem $\pi/4$. Vepíšeme-li tedy do rovnoramenného trojúhelníku určeného body $(0, 0)$, $(3vt_0, 3ct_0)$ a $(-3vt_0, 3ct_0)$ pravoúhlý trojúhelník jako na obrázku, bude to přesně odpovídat naší situaci. Z jednoduché geometrie pak máme

$$\frac{b}{\sin 2\varphi} = \frac{a}{\sin\alpha}\,,$$

kde $b = 2a\sin\alpha$ a $\alpha = \frac{\pi}{4} - \varphi$. Po zřejmých úpravách máme, že

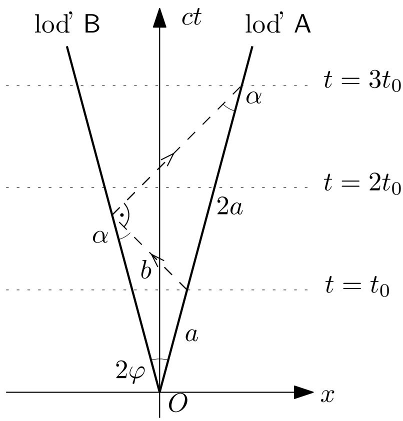
$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 2\left(\frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - 2\cos\varphi\sin\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$$

neboli

$$4\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi\,.$$

Řešíme tedy kvadratickou rovnici pro $\operatorname{tg}\varphi$, vybereme fyzikální kořen $0 \leq \operatorname{tg}\varphi < 1$ a dostaneme výsledek $v = \left(2 - \sqrt{3}\right) c \doteq 0{,}268c$.

Jakub Vošmera
`kuba@fykos.cz`



Obr. 7: Pohyb raket v prostoročasovém diagramu.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.