

Úvodem

Drazí FYKOSáci,

je tu předposlední série FYKOSu, takže můžete znovu řešit rozličné fyzikální úlohy. Někteří vyvolení z vás, kterým se dařilo v první polovině ročníku, se můžou těšit na jarní soustředění, o němž jistě jednou budou vyprávět pravnoučatům. Ostatní nemusí být smutní, protože mohou stále získávat body na příští soustředění. Upřímně vám všem přejeme hodně dobrých nápadů, někteří z nás jsou poměrně líní a správná řešení se mnohem lépe opravují.

Organizátoři



Zadání V. série



Termín uploadu: 15. 4. 2014 20.00

Termín odeslání: 14. 4. 2014

Úloha V.1 ... natlakovaná žirafa

2 body

Porovnejte krevní tlak v hlavě dospělé žirafy a dospělého člověka. Systolický tlak na úrovni srdce je u člověka $p_{h1} = 120 \text{ mmHg}$ a u žirafy $p_{g1} = 280 \text{ mmHg}$, hustota krve obou živočichů je $\rho = 1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Uvažujte pouze případ, kdy člověk i žirafa stojí. Rychlost proudění krve v těle považujte za konstantní.

Úloha V.2 ... uranová hvězda

2 body

Představme si, že ve hvězdách neprobíhá termojaderná fúze, nýbrž štěpná jaderná reakce. Odhadněte, jak dlouho by taková hvězda dokázala vyzařovat, jestliže na počátku svého životního cyklu sestává pouze z uranu 235, její hmotnost i zářivý výkon jsou přibližně konstantní a odpovídají současným hodnotám pro Slunce.

Úloha V.3 ... ta jemná nádoba

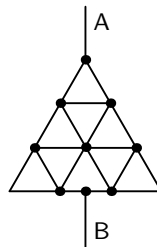
3 body

Mějme válcovou nádobu, jež zaujímá objem $V = 1 \text{ l}$. Nádoba je uzavřena vzduchotěsným pohyblivým pístem, který má nezanedbatelnou hmotnost M . Dále víme, že nádoba je vodorovnými přepážkami rozdělena na n komor a v i -té komoře (číslováno odshora) je $2^i a$ částic, kde a je blíže neurčená konstanta. Přepážky nejsou k nádobě připevněny, přesto nedovolují, aby si komory, v nichž je ideální plyn, vyměňovaly teplo nebo částice. Celý systém je v rovnováze. Poté zdvojnásobíme hmotnost pístu a počkáme, až se náš systém opět ustaví v rovnováze. Jak se změní objem, který plyn v nádobě zaujímá? Atmosferický tlak neuvažujte.

Úloha V.4 ... trojúhelníkový odporník

4 body

Určete odpor trojúhelníku vytvořeného z odporového drátu mezi svorkami A a B, které vidíte na obrázku. Jedna strana malého trojúhelníčku (ze kterých se skládá velký trojúhelník) má odpor R_0 . Odpor přírodních vodičů neuvažujte.

**Úloha V.5 ... hlídání dětí**

5 bodů

Mějme houpačku zavěšenou na dvou svislých lanech délky $l = 1,5$ m na vodorovné tyči o poloměru $r = 4$ cm. Dítěti sedícímu na houpačce udělíme v dolní úvrati takovou rychlost v_0 , aby dítě vykonalo celou otočku kolem horizontální tyče a lana byla během namotávání stále napnutá. Zároveň chceme, aby počáteční rychlost byla nejmenší možná. Určete rozdíl úhlové rychlosti ω_1 houpačky s dítětem po návratu do dolní úvrati a počáteční úhlové rychlosti ω_0 .

Nápověda Pro výpočet odstředivého zrychlení můžete uvažovat, že se dítě pohybuje lokálně po kružnici.

Obr. 1:
Trojúhelník**Úloha V.P ... fyzika v plamenech**

5 bodů

Na jakých fyzikálních (a chemických) parametrech závisí teplota, kterou hoří nějaká konkrétní látka? Jak? Určete tuto teplotu pro nějakou konkrétní látku.

Úloha V.E ... gumipuk

8 bodů

Závaží o hmotnosti m na gumičce délky l_0 je zavěšeno v pevném bodě o souřadnicích $x = 0$ a $y = 0$. Z osy x , která je horizontálně, závaží pouštíme. Jaká bude závislost nejnižšího dosaženého bodu na poloze na ose x ?

Úloha V.S ... strunná

6 bodů

- Uvažujme otevřené struny a omezme se jen na tři prostorové rozměry. Namalujte, jak vypadá
 - struna volně se pohybující v časoprostoru,
 - struna připevněná oběma konci k D2-bráně,
 - struna natažená mezi D2-bránou a D1-bránou.
 Jaké jsou možnosti, kde mohou struny končit v případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán?
- Vyberte si jednu z funkcí \mathcal{P}_μ^τ nebo \mathcal{P}_μ^σ definovanou v první části seriálu a najděte její explicitní tvar (tj. přímo závislost na \dot{X}^μ a X'^μ). Ukažte, že podmínky $\mathbf{X}' \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$ a $|\dot{\mathbf{X}}|^2 = -|\mathbf{X}'|^2$ opravdu vedou na zjednodušení uvedené v textu.
- Najděte spektrum energií harmonického oscilátoru.
 - Energie harmonického oscilátoru je dána Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Druhý člen je očividně potenciální energií, zatímco první dává po dosazení $\hat{p} = m\hat{v}$ kinetickou energii. Definujme lineární kombinaci $\hat{\alpha} = a\hat{x} + ib\hat{p}$. Určete reálné konstanty a a b , tak aby měl Hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

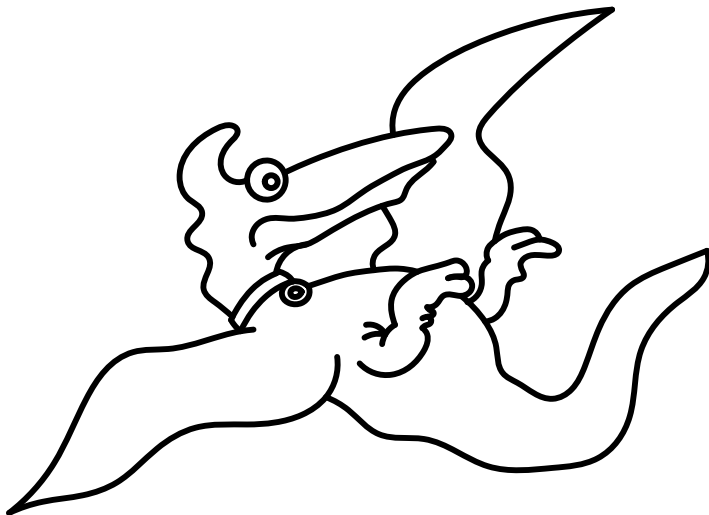
kde $\hat{\alpha}^\dagger$ je komplexní sdružení $\hat{\alpha}$.

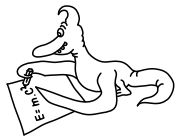
b) Ukažte ze znalosti kanonických komutačních relací pro \hat{x} a \hat{p} , že platí

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] = 0, \quad [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}^\dagger] = 0, \quad [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.$$

c) Ve spektru oscilátoru bude jistě stav s minimální energií odpovídající nejmenšímu možnému kmitání. Označme ho $|0\rangle$. Tento stav musí splňovat $\alpha|0\rangle = 0$. Ukažte, že je jeho energie rovna $\hbar\omega/2$, tj. $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega/2|0\rangle$. Dále ověřte, že pokud by bylo $\alpha|0\rangle \neq 0$, pak máme spor s tím, že má $|0\rangle$ minimální energii, tj. $\hat{H}\alpha|0\rangle = E\alpha|0\rangle$, kde nyní je $E < \hbar\omega/2$. Všechny vlastní stavy Hamiltoniánu můžeme potom psát jako $(\alpha^\dagger)^n |0\rangle$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Najděte energie těchto stavů, tj. čísla E_n taková, že $\hat{H}(\alpha^\dagger)^n |0\rangle = E_n(\alpha^\dagger)^n |0\rangle$.

Tip Použijte komutační relace pro $\hat{\alpha}^\dagger$ a $\hat{\alpha}$.





Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... zase jedna neořezaná 2 body; průměr 1,52; řešilo 60 studentů

Čerstvě ořezaná tužka 6B má hrot tvaru kužele s poloměrem podstavy $r = 1$ mm a výškou $h = 5$ mm. Jak dlouhou čáru s ní dokážeme udělat, jestliže vzdálenost dvou grafitových vrstev je $d = 3,4$ Å a stopa tuhy obsahuje takovýchto vrstev v průměru $n = 100$?

Mirek počítal, za jak dlouho si bude muset sehnat ořezávacítko.

Než začneme úlohu řešit, zavedeme dva předpoklady. První se týká držení tužky. Pokud bychom během psaní stále měnili sklon a rotaci tužky, mohli bychom využívat hran plošek, které na tuze vznikají, čímž bychom její stopu nedefinovaně prodloužili. Předpokládejme proto, že tužku držíme stále pod stejným úhlem, a sice kolmo k papíru. Kdyby byl sklon menší, nevyužili bychom při psaní celý objem čnicí tuhy a opět bychom se dostali do problémů při popisování otěru zbylého objemu. Zadruhé budeme předpokládat, že se jedná o tuhu z čistého grafitu a jeho jednotlivé vrstvy jsou neporušené a rovnoběžné s rovinou papíru.¹

S těmito předpoklady dokážeme využít informace o vzdálenosti jednotlivých grafitových vrstev a jejich průměrném počtu ve stopě tuhy. Průměrný počet chápeme tak, že kolmý řez skutečnou stopou má stejný obsah jako řez stopou tloušťky nd . Je zřejmé, že délka stopy l je nepřímo úměrná tloušťce nd . Dále je určité přímo úměrná výšce hrotu h a přímá úměrnost mezi r a l již plyne z rozměrové analýzy. Délka čáry je tedy dána vztahem

$$l = c \frac{rh}{nd}, \quad (1)$$

kde c je zatím neznámá kladná konstanta, kterou musíme určit. Zkusme nejprve naivně předpokládat, že zkrácení hrotu je přímo úměrné aktuální šířce stopy. Potom má stopa půdorys rovnoramenného trojúhelníku a její objem je

$$V_1 = ndrl_1.$$

Porovnáním s objemem hrotu² dostaneme

$$l_1 = \frac{\pi rh}{3nd} \doteq 154 \text{ m},$$

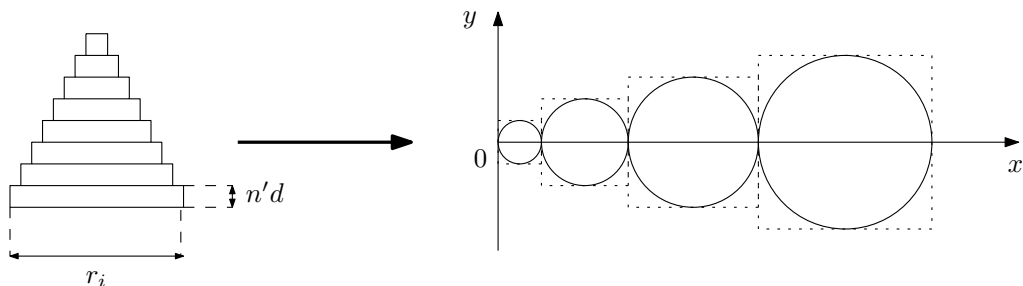
což můžeme považovat za horní odhad délky čáry.

Nyní použijme model znázorněný na obrázku 2, v němž se hrot tužky skládá z disků o poloměru r_i a tloušťce $n'd$. Kužel takto aproximovat můžeme, neboť $n'd \ll h$. Nová veličina n' označuje počet vrstev v jednom disku, zřejmě $n' > n$, protože ve stopě se vrstvy z disků musí „rozprostřít do mezer“. Délku čáry můžeme zapsat pomocí sumy jako

$$l_2 = 2 \sum_{i=1}^N r_i, \quad (2)$$

¹Ve skutečnosti se pro výrobu tužek používá směs rozemletých jílu a grafitu, protože čistý grafit je příliš měkký.

²Pro zajímavost – při dané tloušťce stopy čáry pokryjeme tímto objemem asi 2,5 stran formátu A4.



Obr. 2: Model otírání tuhy.

kde N je počet disků. Ten je dán vztahem

$$N = \frac{h}{n'd}. \quad (3)$$

Dále můžeme vyjádřit

$$r_i = \frac{i}{N}r \quad (4)$$

a dosazením (3) a (4) do (2) získáme

$$l_2 = \frac{rh}{n'd}. \quad (5)$$

Při pohledu na (5) a (1) vidíme, že jsme na dobré cestě. Zbývá určit $c = n/n'$. Platí

$$\frac{n}{n'} = \frac{S'}{S},$$

kde S' je obsah disku a S obsah čtverce, kterému je disk vepsaný – viz tečkované čtverce v 2. Potom

$$\frac{n}{n'} = \frac{S'}{S} = \frac{\pi r_i^2}{4r_i^2} = \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

Čtverce jsou aproximací lichoběžníků vzniklých při kreslení společných tečen disků, neboť pro $i \gg 1$ platí

$$\frac{S'}{S_{\text{lich}}} \approx \frac{\frac{\pi}{2}(r_i^2 + r_{i+1}^2)}{(r_i + r_{i+1}) \frac{2r_i + 2r_{i+1}}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{(r_i + r_{i+1})^2} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Dosazením za n' z (6) do (5) dostaneme

$$l_2 = \frac{\pi rh}{4nd} \doteq 115 \text{ m}.$$

Podle očekávání vychází $l_2 < l_1$, jelikož se stopa ze začátku rozšiřuje rychleji, než jsme předpokládali v prvním případě.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha IV.2 ... zkumavky

2 body; průměr 1,37; řešilo 43 studentů

Zkumavky o objemu 3 ml a 5 ml jsou spojeny krátkou tenkou trubičkou, v níž je pórovitá tepelně nevodivá přepážka, která umožňuje dosažení tlakové rovnováhy v systému. Obě zkumavky původně obsahují kyslík při tlaku 101,25 kPa a teplotě 20 °C. První zkumavku (3 ml) ponoříme do nádoby s rovnovážnou soustavou ledu a vody a druhou (5 ml) do nádoby s párou. Jaký bude tlak v soustavě obou zkumavek po dosáhnutí mechanické rovnováhy? Jakého tlaku by se dosáhlo, pokud by ve zkumavkách byl za stejných podmínek dusík místo kyslíku?

Kiki vyhrabala něco z fyzikální chemie.

Před ponořením do příslušné nádoby má první zkumavka objem $V_1 = 3$ ml, tlak v ní je $p_0 = 101\,250$ Pa, teplota v ní je $T_0 = 293,15$ K a obsahuje n_1 molů kyslíku. Druhá zkumavka má objem $V_2 = 5$ ml, stejný tlak a teplotu a $n - n_1$ molů kyslíku, neboť celkově je v soustavě n molů kyslíku.

Pro obě zkumavky si můžeme napsat stavové rovnice ideálního plynu (kyslík považujeme za ideální plyn). Pro první zkumavku platí $p_0 V_1 = n_1 R T_0$, z čehož lze vyjádřit

$$n_1 = \frac{p_0 V_1}{R T_0},$$

pro druhou zkumavku platí obdobný vztah $p_0 V_2 = (n - n_1) R T_0$, zde pouze počet molů vyjadřujeme jako výše uvedený rozdíl mezi celkovým počtem molů a počtem molů v první zkumavce. Po úpravě a dosazení za n_1 můžeme psát

$$n = \frac{p_0 (V_2 + V_1)}{R T_0}.$$

Po ponoření do nádoby s ledem bude v první zkumavce teplota $T_1 = 273,15$ K, druhá zkumavka ponořená do nádoby s párou bude mít teplotu $T_2 = 373,15$ K a po vyrovnání tlaků bude v obou zkumavkách tlak p_1 .³ Aby se tlaky mohly vyrovnat, musí dojít ke změně rozložení látkového množství v jednotlivých zkumavkách, což umožňuje pórovitá přepážka. V první zkumavce tedy bude n'_1 molů a v druhé $n - n'_1$ molů, protože celkový počet molů n zůstane stejný. Objemy obou zkumavek zůstávají stejné.

Napišeme si stavovou rovnici pro první zkumavku za této situace $p_1 V_1 = n'_1 R T_1$, z ní jsme znovu schopni vyjádřit vztah pro to, jaký je v ní počet molů

$$n'_1 = \frac{p_1 V_1}{R T_1},$$

stejně tak si lze napsat stavovou rovnici pro druhou zkumavku $p_1 V_2 = (n - n'_1) R T_2$ a vyjádřit z ní vztah pro celkový počet molů (při dosazení za n'_1)

$$n = \frac{p_1 V_2}{R T_2} + \frac{p_1 V_1}{R T_1}.$$

Z obou situací jsme získali výrazy pro celkové látkové množství plynu n , které je stále stejné, takže pokud tyto výrazy spojíme a upravíme, jsme schopni z nich vyjádřit, čemu se rovná tlak p_1 a dopočítat jeho číselnou hodnotu.

$$p_1 = \frac{p_0 T_1 T_2 (V_2 + V_1)}{T_0 (T_1 V_2 + T_2 V_1)} \doteq 113\,320 \text{ Pa}.$$

³Teplota ledu a páry není zadána, předpokládáme tedy, že jsou rovny teplotě tání ledu a teplotě varu vody, tlak v okolí uvažujeme normální $p = 101,325$ kPa.

Po dosažení mechanické rovnováhy bude v obou zkumavkách tlak asi 113 320 Pa. Pro výpočty jsme používali stavovou rovnici pro ideální plyn, takže na výsledný tlak nemá vliv, zda byl ve zkumavkách kyslík, nebo dusík, protože obojí bychom považovali za ideální plyn.

Nicméně při výpočtech s reálným plynem by pravděpodobně rozdíl mezi tlakem ve zkumavkách při použití kyslíku nebo dusíku nebyly zanedbatelné. Pro výpočet použijeme van der Waalsovou rovnici⁴

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Jedná se o kubickou rovnici v proměnné n . Při požadované přesnosti nelze tuto rovnici aproximovat tak, aby byla úloha snadno analyticky řešitelná. Budeme ji proto řešit jako soustavu rovnic v proměnných n , n'_1 a p_1 . Koeficienty pro dusík a kyslík jsou v jednotkách SI $a_N = 0,1427 \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$, $b_N = 3,913 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, $a_O = 0,1396 \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$, $b_O = 3,183 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Tlak po ustanovení mechanické rovnováhy má hodnotu $p_{N_1} \doteq 112\,220 \text{ Pa}$ pro dusík a $p_{O_1} \doteq 114\,700 \text{ Pa}$ pro kyslík. Při použití dusíku by tedy výsledný tlak byl o 2 480 Pa menší.

Komentáře k řešení

Úloha nebyla nejjednodušší, jakou lze na aplikaci stavové rovnice ideálního plynu zadat. Stavovou rovnici totiž evidentně skoro všichni znáte, nicméně často byl problém v tom, jak jste si celou situaci dokázali představit a mnozí z vás již v tomto základním bodě chybovali. Velice se mi líbilo, co hned na začátek napsal Zdeněk Turek: „Nejprve si musíme uvědomit, jakým způsobem se vyrovnává tlak. V obou zkumavkách je stálý objem plynu. Tlak tudíž může být vyrovnán pouze přechodem plynu z jedné zkumavky do druhé, což pórovitá přepážka umožňuje.“ To je právě to, co často někomu uniklo, neboť asi nejčastější chybou bylo, že jste předpokládali, že v první zkumavce bude po celou dobu stejný počet částic (molů) kyslíku, stejně tak v druhé zkumavce, zatímco ve skutečnosti je stálý jen celkový počet částic v obou zkumavkách dohromady. Tyto počty částic jste si poté spočítali a z nich zjišťovali, jaký bude jakýsi izolovaný tlak v první zkumavce a pak v druhé zkumavce. S těmito dvěma tlaky jste pak prováděli různé veselé matematické operace, takže výsledný tlak v soustavě jste považovali za jejich součet, průměr, nebo třeba i vážený průměr. Tento přístup je hodně prazvláštní a hlavně ignoruje to, že zkumavky jsou propojené a že se v nich tlak nějakým mechanismem má vyrovnat, což jste se pravděpodobně snažili suplovat těmi průměry. Mimo toho se objevovali i další pozoruhodné přístupy, jakým byl třeba výpočet vycházející z předpokladu zachování energie (i přes to, že část soustavy chladíme a část ohříváme). Co se týče záměny kyslíku za dusík, většina z vás tak nějak tušila, že se tím pro jejich výpočet nic nezmění. Často jste to zdůvodňovali tak, že nepočítáte s ničím, co by bylo závislé na kyslíku (dusíku, nebo jiném plynu), což je pravda, ale skutečná podstata spočívá v tom, že jakýkoliv plyn pro vaše výpočty považujete za tzv. ideální plyn, takže díky tomu můžete používat stavovou rovnici ideálního plynu a nemoříte se s rovnicí reálného plynu (například van der Waalsovou), která už specifické vlastnosti jednotlivých plynů určitým způsobem zohledňuje. Jak je vidět ze vzorového řešení, rozdíl mezi výpočtem pomocí stavové rovnice ideálního plynu a van der Waalsovy rovnice nebyl zcela nepatrný, nicméně

⁴Koeficienty a , b pro molekulární kyslík a dusík najdeme na [http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_constants_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_constants_(data_page)).

ani markantní. Pochvalu si zaslouží Kuba Kvorka, který se pustil do uvažování a vyjadřování i v rovině reálných plynů pomocí již zmíněné van der Waalovy rovnice.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha IV.3 ... racek

4 body; průměr 3,26; řešilo 61 studentů

Naproti sobě plují dvě lodě, první rychlostí $u_1 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a druhá rychlostí $u_2 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ve chvíli, kdy jsou od sebe vzdáleny $s_0 = 50 \text{ km}$, vzlétne z první lodi racek a letí směrem ke druhé. Letí proti větru, jeho rychlost je $v_1 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Když dorazí k druhé lodi, obrátí se a letí zpět, nyní po větru rychlostí $v_2 = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Takto létá tak dlouho, dokud se obě lodi nesetkají. Jakou celkovou dráhu racek urazí?

Mirek vylepšoval úlohy pro ZŠ.

Úlohu vyřešíme v soustavě první lodi (rackovy „domovské“ lodi). Z pohledu této soustavy se druhá loď přibližuje rychlostí o velikosti $w = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, racek vylétává rychlostí o velikosti $w_1 = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a vrací se rychlostí o velikosti $w_2 = 34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jelikož racek letí přesně polovinu své cesty rychlostí w_1 a polovinu rychlostí w_2 , je jeho průměrná rychlost na všech úsecích „tam a zpět“ stejná a rovna

$$\bar{w} = 2 \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

Jelikož víme, že druhá loď dorazí k první za čas $t = s_0/w$, můžeme (z definice průměrné rychlosti) pro celkovou dráhu, kterou racek ve vztažené soustavě spojené s lodí urazí, psát

$$x_{\text{loď}} = \bar{w}t = 2 \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} \frac{s_0}{w}.$$

Číselně pak máme $x_{\text{loď}} \doteq 109 \text{ km}$. Ač se zdá, že jsme v cíli, opravdu nesmíme na tomto místě zapomenout, že se pořád nacházíme v soustavě první lodi, ve které racek nalétá jinou vzdálenost než v soustavě, ve které máme zadané původní rychlosti⁵. Vzdálenost, kterou racek uletěl vzhledem k původní soustavě, potom zřejmě bude rovna $x = x_{\text{loď}} + u_1 (T_1 - T_2)$, kde T_2 je celkový čas, po který se racek k první lodi přibližuje a T_1 je celkový čas, po který se racek od první lodi vzdaluje. Zároveň ale víme, že $T_1 + T_2 = s_0/w$ a $T_1/T_2 = w_2/w_1$, takže můžeme přímočaře vyjádřit $T_{1,2}$ a psát

$$x = \left(2 \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} + u_1 \frac{w_2 - w_1}{w_1 + w_2} \right) \frac{s_0}{w}.$$

Číselně pak máme $x = 116 \text{ km}$.

Kuba Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha IV.4 ... vybitý puding

4 body; průměr 2,94; řešilo 31 studentů

Modelů atomu vodíku bylo nespočetné množství a mnohé z nich už jsou překonané, ale my máme rádi puding a tak se vrátíme k tzv. pudinkovému modelu vodíku. Atom tvoří koule o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem („puding“), v kterém se nachází

⁵Triviálně, i kdyby racek v soustavě lodi seděl na místě, z hlediska původní soustavy se bude pohybovat rychlostí u_1 .

jeden elektron („rozinka“). Samozřejmě nejlépe je elektronu v místě s nejnižší energií, tak sedí ve středu pudingu. Celkově je soustava elektricky neutrální. Jakou energii musíme dodat elektronu, abychom ho dostali do nekonečna? Jaký by musel být poloměr pudingu, aby se tato energie rovnala Rydbergově energii (excitační energie elektronu v atomu vodíku)? Poloměr vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru. *Jakub vaříl puding.*

Najprv si určíme hustotu elektrického náboja ρ kladne nabitej gule s polomerom R . Náboj elektrónu je $-e$ a keďže je atóm celkovo neutrálny, tak kladne nabitá guľa má náboj $+e$. Pre homogénne rozloženie náboja v guli je hustota v nej všade rovnaká. Dá sa teda vypočítať ako podiel celkového náboja e a objemu gule V

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3e}{4\pi R^3}.$$

Budeme chcieť vypočítať elektrické pole, ktoré vytvára kladná časť atómu (v jej poli sa bude elektrón pohybovať). Nato nám bude užitočná *Gaussova veta*. Tá vraví, že ak vezmeme ľubovoľnú uzavretú plochu⁶ S , tak tok elektrickej intenzity⁷ Φ plochou S je úmerný náboju Q_{in} vymedzenému plochou S , tj.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}.$$

Vo vzťahu ešte vystupuje konštanta ϵ_0 , aby sedeli jednotky (naschvál si to môžete vyskúšať pre guľu a jeden bodový náboj v jej strede). Využijeme symetriu našej situácie a zvolíme za uzavretú plochu povrch gule $K(r)$ s polomerom r a so stredom v strede nabitej gule. Jednak zo symetrie vieme, že vektor elektrickej intenzity smeruje od stredu, teda je vždy kolmý na povrch gule (bude sa ľahko rátať skalárny súčin), a po druhé vieme, že jeho veľkosť je na povrchu gule rovnaká a označíme ju $E(r)$. Dostaneme tak

$$\oint_{K(r)} E(r) dS = \frac{Q_{\text{in}}(r)}{\epsilon_0}.$$

Veľkosť intenzity je v rámci integrácie konštanta, takže ju môžeme vybrať pred integrál. Zvyšný integrál je integrál povrchu gule, teda výsledkom integrálu je povrch gule $4\pi r^2$. Dostaneme tak

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{in}}(r)}{\epsilon_0}.$$

Teraz si rozdelíme výber gule na dva prípady. Ak je polomer gule r väčší/rovný polomeru R alebo ak je polomer gule r menší/rovný polomeru R . V prvom prípade je náboj vo vnútri gule polomeru r rovný celkovému náboju kladnej gule e . V druhom prípade je náboj vo vnútri gule polomeru r rovný súčinu hustoty kladného náboja a objemu gule polomeru r . Dostaneme tak

$$Q_{\text{in}}(r) = \begin{cases} e, & r \geq R, \\ e \frac{r^3}{R^3}, & r \leq R. \end{cases}$$

⁶Uzavretá plocha v trojrozmernom priestore znamená plocha, ktorá nemá hranicu, okraj. Napríklad povrch gule nemá hranicu, preto je to uzavretá plocha. Ale ak by sme povrch gule rozrezali rovinou na dva guľové vrchlíky, tak tieto vrchlíky majú hranicu – kružnicu v mieste rezu – a preto nie sú uzavreté plochy.

⁷Tok vektorového poľa \mathbf{A} plochou je analógiou toku vody plochou, kde vektormi sú vektory rýchlosti. Tok cez celú plochu sa získa spočítaním/integráciou malých tokov $d\Phi$ cez jednotlivé malé plochy dS . Ak vektor \mathbf{A} smeruje kolmo na plochu dS , tak je veľkosť toku $d\Phi = A dS$. Ak vektor \mathbf{A} smeruje v rovine plochy dS , tak cez plochu nič „netečie“ a tok je nulový. Tok teda závisí od orientácie vektora \mathbf{A} a plochy. Preto sa definuje *vektor plochy* $d\mathbf{S}$, ktorý má veľkosť dS a má smer normály plochy $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$. Tok je potom skalárny súčin vektorov \mathbf{A} a $d\mathbf{S}$, $d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.

A pre veľkosť elektrickej intenzity $E(r)$ dosadením dostaneme

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2}, & r \geq R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{er}{R^3}, & r \leq R. \end{cases}$$

Všimnime si, že pre $r \geq R$ rovnomerne nabitá guľa vytvára rovnaké pole ako bodový náboj rovnakej veľkosti umiestnený v jej strede. Vo vnútri gule elektrická intenzita lineárne rastie z nuly v strede po maximum na povrchu gule.

A teraz vypočítame energiu/prácu W potrebnú na prenesenie náboja zo stredu gule do nekonečna. Na elektrón pôsobí sila veľkosti $F(r) = eE(r)$ smerujúca do stredu gule. Najprv ukážeme surový postup integrovania. Práca je

$$W = \int_0^{+\infty} F(r) dr.$$

Rozdelíme si integrál na dva integrály na dvoch intervaloch

$$W = \int_0^R F(r) dr + \int_R^{+\infty} F(r) dr,$$

dosadíme vzťah pre silu a elektrickú intenzitu

$$W = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 r}{R^3} dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} dr,$$

vyberieme konštanty pred zátvorku a zintegrujeme funkcie

$$W = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty},$$

dosadíme medze a dostaneme výsledok

$$W = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Teraz ukážeme postup bez integrovania (integrovanie za nás urobili ľudia pred nami). Prácu na presun do nekonečna môžeme rozdeliť na prácu zo stredu na povrch W_1 a z povrchu do nekonečna W_2 .

V prvom prípade pôsobiaci sila závisí lineárne od vzdialenosti od stredu, čo nám pripomína pružinu s určitou tuhosťou k

$$F(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Vieme, že potenciálna energia pružiny je⁸ $E_p = kx^2/2$. Z toho vieme zistiť prácu W_1 ako rozdiel potenciálnych energií v R a 0:

$$W_1 = E_p(R) - E_p(0) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} R^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

⁸Veľičina r by v pružine prislúchala výchylke x .

V druhom prípade, ako sme už spomenuli, sa pole správa ako pole bodového náboja. Teda prácu W_2 vypočítame z rozdielu potenciálnych energií bodových nábojov v nekonečnej vzdialenosti a vo vzdialenosti R . Potenciálna energia bodových nábojov opačnej polaritý je

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

Potom práca W_2 je

$$W_2 = E_p(+\infty) - E_p(R) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Dokopy práca W je

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Teraz túto energiu položíme rovnú Rydbergovej energii (energia základného stavu atómu vodíka, ionizačná energia elektrónu), ktorej vzťah si môžeme nájsť/odvodit:

$$\frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = W = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}.$$

Vyjadríme si polomer R

$$R = \frac{3h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2},$$

porovnáme so vzťahom pre Bohrov polomer R_B (polomer dráhy elektrónu v základom stave v Bohrovom modeli, vzdialenosť od jadra vodíka v základnom stave s najväčšou elektrónovou hustotou)

$$R_B = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2},$$

a dostaneme

$$R = 3R_B.$$

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Úloha IV.5 ... kulky

4 body; průměr 1,77; řešilo 53 studentů

O kolik se zvýší teplota stejných ocelových kulek po jejich vzájemné srážce? Pohybují se stejným směrem rychlostmi $v_1 = 0,7c$ a $v_2 = 0,9c$, kde c je rychlost světla. Uvažujte konstantní tepelnou kapacitu a uvažujte, že kulky jsou stále v pevném skupenství.

Lukáš vymýšlel úlohu do Fyziklání online a pak ji obměnil do série.

Vieme, že pri zrážke sa zachová energia a hybnosť, len ich obe musíme chápať relativisticky. V relativite sa používa takzvaný γ faktor popisujúci „relativistickosť“ častice s rýchlosťou v . Je definovaný ako

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Energia častice s pokojovou hmotnosťou⁹ m je potom γmc^2 . Jej hybnosť je jej klasická hybnosť vynásobená γ , teda hybnosť s relativistickou hmotnosťou. Faktory γ dvoch častíc očísľujeme dolnými indexmi ako zo zadania a smelo môžeme písať zákony zachovania. Nesmieme zabudnúť, že výsledná častica môže mať všeobecne hmotnosť M , jej rýchlosť označíme v_0

$$\gamma_0 M c^2 = E_1 + E_2 = \gamma_1 m c^2 + \gamma_2 m c^2 = m(\gamma_1 + \gamma_2) c^2.$$

Častice letia rovnakým smerom. Príslušná zložka hybnosti má teda rovnaké znamienko

$$\gamma_0 M v_0 = p_1 + p_2 = \gamma_1 m v_1 + \gamma_2 m v_2.$$

Z týchto dvoch rovníc môžeme napríklad jednoducho vyjadriť

$$v_0 = \frac{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Odtiaľ ľahko spočítame

$$M = m \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_0} = m(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} = m \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 v_1/c + \gamma_2 v_2/c)^2}$$

a ak roznásobíme výraz pod odmocninou a využijeme definíciu γ , dostaneme

$$M = m \sqrt{2 + 2\gamma_1 \gamma_2 (1 - v_1 v_2/c^2)}.$$

Po dosadení by sme dostali

$$\frac{M}{m} = \sqrt{2 + \frac{74}{\sqrt{969}}} \doteq 2,092.$$

Vidíme, že výsledná pokojová hmotnosť bude väčšia ako súčet pokojových hmotností pôvodných gúl — asi o 5%. Teraz sa musíme zamyslieť, čo to v skutočnosti znamená.

To, že sa spojená guľa zohreje je zrejme už z našich klasických predstáv. Pri klasickej zrážke (pomalých) gúl väčšinou zanedbávame energiu, ktorá unikne v podobne zvukovej energie, rovnako urobme aj tu (aj keď by to bola poriadna rana). Pri relativistických rýchlostiach nastáva ešte ďalšia možnosť, a to rozpad alebo fúzia jadier. Túto možnosť tiež nebudeme uvažovať. Takýto proces totiž nevieme dobre popísať (unikalo by podstatné množstvo energie).

Ak teda zrazíme rovnaké gule, každá s N atómami, výsledná guľa bude mať presne $2N$ atómov — tu samozrejme nie sú žiadne relativistické korekcie. Presnejšie povedané, bude to pravda práve, ak neuvažujeme jadrové reakcie. Každý z týchto atómov má samozrejme rovnakú pokojovú hmotnosť ako tie v pôvodnej guli, pretože pokojová hmotnosť je vlastnosť konkrétneho izotopu. To sa ale nedá povedať o zotrvačnosti týchto atómov. Práve pri zrážke sa rapídne zrýchlia. Toto zrýchlenie teda spôsobí zmenu nameranej hmotnosti spojeného telesa.¹⁰

⁹Značiť relativistickú hmotnosť, teda γm , nejaká špeciálne vedie iba k zmatkom.

¹⁰Teraz by ste sa mali spýtať otázku, prečo meriame relativistickú a nie pokojovú hmotnosť atómov v látke? Odpoveď je v spôsobe merania hmotnosti: väčšinou položíme teleso na váhu a meriame tlak, ktorým na ňu pôsobí. Ak sa teda zvýši relativistická hmotnosť častíc, rovnako sa zvýši aj ich hybnosť, a teda aj hybnosť, ktorú budú predávať váhe. Dobrá otázka je, ako do toho vstupuje gravitácia. Odpoveď je, že gravitácia pôsobí na celkovú energiu, práve vďaka čomu sa teleso zohriatím neodrazí od svojej podložky.

Zrýchlenie pohybu častíc sme už ale videli aj v klasickej fyzike, tam ho interpretujeme práve ako ohrievanie. Dodané teplo je teda práve rovné pridanej energii častíc, ktorá je jednoducho $(M - 2m)c^2$. Už len potrebujeme tepelnú kapacitu ocele¹¹ $c_m = 466 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a získanú energiu na kilogram

$$u = \frac{(M - 2m)c^2}{2m} = \left(\frac{1}{2} \frac{M}{m} - 1\right) c^2 = \left(\frac{\sqrt{2 + \frac{74}{\sqrt{969}}}}{2} - 1\right) c^2 \doteq 4,1 \text{ PJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Nakoniec len podelíme energetický prírastok kapacitou a získame

$$\Delta T = \frac{u}{c_m} \doteq 8,9 \text{ TK}.$$

Takýto výsledok si zaslúži krátky komentár, terakelvinu nestretávame každý deň. Ukazuje to na naše predpoklady, ktoré sú veľmi nefyzikálne: aj keby pri zrážke nenastala jadrová reakcia, každopádne by sme namiesto pevného objektu pozorovali oblak častíc rozlietajúci sa na všetky strany.

Poznámky k riešeniam

Najčastejšia chyba bola neuvážovanie zmeny pokojovej hmotnosti pri nepružnej zrážke¹². Chválím každého, kto na to nezabudol a menovite Martina Štykse, ktorý sa ako jediný dopracoval ku správne výsledku.

Veľa ľudí úplne zabudlo na relativitu alebo nesprávne skladalo rýchlosti. Naopak, zopár riešiteľov riešilo všeobecnejší prípad s koeficientom reštitúcie pri zrážke.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha IV.E ... někdo to rád vlažné

8 bodů; průměr 4,29; řešilo 48 studentů

Změřte závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje. Proměřte klidný případ i čaj míchaný lžičkou. Dále ověřte, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá či nikoli.

Michal upravil xkcd.

Teorie

Budeme predpokladať prenos tepla pouze vedením. Uvažujme, že teplota vody t_v je v celém objemu stejná a je rovna teplotě hrnku (keramika vede teplo oproti vzduchu velmi dobře). Pokojovou teplotu označme t_p . Uvažujme, že teplota vody se mění tak pomalu, že vedení tepla můžeme považovat za ustálené. Pak za dobu dt se vedením přeneslo teplo

$$dQ = k (t_p - t_v) dt, \quad (7)$$

kde k je konstanta. Tepelný tok je záporný, protože jde ven z hrnku. Abychom snížili teplotu vody a hrnku o teplotu dt , musíme odebrat teplo

$$dQ = C dt, \quad (8)$$

¹¹http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity#Table_of_specific_heat_capacities

¹²Ak by sme chceli znieť pompézne, povieme, že aj teplo má zotrvačnosť

kde C je tepelná kapacita hrnku a vody. Rovnice (7) a (8) dohromady dávají

$$k (t_p - t_v) d\tau = dQ = C dt.$$

Neznáme obecně ani konstantu k , ani C , proto zavedeme jinou konstantu $\lambda = k/C$. Pak po úpravě (separaci proměnných)

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{1}{t - t_p} dt = d\tau,$$

což je diferenciální rovnice. Obě strany zintegrujeme a dostaneme

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(t - t_p) = \tau + D,$$

kde D je nějaká integrační konstanta (určíme později z počátečních podmínek), odkud

$$t(\tau) = e^{-\lambda(\tau+D)} + t_p,$$

po úpravě

$$t(\tau) = E e^{-\lambda\tau} + t_p, \quad (9)$$

kde E je opět konstanta, kterou je možné vyjádřit pomocí původní D a kterou tedy též můžeme určit z počátečních podmínek. Počáteční podmínka je, že na počátku (v čase 0) je teplota t_0 , tedy $t(0) = 0$. Po dosazení do (9) dostaneme

$$t_0 = E + t_p \quad \Rightarrow \quad E = t_0 - t_p,$$

a tedy závislost teploty na čase je

$$t(\tau) = (t_0 - t_p) e^{-\lambda\tau} + t_p. \quad (10)$$

Rozdíl případů, když se s čajem míchá a když nikoliv, nedokážeme snadno kvantitativně popsat, pokusme se alespoň odhadnout několik rozdílů. Výše jsme předpokládali, že teplota vody je v celém objemu v každém čase stejná a je stejná jako teplota hrnku. To však není pravda, nejvyšší teplotu bude mít voda přibližně ve středu hrnku, blíže u stěn bude teplota o málo nižší a teplota hrnku bude též nižší. Jestliže čajem mícháme, pak tuto teplejší vodu ze středu hrnku přemístujeme k okraji. Z rovnice (7) vidíme, že teplo přenesené za jednotku času je úměrné teplotě vody a hrnku, přesněji teplotě vnější stěny hrnku. Jestliže tuto teplotu mícháním zvýšíme, tepelný tok bude vyšší, a tedy čaj se bude ochlazovat rychleji. Kovová lžice navíc teplo velmi dobře vede a odvádí z vody pryč. Jestliže mícháme lžičkou, pak nad hladinou rukou přemístujeme vzduch, nad hladinu se dostává vzduch chladnější a opět dojde k rychlejšímu ochlazování. Ze všech těchto důvodů by doba vychladnutí na pitnou teplotu měla být nižší v případě, že se s čajem míchá.

Měření teploty

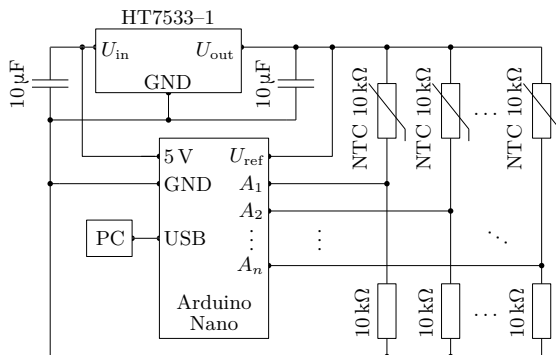
Teplota byla měřena pomocí NTC termistorů 2322 640¹³, který má při teplotě 25 °C odpor 10 kΩ, při vyšších teplotách odpor klesá (termistor je NTC – *negative temperature coefficient*).

Automatizovat měření odporu by bylo možné pomocí multimetru připojeného k počítači, nicméně by v jednom okamžiku bylo možné měřit jen tolik teplot, kolik máme k dispozici

¹³<http://www.gme.cz/img/cache/doc/118/042/ntc640-10k-datasheet-1.pdf>

multimetrů připojitelných k počítači. Protože chceme provádět více měření paralelně, zvolíme jiný způsob.

Měření odporu můžeme snadno převést na měření napětí pomocí napětového děliče (viz obrázek 3), který se skládá obecně ze dvou různých odporů, v našem případě z termistoru a odporu $R_{\text{ref}} = 10 \text{ k}\Omega$. Zanedbáme-li proud tekoucí případným voltmetrem, pak oběma součástkami teče stejný proud, proto dle Ohmova zákona poměr napětí na nich je roven poměru jejich odporů. Budeme-li měřit napětí na referenčním odporu R_{ref} , při teplotě 25°C naměříme $U_{\text{ref}}/2$, jestliže teplota stoupne, odpor termistoru klesne, napětí na něm taktéž a my na referenčním odporu naměříme napětí vyšší.



Obr. 3: Schéma zapojení pro automatizované měření teploty pomocí termistorů a Arduino Nano.

Automatizovat měření napětí je již podstatně snazší. Použili jsme Arduino Nano¹⁴, což je deska obsahující mikrokontrolér Atmel ATmega168 a převodník UART na USB. Obsahuje několik 10bitových analogových vstupů (na obrázku označených A_1, \dots, A_n), které umožňují měření napětí (přesněji měří poměr měřeného napětí a referenčního napětí U_{ref}). Jako referenční napětí (a též napětí pro napětový dělič) sloužil 3,3 V stabilizátor HT7533-1. V principu je možné za referenci použít přímo 5 V z USB, nicméně toto je velmi závislé na použitém kabelu, dalších připojených zařízeních apod. a může se v průběhu měření velmi měnit (ačkoliv na jeho hodnotě měření nezávisí, šum na referenčním napětí zvyší šum měřených hodnot), proto je vhodnější použít stabilizátor.

Mikrokontrolér snadno naprogramujeme, aby v nějakých časových intervalech (v našem případě asi 1 s) po sériovém portu posílal aktuální hodnotu napětí na analogových vstupech. Na počítači, ke kterému je Arduino přes USB připojeno, pak tyto hodnoty ze sériového portu čteme a ukládáme do souboru.

Je třeba též převést naměřené napětí na teplotu. To je možné buď s pomocí údajů, které uvádí výrobce termistoru (nejprve je třeba ze znalosti R_{ref} přepočítat napětí na odpor; po krátkém výpočtu zjistíte, že na U_{ref} skutečně nezávisí), nebo provedeme kalibraci jiným měřidlem. My zvolili druhou metodu a provedli kalibraci pomocí dvojice číslicových teploměrů Dallas DS18B20¹⁵, které byly též připojeny na mikrokontrolér. Oba teploměry i všechny termis-

¹⁴<http://arduino.cc/en/Main/arduinoBoardNano>

¹⁵<http://www.gme.cz/img/cache/doc/530/067/ds18b20-datasheet-1.pdf>

tory byly ponořeny ve vodě, která byla míchána, na počátku měla teplotu asi 95 °C, postupně byla okolním vzduchem ochlazena na pokojovou teplotu a nakonec byla ochlazena ledem na asi 0 °C, přičemž byly zaznamenávány teploty obou teploměrů (nakonec se z nich vzal průměr) a hodnota napětí (přesněji řečeno poměr měřeného a referenčního napětí) naměřená mikrokontrolérem. Pro každý z termistorů byla naměřena kalibrační křivka. Vzhledem k tolerancím jednotlivých součástek se křivky pro každý termistor s daným referenčním odporem mírně lišily, proto po provedení kalibrace nebylo možné termistory mezi sebou navzájem vyměňovat, aniž bychom výrazně zvýšili nejistotu měření.

Na závěr kapitoly ještě poznamenejme, že popsaný postup je možné použít pro měření i dalších veličin, které dokážeme převést na napětí.

Měření

Křivka chladnutí byla vždy zároveň měřena pro tři případy – voda v hrnku se nemíchala, voda byla míchána definovaně pomocí rotující kancelářské sponky na dně hrnku (pod hrnkem rotoval magnet stálou úhlovou rychlostí) a voda byla míchána lžičkou. Měření všech tří případů vždy probíhala zároveň, aby se odstranil vliv rozdílné pokojové teploty, která se pohybovala mezi 20,0 °C a 21,5 °C. Objem vody v hrnku byl vždy asi 0,5 l.

Ve všech případech byly použity pro měření tři termistory, jeden připevněný na dně hrnku u okraje, druhý na vnitřní straně stěny hrnku těsně pod hladinou a třetí přibližně na ose hrnku v polovině výšky hladiny. Zaznamenány byly vždy všechny tři teploty, přičemž při zpracování bylo zjištěno, že jejich rozdíl je srovnatelný s nejistotou měření teploty, proto z nich byl vypočítán průměr, který byl dále považován za průměrnou teplotu vody v hrnku.

U prvních dvou případů předpokládáme, že rozptyl naměřených hodnot bude malý, protože buď nemícháme, nebo mícháme vždy stejně, nicméně míchání lžičkou mohlo být v každém případě jiné, proto rozptyl předpokládáme vyšší.

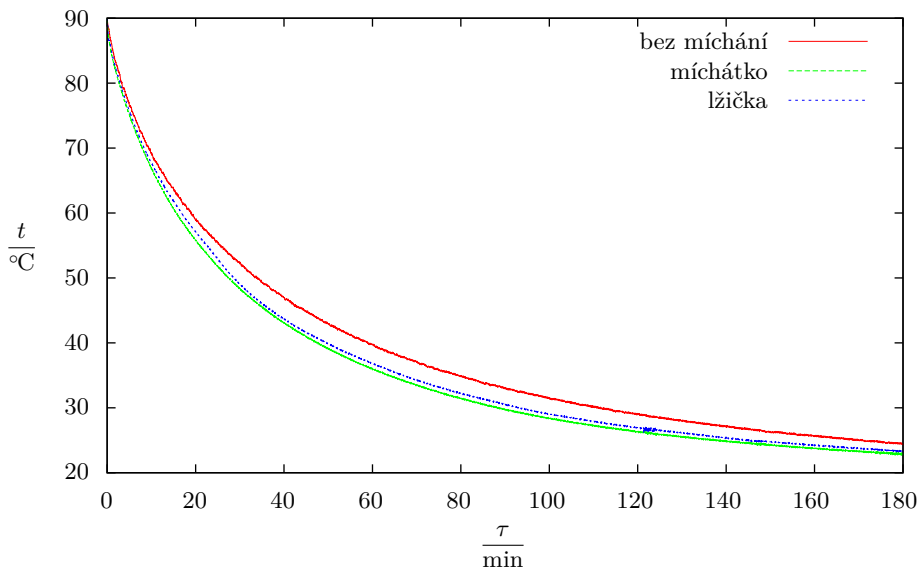
Křivka chladnutí pro všechny tři případy byla vzhledem k časové náročnosti až do pokojové teploty měřena jednou, viz obrázek 4. Další měření byla ukončena při 50 °C, což je přibližně teplota, při které dva organizátoři již označili teplotu čaje za pitnou.

Měřené křivky vždy začínaly těsně nad 90 °C (to proto, že voda se lila do hrnku, který měl pokojovou teplotu, a tedy její teplota poklesla dříve, než senzory teploty zaregistrovaly změnu teploty). Za dobu vychladnutí na pitnou teplotu, kterou máme měřit, tedy budeme dále považovat dobu, za kterou se teplota vody snížila z 90 °C na 50 °C. Naměřené časy uvádíme v tabulce 1.

Hypotéza o rovnosti středních hodnot

Z průměrných hodnot a nejistot uvedených v tabulce 1 by se již dalo usuzovat, že doba vychladnutí na pitnou teplotu závisí na tom, zda s čajem mícháme, protože intervaly spolehlivosti se nepřekrývají. Podívejme se však na problém, který máme řešit, z pohledu statistiky.

Testujme hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá lžičkou či nikoli. Znovu připomeňme, že měření probíhalo vždy po trojicích, tedy v tabulce 1 měření, která jsou na jednom řádku, proběhla současně a za stejných podmínek, měření na různých řádcích mohla proběhnout za různé teploty, tlaku, vlhkosti. . . Pro testování využijeme Studentův test pro dvojice. Testujeme, že střední hodnota doby vychladnutí na pitnou teplotu v případě, že s čajem mícháme, je stejná jako střední hodnota doby vychladnutí na pitnou teplotu v případě, že s čajem nemícháme.



Obr. 4: Naměřené křivky chladnutí.

Tabulka 1: Naměřené doby zchladnutí vody v hrnku z 90°C na 50°C v závislosti na způsobu míchání.

$\underline{T}_{\text{bez míchání}}$	$\underline{T}_{\text{míchátko}}$	$\underline{T}_{\text{lžička}}$
s	s	s
2 035	1 648	1 723
1 967	1 666	1 693
2 018	1 697	1 737
2 061	1 731	1 653
1 996	1 701	1 683
1 983	1 682	1 705
2 034	1 699	1 716
2 035	1 709	1 671
$2\,020 \pm 40$	$1\,690 \pm 20$	$1\,700 \pm 20$

Hypotézu budeme testovat na hladině významnosti $\alpha = 0,05 = 5\%$, která udává pravděpodobnost toho, že hypotézu zamítneme, ačkoliv platí (tzv. chyba 1. druhu). To nicméně nic neříká o pravděpodobnosti toho, že hypotézu nezamítáme, ačkoliv neplatí (tzv. chyba 2. druhu).

Označme n pozorované dvojice (x_i, y_i) , kde $i = 1, 2, \dots, n$, a jejich rozdíly $d_i = x_i - y_i$.

Vypočítáme aritmetický průměr jejich rozdílů

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

a výběrovou směrodatnou odchylku jejich rozdílů

$$s(d) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}.$$

Pozorovaná hodnota testovacího kritéria je

$$t = \frac{\bar{d}}{s(d)} \sqrt{n-1}$$

a porovnááme ji s doplňkem kritického oboru

$$\bar{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\rangle,$$

kde $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ je $(1-\alpha/2)$ -kvantil Studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Jestliže $t \in \bar{W}_\alpha$, hypotézu nezamítáme, v opačném případě hypotézu na hladině spolehlivosti $1-\alpha$ zamítáme.

Aplikujme popsany postup na naše měření, tedy x_i jsou hodnoty v prvním sloupci tabulky 1 a y_i hodnoty ve třetím sloupci, přičemž $n = 8$ je počet řádků. Vypočítáme jejich rozdíly a následně aritmetický průměr $\bar{d} = 319$ s a výběrovou směrodatnou odchylku $s(d) = 47$ s. Odtud $t = 18,0$. Kvantil $t_{0,975}(7) = 2,365$ zjistíme ze statistických tabulek. Protože $18,0 \notin \langle -2,365; 2,365 \rangle$, hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda s čajem mícháme, na hladině významnosti 5 % zamítáme. Hodnota testovacího kritéria je dokonce vyšší než $t_{0,9995}(7) = 5,408$, takže hypotézu bychom zamítli i na hladině významnosti 0,1 %. Dle naměřených hodnot je tedy menší než 0,1 % pravděpodobnost, že rychlost vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá.

Nejistoty měření

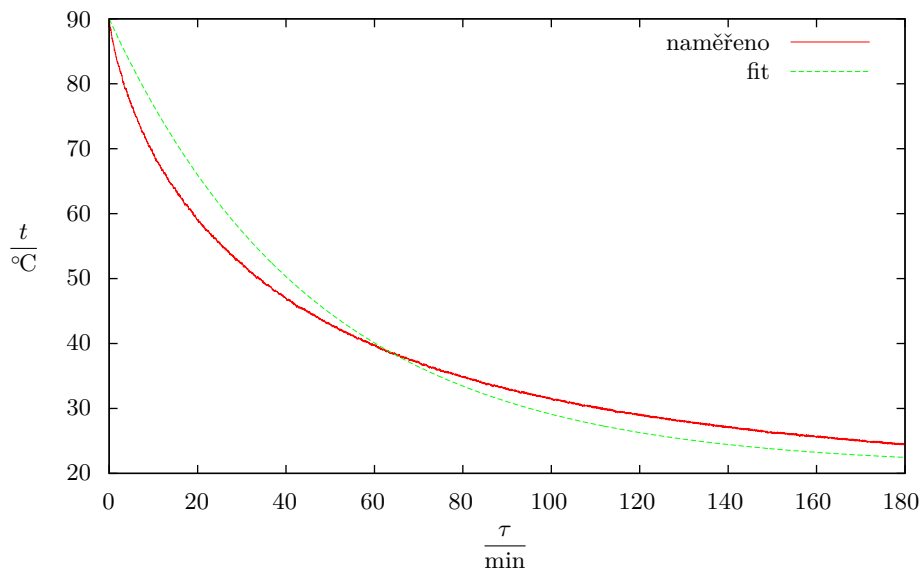
Dallas DS18B20 měří teplotu přesněji než 0,5 °C, po kalibraci byl rozdíl průměrné teploty naměřené dvojicí těchto čidel a pomocí termistorů menší než 0,1 °C. Nejistotu měření teploty tedy odhadneme na asi 0,5 °C.

Čas byl měřen pomocí mikrokontroléru s přesností na nanosekundy. Zaznamenáván byl vždy čas začátku cyklu měření, během kterého se postupně přečetly a vypočítaly hodnoty ze všech snímačů, což dohromady trvalo asi 0,5 s. Doby, za které se teplota vody snížila z 90 °C na 50 °C, byly odečítány z grafu, přičemž vzhledem k šumu odhadneme nejistotu jejich stanovení na 2 s.

Rozptyl výsledků je zřejmě velmi ovlivněn také tím, že objem vody v hrnku byl definovaný pouze na základě rysky v něm před měřením nakreslené, takže nejistotu objemu odhadujeme na 10 ml.

Diskuse výsledků

Zkusme proložit naměřenou závislost teploty na čase (tu, kde se s vodou nemíchalo) teoretickou závislostí (10), viz obrázek 5. Vidíme, že teoretická a naměřená závislost si neodpovídají. To je způsobeno zjednodušeními, které jsme použili. Měření začalo téměř ihned po nalití vody do hrnku, tedy v době, kdy teplota hrnku byla mnohem nižší než teplota vody, a tudíž hrnek vodu ze začátku ochlazoval mnohem rychleji. Další podstatné zjednodušení spočívá v tom, že jsme zanedbali vypařování vody.¹⁶



Obr. 5: Naměřené křivka chladnutí pro případ, kdy se s čajem nemíchá, proložená teoretickou závislostí (10).

Závěr

Byla naměřena závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje (obrázek 4) pro klidný případ, čaj míchaný pomocí míchátko (stálou úhlovou rychlostí rotující kancelářská sponka na dně šálku) a pro čaj míchaný lžičkou. Testovali jsme hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu (50 °C) nezávisí na tom, zda se čajem míchá, a na hladině významnosti 0,1 % jsme ji na základě naměřených hodnot zamítli.

Komentář k došlým řešením

Mnoho řešitelů si zřejmě nepřečetlo celé zadání a neprovedli měření závislosti teploty na čase, pouze uvedli, na jakou teplotu se za jeden čas (jehož volbu nekomentovali) voda ochladila.

¹⁶Přesnější modely najdete např. na http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/dolejsi/outreach/sedlacek_ajp.pdf.

Ptali jsme se na dobu, za kterou se v obou případech ochladí voda na pitelnou teplotu. Z toho je zřejmé, že je nejprve nutné tuto teplotu (subjektivně) zvolit a měla by se v řešení objevit. Zároveň by se v řešení měly objevit naměřené doby, nikoliv pouze graf závislosti teploty na čase.

Neustále opakující se chybou je špatné zaokrouhlování. Zopakujme proto, že v případě všech měření bychom měli určit nejistotu měřené veličiny (nejlépe z parametrů použitých měřidel určit nejistotu typu B a z naměřených hodnot nejistotu typu A a vypočítat kombinovanou nejistotu; často ale postačí alespoň odhad), tu zaokrouhlit na jednu platnou číslici (popř. dvě platné číslice, je-li první platná číslice 1 nebo někdy i 2) a podle nejistoty se pak zaokrouhlí i naměřená střední hodnota měřené veličiny.

Většina řešitelů provedla jen jedno měření pro každý případ (bez míchání a s mícháním lžičkou) a na základě tohoto měření došla k nějakému závěru. Z jednoho měření však nelze na nic usuzovat. Při testování hypotézy o rovnosti středních hodnot používáme kvantil Studentova rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti, kde n je počet měření. Pro jedno měření, a tedy 0 stupňů volnosti není Studentovo rozdělení vůbec definováno. Hypotézu se snažíme zamítnout, proto potřebujeme doplněk kritického oboru co nejmenší, a tedy potřebujeme provést co nejvíce měření. Provedeme-li dvě měření, pak používáme $t_{0,975}(1) = 12,71$, což je asi třikrát více než pro tři měření, čtyřikrát více než pro čtyři měření a pětikrát více pro pět měření. Pro více stupňů volnosti již kvantily klesají pomaleji, a tedy provedením více měření již doplněk kritického oboru zmenšíme méně. Proto je vhodné vždy alespoň 5 měření provést, je-li to možné.

Jestliže měříme závislost teploty na čase v diskrétních časech, pak by graf měl obsahovat samostatné body (případně chybové úsečky), které by neměly být spojeny. Samozřejmě, měříme-li v mnoha různých časech (například v grafech výše jde o téměř 12 000 bodů) a hustota bodů v grafu by byla taková, že by vytvořily tlustou čáru, pak je samozřejmě možné použít čáru (nejistotu můžeme pak v grafu znázornit dalšími čarami okolo naměřené závislosti, které budou tvořit pás spolehlivosti). Je také třeba vždy popsat osy grafu a obsahuje-li více různých závislostí, pak je označit tak, aby mezi nimi šlo rozlišit.

Někteří řešitelé použili k měření multimetr s termočlánekem. Zde je třeba dát si pozor, zda multimetr provádí správně kompenzaci studeného konce a zda jej správně používáme. Pomocí termočlátku totiž můžeme měřit pouze rozdíl teplot jeho konců, a tedy potřebujeme znát teplotu toho konce, který je připojen do multimetru. Přesnost této kompenzace (kterou multimetry provádějí) pak velmi ovlivňuje přesnost měření, což nikdo z těch, kteří jej použili, do řešení neuvedli. Tento efekt je možné demonstrovat tak, že konec termočlátku vložíme do rovnovážné směsi vody a ledu, multimetr, který delší dobu pobyl v místnosti, by měl naměřit teplotu 0°C . A skutečně, multimetr nám ukázal hodnotu 1°C , což je pro termočlánek typu K (navíc úplně obyčejný bez označení) v rámci nejistot měření. Pak celý experiment přesuneme např. do lednice nebo v zimě za okno. My přesunuli experiment z místnosti o teplotě 20°C za okno, kde bylo asi 1°C a po chvíli (když se měřená teplota přestala na první pohled viditelně měnit) odečetli hodnotu 12°C ! Po asi pěti minutách (jak se senzor teploty ukrytý uvnitř multimetru postupně ochlazoval) to bylo 8°C , po deseti minutách 6°C , pokud bychom počkali dostatečně dlouho, měla by se naměřená hodnota přiblížit té naměřené před přesunutím. Odtud navíc vidíme, jak velmi daleko od pravdy může být tvrzení, že měříme s nejistotou rovnou polovině nejmenšího dílku (což v případě použitého multimetru je $0,5^\circ\text{C}$), které mnoho z vás uvedlo.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha IV.S ... kvantová

6 bodů; průměr 4,36; řešilo 25 studentů

- a) Podívejte se do textu, jak působí operátor polohy \hat{X} a hybnosti \hat{P} na složky stavového vektoru v x -reprezentaci (vlnovou funkci) a spočítejte jejich komutátor, tj.

$$(\hat{X})_x ((\hat{P})_x \psi(x)) - (\hat{P})_x ((\hat{X})_x \psi(x)).$$

Tip Zjistěte si, co se stane při derivaci součinu dvou funkcí.

- b) Problém energetických hladin pro volnou kvantovou částici, tj. pro $V(x) = 0$, vypadá následovně:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \psi(x).$$

1. Zkuste jako řešení dosadit $\psi(x) = e^{\alpha x}$ a zjistěte, pro jaká α (obecně komplexní) je E kladná (nadále používejte pouze taková α).
2. Je toto řešení periodické? Pokud ano, tak s jakou prostorovou periodou (vlnovou délkou)?
3. Je získaná vlnová funkce vlastním vektorem operátoru hybnosti (v x -reprezentaci)? Pokud ano, najděte souvislost mezi vlnovou délkou a hybností (tj. odpovídajícím vlastním číslem operátoru hybnosti) daného stavu.
4. Zkuste formálně spočítat hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru naší vlnové funkce podle vzorce uvedeného v textu. Pravděpodobnost, že se částice vyskytuje v celém prostoru by měla být pro fyzikální hustotu pravděpodobnosti 1, tj. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$. Ukažte, že nelze naší vlnovou funkci nanormovat (tj. přenásobit nějakou konstantou) tak, aby její formální hustota pravděpodobnosti podle vzorce z textu byla opravdovou, fyzikální hustotou pravděpodobnosti.
5. Bonus Jaká si myslíte, že je limitně neurčitost polohy částice, jejíž vlnová funkce je hodně blízká té naší? (Tj. blíží se ve všech vlastnostech, ale má vždy normovanou hustotu pravděpodobnosti a je to tudíž fyzikální stav.) Lze odhadnout pomocí Heisenbergových relací neurčitosti jaká přitom bude nejméně neurčitost hybnosti?

Tip Dávejte pozor na komplexní čísla, například kvadrát komplexního čísla je něco jiného než kvadrát velikosti komplexního čísla.

- c) V druhém díle jsme si odvodili energetické hladiny elektronu ve vodíku pomocí redukované akce. Zvláštní shodou by řešení spektra hamiltoniánu v coulombickém potenciálu protonu vedlo na úplně samé energie, tj.

$$E_n = -Ry \frac{1}{n^2},$$

kde $Ry = 13,6 \text{ eV}$ je energetická konstanta známá jako Rydberg. Elektron, který spadne z libovolné hladiny na $n = 2$, vyzáří energii ve formě jediného fotonu úměrnou rozdílu energie daných hladin. Ze kterých hladin musí elektron na druhou hladinu spadnout, aby bylo vyzářené světlo viditelné? Jakou budou mít odpovídající spektrální čáry barvu?

Tip Vzpomeňte si na fotoelektrický jev a na vztah mezi frekvencí světla a jeho vlnovou délkou.

- a) Z textu čtvrtého dílu seriálu víme, že $(\hat{X})_x \varphi(x) = x\varphi(x)$ a že

$$(\hat{P})_x \varphi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x).$$

Zároveň pro derivaci součinu platí $(fg)' = f'g + fg'$. Pro výraz v zadání tedy dostáváme

$$x \left(-i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi(x)) = i\hbar\varphi(x),$$

což je přesně vztah postulovaný v textu seriálu.

- b) Podle zadání zkusíme do rovnice dosadit $e^{\alpha x}$. Musíme pouze vědět, že $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$. Dosazením a zderivováním tedy získáváme

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 = E.$$

Protože E je nejen reálná, ale i kladná veličina, musí být α čistě imaginární

$$\alpha = \pm i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Platí, že $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Vidíme tudíž, že vlnová délka tohoto řešení je (identifikujeme $\varphi = \sqrt{2mE}/\hbar$)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

kde si vzpomeneme, že $\hbar = h/(2\pi)$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že naše řešení je opravdu vlastním vektorem operátoru hybnosti a že

$$(\hat{P})_x e^{\alpha x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha x} = -i\hbar\alpha e^{\alpha x},$$

a tudíž $p = -i\hbar\alpha$. Vlnová délka pak je

$$\lambda = \frac{h}{|p|}.$$

Přesně podle De Broglieho vztahu ze seriálu. Kvantová mechanika tedy přesně předpovídá charakter „hmotné vlny“ částic!

Přímým dosazením našeho řešení do vzorce pro hustotu pravděpodobnosti z textu seriálu dostáváme

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = e^{\alpha^* x} e^{\alpha x},$$

kde * značí komplexní sdružení. Víme, že α je čistě imaginární a tedy $\alpha^* = -\alpha$, takže

$$\rho(x) = e^{-\alpha x} e^{\alpha x} = 1.$$

Není těžké ukázat, že tuto formální hustotu pravděpodobnosti nelze nanormovat, protože integrál z jakéhokoliv konstantního čísla přes celou reálnou přímku je nekonečný a nemůže být tudíž roven jedné. Tato vlnová funkce nebo vektor tedy neodpovídá nějakému opravdovému stavu částice, ale je spíš matematickou abstrakcí.

Bonus Tato vlnová funkce má přesnou hybnost p , a tudíž můžeme intuitivně pomocí Heisenbergových relací říct, že neurčitost její polohy tedy musí být nekonečná. To vskutku platí – hustota pravděpodobnosti je všude stejná, tudíž u blízkého stavu opravdové částice by byla všude skoro stejná, nebo přinejmenším hodně rozprostřená, a tudíž bychom fakticky nedokázali vůbec říct, kde by se mohla nacházet.

- c) Přímou aplikací vzorce ze zadání a použitím faktu, že pro foton je¹⁷ $E = hf = hc/\lambda$, dostáváme

$$\lambda_m = \frac{hc}{Ry} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1},$$

kde m je hladina, na kterou z $n = 2$ elektron přeskakuje. Dosazením několika prvních přeskoků dostáváme:

$$\lambda_3 = 656 \text{ nm},$$

$$\lambda_4 = 486 \text{ nm},$$

$$\lambda_5 = 434 \text{ nm},$$

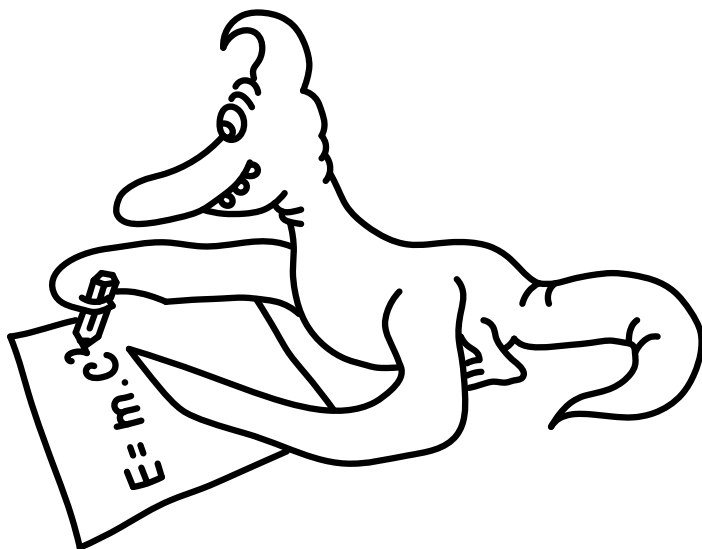
$$\lambda_6 = 410 \text{ nm},$$

$$\lambda_7 = 397 \text{ nm}.$$

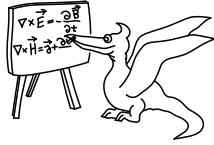
Všechny další přeskoky už mají kratší vlnové délky. Porovnáním s tabulkami zjistíme, že barvy prvních čtyřech čar jsou červená, tyrkysová, modrá a fialová. Pátý přeskok už je pak ultrafialový a oku neviditelný stejně jako všechny další.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz



¹⁷Vztah mezi frekvencí a vlnovou délkou světla je základní vztah vlnové optiky.



Seriál: Strunný

Tento díl bude vyvrcholením našeho seriálu. Odvodíme pohybové rovnice, které plynou z Nambu-Gotovy akce zavedené ve třetím díle. Řekneme si, že ji lze za určitých dodatečných podmínek (které lze ale vždy splnit) přepsat do tvaru vlnové rovnice klasické struny. Povíme si něco o řešeních pohybové rovnice a objevíme pojem D-brán. Přejít ke kvantové teorii provedeme tak, že z klasických pozorovatelných (v našem případě funkcí $X^\mu(\tau, \sigma)$ parametrizujících strunu v daném čase spolu s příslušnou hustotou hybnosti na struně) přejdeme k operátorům, které splňují kanonické komutační relace z minulého dílu seriálu. Dostaneme tak hledanou kvantovou teorii relativistické struny. Po tomto matematicky vyčerpávajícím dílu seriálu nás již příště čeká fyzikální diskuze toho, co v sobě teorie strun skrývá.

Pohybové rovnice relativistické struny

Začneme odvozením pohybových rovnic pro relativistickou strunu. Strunu pohybující se v D -rozměrném¹⁸ prostoročase jsme parametrizovali funkcemi

$$\mathbf{X}(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)) ,$$

kde $d = D - 1$ je dimenze prostoru,¹⁹ ve kterém se struna pohybuje. My už víme, že rozumnou akcí pro naši strunu je Nambu-Gotova akce

$$\mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') d\sigma d\tau ,$$

kde jsme v analogii s klasickou strunou označili hustotu Lagrangiánu

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\dot{\mathbf{X}}|^2 |\mathbf{X}'|^2} .$$

Pro jednoduchost značíme $\dot{\mathbf{X}}$ derivaci vektoru podle τ a \mathbf{X}' derivaci podle σ . Připomeňme také, že skalární součin a velikosti vektorů nepočítáme stejně jako v eukleidovské geometrii: pro vektory $\mathbf{A} = (A^0, A^1, A^2, \dots, A^d)$ a $\mathbf{B} = (B^0, B^1, B^2, \dots, B^d)$ máme předpis

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + \dots + A^d B^d .$$

Velikost vektoru lze pomocí tohoto skalárního součinu spočítat jako $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

Víme již, že pohybové rovnice, které nám popisují vývoj struny v časoprostoru, určíme z podmínky nulovosti variace akce. Provedme proto naposledy v tomto seriálu variaci

$$\delta \mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}} + \delta \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}' + \delta \mathbf{X}') d\sigma d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') d\sigma d\tau . \quad (11)$$

¹⁸Uvažování obecného rozměru prostoročasu je nutné. Kdybychom se totiž omezili hned na začátku na $D = 4$, dostali bychom nekonzistentní teorii.

¹⁹Jednotlivé složky značíme souhrnně $X^\mu(\tau, \sigma)$.

Pro malé změny $\delta\mathbf{X}$ se členy na pravé straně liší jen málo a můžeme použít v případě prvního členu Taylorův rozvoj do prvního řádu, a to v obou proměnných $\dot{\mathbf{X}}$ i \mathbf{X}' . Dostáváme tak

$$\delta\mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sum_{\mu=0}^d \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}')}{\partial\dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}')}{\partial X'^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma} \right) d\sigma d\tau,$$

kde první člen v rozvoji se odečetl s druhým členem v (11) a další členy v rozvoji jsou úměrné prvními derivacím hustoty Lagrangiánu. Ve výrazu výše jsme také prohodili derivaci a variaci δ .

Protože se nám začínají výrazy komplikovat, označme

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu}, \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu}. \quad (12)$$

Stejně jako u všech ostatních variací, i nyní bude následujícím krokem použití per partes, v jednom případě k prohození derivace podle τ a ve druhém k prohození derivace podle σ

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sum_{\mu=0}^d \left(\frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right) \delta X^\mu d\sigma d\tau + \int_0^l \sum_{\mu=0}^d [\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu]_{\tau_1}^{\tau_2} d\sigma \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\mu=0}^d [\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu]_0^l d\tau. \end{aligned}$$

Nyní se však objevily dva okrajové členy. Jeden z těchto členů je nulový, protože stejně jako v případě volné částice či klasické struny předpokládáme, že známe počáteční a koncovou konfiguraci struny, tj. $\delta X^\mu(\tau_1, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_2, \sigma) = 0$.

Vymizení druhého okrajového členu si zaslouží vlastní kapitolu a podíváme se na něj za chvíli. Aby tedy byla variace akce nulová pro všechny $\delta X^\mu(\tau, \sigma)$, musí být nulový i výraz v závorce a dostáváme tak pohybové rovnice pro relativistickou strunu

$$\frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} = 0.$$

Okrajové podmínky a D-brány

Nyní je čas vrátit se zpět k okrajovému členu ve variaci Nambu-Gotovy akce. Nulovosti tohoto členu docílíme tak, že

$$[\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu]_0^l = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, l) \delta X^\mu(\tau, l) - \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) \delta X^\mu(\tau, 0) = 0$$

pro všechna $\mu = 0, 1, 2, \dots, d$. Existuje několik možností, jak nulovosti docílit, a ty si nyní podrobněji rozebereme.

1. *Uzavřené struny* nemají žádný okraj, a proto není ani potřeba anulovat žádný okrajový člen. Hodnoty $\sigma = 0$ a $\sigma = l$ zde odpovídají témuž bodu na světoploše. Na tento případ lze proto nahlížet také tak, že se příslušné dva členy ve vztahu výše odečtou díky tomu, že jde o hodnoty v témže bodě.
2. *Otevřené struny* přinášejí zajímavější možnosti. Uvažujme pro jednoduchost jeden index μ odpovídající nějakému prostorovému rozměru a jeden z konců otevřené struny. Máme následující dvě možnosti, jak zajistit nulovost:

- V případě tzv. *Neumannovy okrajové podmínky* je $\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, l) = 0$. Toto je dodatečná podmínka na konce struny, které se v tomto směru pohybují jinak volně.
- V případě tzv. *Dirichletovy okrajové podmínky* máme na okraji $\delta X^\mu = 0$. To znamená, že je poloha konce struny v tomto směru fixována. Konec struny se v tomto směru nemůže pohybovat libovolně, ale je vázán na pevnou trajektorii.

Na každém konci otevřené struny a pro každou prostorovou dimenzi můžeme zvolit buď Dirichletovu, nebo Neumannovu okrajovou podmínku. V d prostorových dimenzích musíme tak zvolit celkem $2d$ okrajových podmínek. Podle toho, jak tyto podmínky namícháme, dostáváme různé fyzikální situace. Uvažujme například otevřenou strunu, která splňuje Dirichletovy okrajové podmínky na obou koncích v p prostorových dimenzích, tedy $\delta X^\mu = 0$ pro $\mu = 1, 2, \dots, p$ a Neumannovy podmínky v ostatních rozměrech. Konce struny se nemohou volně pohybovat v těchto směrech a mají tedy pevnou souřadnici (obecně však pro oba konce různou). Jsou připevněny k $p = d - q$ rozměrnému objektu, který nazýváme Dp -bránou.²⁰ Tento název vznikl složením sousloví Dirichletova-membrána, tj. membrána v časoprostoru, která odpovídá Dirichletově okrajové podmínce pro strunu.

D-brány jsou objekty, na kterých žijí otevřené struny. Z naší analýzy se nám tak přirozeně vynořily objekty, které hrají významnou roli v dnešní teoretické fyzice a výrazně přesahují rámec teorie strun. Existují například modely vesmíru, které předpokládají, že žijeme na 4-rozměrné D-bráně ve více rozměrném prostoročasu. Některé modely vzniku vesmíru zase předpokládají, že se všechny částice zrodily při kolizi a následném vymizení (anihilaci) dvou nestabilních D-brán během velkého třesku. D-brány stály také u vzniku tzv. AdS/CFT korespondence. Ukázalo se totiž, že dvě zcela odlišné teorie (teorie gravitace na anti de-Sitterově pozadí a konformní teorie pole na jeho hranici) jsou svázány nečekanou dualitou. Gravitační v D dimenzích můžeme popsat kvantovou teorií v $D - 1$ dimenzích. Není to užasné?! AdS/CFT korespondence se stala centrem výzkumu mnohých teoretických fyziků a dodnes jí nikdo pořádně nerozumí.

Řešení pohybové rovnice relativistické struny

Přestože jsme nepočítali explicitně derivace (12), dokážeme si představit jejich komplikovanost. Dosazením do pohybové rovnice bychom pak dostali prakticky neřešitelnou soustavu diferenciálních rovnic. Naštěstí se nám podaří rovnici tak zjednodušit, že již nebude dále co řešit. Získáme totiž vlnovou rovnici, kterou jsme vyřešili již v úloze ke třetímu dílu seriálu.

Využijeme toho, že v našem popisu struny je velká nejednoznačnost. Fyzikálně přeci nemůže záviset na tom, jak popisujeme světloplou struny. Nesmí záviset na tom, jak vypadají čáry konstantního τ a σ na světloploše. Rozhodující je pouze tvar této světloplochy. Jinak řečeno, různé funkce $X^\mu(\tau, \sigma)$ mohou popisovat stejný vývoj struny. Můžeme tedy vybrat parametrizaci (křivky konstantního τ a σ) speciálně tak, aby se nám pohybové rovnice zjednodušily.

Už dříve jsme volili tyto čáry konstantního τ a σ navzájem kolmé. To můžeme určitě vždy udělat a vede to na podmínku

$$\dot{\mathbf{X}}'(\tau, \sigma) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\tau, \sigma) = 0. \quad (13)$$

Vždy také můžeme zařídit to, že $\sigma \in (0, 2\pi)$. Máme-li totiž funkci $X^\mu(\tau, \bar{\sigma})$ parametrizující světloplou a konce struny odpovídající $\bar{\sigma} = 0$ a $\bar{\sigma} = l$, stačí vzít $\sigma = 2\pi\bar{\sigma}/l$ a máme tuto podmínku splněnu. Dále můžeme měnit to, jak jsou na sebe „nahuštěny“ čáry konstantního τ ,

²⁰Pokud nespécifikujeme rozměr tohoto objektu, mluvíme jen o D-bráně.

tedy jak daleko jsou od sebe tyto čáry odpovídající parametru τ lišícího se o jednotku. Vždy můžeme brát²¹

$$|\dot{\mathbf{X}}|^2 = -|\mathbf{X}'|^2. \quad (14)$$

Zvolíme-li nyní libovolně čáry konstantního σ na světloploše, fixují nám tyto podmínky již jednoznačně parametrizace celé světloplochy. Vezmeme-li podmínky (13), (14) v úvahu, derivace (12) se dramaticky zjednoduší a lze ukázat, že

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c} \eta_{\mu\mu} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \eta_{\mu\mu} X'^\mu,$$

kde $\eta_{\mu\mu}$ je stejně jako v prvním díle seriálu rovna -1 pro $\mu = 0$ a $\eta_{\mu\mu} = 1$ jinak. Dosazením do pohybové rovnice dostáváme opravdu vlnovou rovnici

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0$$

pro každý směr v časoprostoru μ .

Toto je rovnice, kterou jsme se již naučili řešit. Můžeme očekávat, že půjde o nějakou kombinaci sinů a kosinů stejně jako v jedné z předchozích seriálových úloh. Kromě těchto členů bude obecné řešení obsahovat také lineární část v proměnné τ . Řešení rovnice by vedlo na zdoluhavý a ne příliš zajímavý výpočet, a proto ihned řešení napíšeme a pouze ho okomentujeme. Poctivý čtenář si může vyzkoušet, že jsou pohybové rovnice i okrajové podmínky splněny.

V případě otevřené struny s volnými konci bychom například dostali řešení

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n^\mu e^{-in\tau} - a_n^{\dagger\mu} e^{in\tau}) \cos n\sigma. \quad (15)$$

V řešení se vyskytuje spousta konstant, jejichž význam si nyní vysvětlíme. První dva členy popisují pohyb středu struny, zatímco poslední člen se sumou odpovídá oscilacím struny. Jelikož je struna velmi malá,²² očekáváme, že se bude z dálky jevit jako bodová částice. Pokud na tuto částici nepůsobí žádná síla, očekáváme, že se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To zajišťují právě první dva členy, které popisují pohyb hmotného středu struny. Dosadíme-li do výrazu $\tau = 0$, zjistíme, že poloha hmotného středu je určena právě konstantami x_0^μ . Zderivujeme-li výraz podle τ , měli bychom získat výraz, který odpovídá rychlosti. První člen řešení při derivaci vypadne a posledního oscilujícího členu si zatím nevšimáme. Jako rychlost hmotného středu můžeme tedy identifikovat $2\alpha' p_0^\mu$. Konstantu $2\alpha'$ jsme zavedli pouze z konvenčních důvodů a zajišťuje to, že můžeme p_0^μ považovat za hybnost struny. α' je konstanta všudypřítomná v teorii strun, ve které se objevila již od jejího samotného počátku. Tuto konstantu lze také vyjádřit jakožto funkci napětí struny T_0 , ale nebudeme se nyní zdržovat takovými maličkostmi.

Nyní přejdeme k části obsahující sumu. I zde se objevuje konvenční konstanta, tentokrát $i\sqrt{2\alpha'}/n$, kde i je imaginární jednotka. Někomu by mohla zmást exponenciála komplexního čísla. Té se ovšem nemusíme bát, protože podle definice platí

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

a pomocí tohoto výrazu dostaneme v rozvoji (15) očekávané členy se siny a kosiny a nyní již s reálnými argumenty. Celkově máme následující parametry řešení pohybové rovnice pro otevřenou relativistickou strunu s volnými konci: x_0^μ a p_n^μ pro všechna n přirozená čísla a $\mu = 0, 1, \dots, d$.

²¹Všimněme si znaménka na pravé straně. To odpovídá tomu, že je vektor $\dot{\mathbf{X}}$ časupodobný a jeho velikost na druhou je záporná. Znaménka se tak vyruší.

²²Tak malá, že ji ještě nikdy nikdo nepozoroval.

Kvantujeme strunu!

Tato kapitola bude úvodem ke kvantování relativistické struny. Protože jde většinou o náročné výpočty s komplikovaným vysvětlením, nebudeme vše dělat do detailu, ale jen celou proceduru nastíníme.

Prvním krokem ke kvantové teorii je povýšení klasických veličin na operátory a postulování kanonických komutačních relací mezi nimi. Musíme tedy najít analogii polohy částice a její hybnosti v případě struny. Jak lze snadno vytušit, polohám bude odpovídat $X^\mu(\tau, \sigma)$. Hybnost musí v nějakém smyslu odpovídat časové derivaci polohy. Rozumným kandidátem na roli hybnosti bude proto funkce $\mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma)$, která je až na konstantu derivací $X^\mu(\tau, \sigma)$ podle parametru τ .

Při řešení vlnové rovnice je ovšem potřeba vzít v úvahu vztahy, které nám zafixovaly parametrizaci struny. Lze proto očekávat, že ne všechna $X^\mu(\tau, \sigma)$ a \mathcal{P}_μ^τ budou nezávislé, ale obecně jsou spojeny podmínkami fixujícími parametrizaci. Je-li dimenze časoprostoru D , pak bude nezávislých komponent jen $D - 2$. To lze přirozeně očekávat, vezmeme-li v úvahu fakt, že teorie musí být nezávislá na parametrizaci světloplochy, která je dvourozměrná. To není úplně pravda a přesné vyšetřování podmínek na fixování parametrizace dovolují ještě dvě další proměnné, které označíme x_0^- a p^+ . Ty odpovídají kombinacím poloh a hybností hmotného středu ve zbývajících dvou rozměrech. Celkově máme následující nezávislé operátory kvantové teorie relativistické struny

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma), \quad \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}, \quad \hat{x}_0^-, \quad \hat{p}^+, \quad (16)$$

kde nyní $I = 2, 3, \dots, d$. Stríšky nad písmenky znamenají, že již nejde o číslo, ale o operátor. Máme-li definovány operátory, je dalším krokem pro kvantování postulování komutačních relací. Mínule jsme se dozvěděli, že kanonické komutační relace mezi operátorem polohy a operátorem hybnosti mají tvar

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

kde δ_{ij} je nulové, pokud $i \neq j$, a je rovno jedné, pokud jsou si indexy rovny. V našem případě máme však indexy dva. Máme index I a k tomu ještě spojitý index σ . Zobecněním komutačních relací je

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \tilde{\sigma})] = i\hbar\delta_{IJ}\delta(\sigma - \tilde{\sigma}),$$

kde jsme $\delta(\sigma - \tilde{\sigma})$ nazvali δ -funkcí a je zobecněním symbolu δ_{ij} pro případ spojitého indexu σ . Z matematického pohledu jde o příklad tzv. distribuce, ale my se pro nyní spokojíme s intuitivním pohledem, že jde pouze o zobecnění δ_{ij} . Kromě komutačních relací výše musíme také postulovat

$$[\hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^+(\tau)] = -i\hbar$$

a všechny ostatní komutátory operátorů (16) jsou nulové.

Máme prozatím nekonečně mnoho kvantových operátorů (16) parametrizovaných spojitým parametrem σ ²³ Bude výhodné přejít od tohoto spojitého parametru k diskrétnímu. To nám přinese dvě výhody. Operátory budeme schopni očíslovat přirozenými čísly namísto reálného σ a navíc se nám z δ -funkce stane δ_{ij} , se kterým už umíme pracovat. Jak tedy provést diskretizaci? My již známe klasické řešení (15) pohybové rovnice. V rozvoji jsou již koeficienty číselované celými čísly μ a n . V kvantové teorii se z koeficientů stanou operátory a máme tak novou množinu operátorů

$$\hat{a}_n^I, \quad \hat{a}_n^{\dagger I}, \quad \hat{x}_0^I, \quad \hat{p}_0^I, \quad \hat{x}_0^-, \quad \hat{p}^+.$$

²³Každému odpovídá σ jeden operátor.

Vidíme, že již všechny spojitě indexy zmizely a zůstaly jen diskrétní $I = 2, 3, \dots, d$ a n přirozená čísla. Trocha počítání s integrály a δ -funkcemi by nám umožnila spočítat komutátory těchto operátorů

$$[a_m^I, a_n^{\dagger J}] = \eta^{IJ} \delta_{mn}, \quad [a_m^{\dagger I}, a_n^{\dagger J}] = 0, \quad [a_m^I, a_n^J] = 0.$$

Poslední ingrediencí, kterou budeme příště potřebovat, je operátor energie, tj. Hamiltonián. Jeho tvar lze opět spočítat ze znalosti Lagrangiánu. My jeho tvar ale uhádneme. Využijeme zkušenosti získané z klasické struny. Energie je součtem kinetické a potenciální energie. Kinetická energie je úměrná hybnosti na druhou, zatímco potenciální energie byla v případě klasické struny úměrná derivaci parametrizace struny v pevném čase. V analogii s klasickou strunou nás nepřekvapí tvar Hamiltoniánu

$$\hat{H} = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\pi\alpha' \hat{\mathcal{P}}^{\tau I} \hat{\mathcal{P}}^{\tau I} + \frac{1}{4\pi\alpha'} \hat{X}'^I \hat{X}'^I \right).$$

My jsme ovšem řekli, že budeme pracovat s diskrétní množinou operátorů, a proto musíme i předpis pro Hamiltonián vyjádřit pomoci této množiny. Dosazením z řešení pohybové rovnice dostaneme jednoduchý výraz²⁴

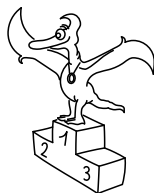
$$\hat{H} = \alpha' \sum_{I=2}^d p^I p^I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{I=2}^d j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1.$$

Zde vidíme, proč jsme volili konstanty v řešení pohybové rovnici tak, jak jsme volili. Je to proto, aby nám vyšel vztah pro energii takto jednoduše.

Nyní máme všechny potřebné ingredience k tomu, abychom našli všechny fyzikální stavy naší teorie. V příštím díle se zaměříme na tyto stavy a ukážeme si, že různé módy kmitající struny odpovídají různým částicím. První mód pro uzavřené struny bude například odpovídat gravitonu (částici způsobující gravitaci), zatímco první mód otevřené struny odpovídá fotonu (částici světla, ale také částici zprostředkující elektrickou a magnetickou interakci).

Příště si také povíme o problémech teorie, kterou jsme vybudovali, a jaká jsou řešení těchto problémů. Jedním z problémů je to, že naše teorie neobsahuje fermiony (například elektron), které se v našem světě vyskytují. Teorie je tedy neúplná. Řešením tohoto problému je supersymetrie a teorie superstrun, která je o něco komplikovanější než teorie bosonových strun, o které jsme se již leccos naučili. Druhým problémem je existence tachyonu, tedy částice s imaginární hmotností. Řešením je opět přechod k teorii superstrun, ale ne tak úplně. Řekneme si, že tachyony jsou v teorii strun něco přirozeného a nastíníme jejich roli. Dalším problémem je předpovězená dimenze časoprostoru $D = 26$, kterou zatím ještě nikdo nepozoroval. Na závěr zmíníme pár zajímavostí a aplikací teorie strun, které vás snad motivují k hlubšímu studiu teorie a jednou třeba i výzkumu na tomto aktivním poli teoretické fyziky.

²⁴Zde je potřeba použít ještě relativistické invariance teorie. Relativističnost jsme narušili zvolením parametrizace světloplochy a aby byla výsledná teorie relativisticky invariantní, musí být například dimenze časoprostoru rovna 26. Dalším důsledkem je také tento jednoduchý tvar Hamiltoniánu.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	4	5	8	6	39	100	158
1. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	2	2	4	4	2	3	5	2	24	78	124
2. Jan Preiss	G, Lovosice	2	2	4	3	2	4	7	2	26	77	121
3. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	4	4	2	5	2	29	75	119
4. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	4	2	4	4	1	3	2	5	25	68	107
5. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	4	0	3	3	2	5	6	2	25	63	89
6. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	–	4	–	2	3	7	–	20	61	82
7. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	0	1	1	1	3	2	–	10	51	76
8. Daniela Pittmerová	G L. Svobodu, Humenné	4	–	3	–	1	3	4	–	15	60	68
9. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	4	4	4	–	1	–	5	–	18	78	66
10. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	4	–	4	–	–	–	4	–	12	71	61
11. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	4	–	4	–	–	4	–	2	14	72	54
12.–13. Jozef Burkuš	G, Rožňava	2	0	2	–	–	–	2	–	6	48	50
12.–13. Petr Jakubčík	PORG, Praha	4	–	–	–	2	–	6	–	12	63	50
14. František Zajíc	G, Nymburk	4	0	1	–	–	2	–	–	7	70	46
15. Aneta K. Lesná	G Christiana Dopplera, Praha	0	–	1	–	1	2	1	–	5	36	43
16. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	41
17. Adam Polóček	G, Havlíčkova, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	40

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	4	5	8	6	39	100	158
1. Petr Hrubý	G, Polička	4	2	4	2	2	4	6	5	29	74	117
2. Jakub Jambřík	G J. A. Raymana, Prešov	4	2	4	2	2	3	6	2	25	64	101
3. Dominika Ďurovčíková	G Hlohovec	2	2	3	2	3	3	3	6	24	69	100
4. Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	2	4	4	1	2	2	5	2	22	66	98
5. Tomáš Hrbek	G J. Resslera, Chrudim	2	4	3	1	2	2	7	3	24	61	97
6. Samuel Obuch	G Jána Hollého, Trnava	2	6	4	–	1	3	2	–	18	54	76
7. Daniela Šimánková	G, Pelhřimov	4	2	4	4	1	3	5	–	23	67	75
8. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	4	0	4	4	2	3	–	–	17	70	72
9. Vojtěch Jelínek	G, Neumannova, Žďár n. S.	4	2	4	–	2	3	2	–	17	49	60
10.–11. Pavel Kůs	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	53
10.–11. Pavel Souček	G, Nymburk	4	0	4	–	2	–	–	–	10	76	53
12. Kuba Pilař	G J. Resslera, Chrudim	4	0	4	–	1	–	5	–	14	55	52
13.–14. Jaroslav Stránský	G, Tišnov	4	–	3	0	1	–	3	–	11	60	46
13.–14. Minh Tran Anh	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	–	–	–	2	4	5	–	13	66	46
15. Marek Otýpka	G, Židlochovice	4	–	4	–	1	–	–	–	9	52	45

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	8	6	35	100	142
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	2	4	4	2	4	8	7	32	99	140
2.–3. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	1	2	4	4	2	5	5	6	29	84	116
2.–3. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	3	2	3	3	2	3	3	7	26	82	116
4. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	2	2	–	2	4	8	6	27	79	106
5. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	1	2	4	3	2	4	7	3	26	70	100
6. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	2	2	4	4	3	3	–	6	24	86	90
7. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	80
8. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	1	–	4	–	3	–	–	–	8	80	71
9. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	3	–	3	3	3	4	–	–	16	73	67
10. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	1	–	4	1	2	–	4	–	12	69	66
11. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	2	2	3	4	2	–	5	–	18	68	65
12.–13. <i>Samuel Kočiščík</i>	G Poštová, Košice	1	0	4	–	2	3	5	–	15	66	59
12.–13. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	–	4	–	2	–	5	–	13	77	59
14.–15. <i>Lucie Brichová</i>	PSG jazykové, HK	1	0	1	–	–	3	4	2	11	44	50
14.–15. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	2	2	4	4	2	–	–	3	17	78	50
16. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	2	4	3	1	–	–	–	10	72	47
17. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	1	–	–	–	–	–	–	–	1	60	44
18. <i>Václav Rozhoň</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	7	7	91	41
19. <i>Luboš Krnáč</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	–	–	–	–	–	–	4	5	9	61	39
20. <i>Kateřina Smítalová</i>	G, Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	36
21. <i>Kryštof Šulc</i>	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	1	–	1	3	1	2	–	–	8	66	35

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	8	6	35	100	142
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	1	4	4	4	2	4	8	6	33	96	137
2. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	3	2	4	4	3	5	9	7	37	83	101
3. <i>Lýdia Janitorová</i>	G, Šrobárova, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	49
4. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	–	–	2	–	3	–	–	–	5	67	47
5. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	45
6. <i>Míchal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	33
7. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	30
8. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	–	–	4	–	–	–	–	–	4	83	25
9. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	24
10.–11. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	21
10.–11. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	21
12. <i>Marek Martaus</i>	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	20
13.–14. <i>Norbert Slivka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	19
13.–14. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDaG, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	19
15. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	18
16.–18. <i>Július Koval</i>	G Senica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	15
16.–18. <i>Andrej Novák</i>	G M. Hattalu, Trstená	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	15
16.–18. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	15
19. <i>Daniěl Slezák</i>	Svobodná chebská škola	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	13
20.–21. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	12
20.–21. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	12



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.