

## Úloha II.E ... kutululů

8 bodů; průměr 4,02; řešilo 45 studentů

Máme nakloněnou rovinu, na které postrčíme míček, aby se začal kutálet bez prokluzování směrem nahoru po nakloněné rovině. Změřte závislost rychlosti míčku na čase a určete závislost ztráty energie na čase. Nakloněná rovina nechť svírá úhel s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha \sim 10^\circ$ . Nezapomeňte popsat parametry vašeho míčku.

*Karel se zamyslel nad výrokem „koulelo se koulelo“.*

## Teorie

Máme určit závislost ztráty energie na čase, proto se nejprve musíme zamyslet nad tím, jaké druhy energie budeme započítávat do ztrát a jaké nikoli. Do ztrát budeme započítávat různá tření (o vzduch, podložku), ale nebudeme započítávat energii potenciální, kinetickou a rotační.

Zákon zachování mechanické energie říká

$$E_k + E_p = E = \text{konst.},$$

tedy součet energie potenciální a kinetické translační a rotační by měl být konstantní, pokud by šlo o pohyb beze ztrát, tj. všechny působící síly by byly konzervativní.

Proto můžeme ztrátovou energii v čase  $t$  definovat dle vztahu

$$E_z(t) = E_k(t) + E_p(t) - (E_k(t=0) + E_p(t=0)),$$

kde  $E(t=0)$  je energie v čase  $t=0$  a  $E(t)$  je daná energie měřená v čase  $t$ . Poslední dva členy můžeme anulovat vhodnou volbou nulové hladiny potenciální energie. Nulovou hladinu potenciální energie volíme v místě, kam by kulička došla v případě, že by pohyb probíhal bez tření. Proto pro ztrátovou energii můžeme napsat

$$E_z = E_k + E_p.$$

Pokud kulička rotuje okolo osy kolmé na směr pohybu a paralelní k nakloněné rovině a označíme-li  $I$  moment setrvačnosti kuličky vůči této ose, můžeme pro  $E_k$  a  $E_p$  napsat

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgh, \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{v}{R}\right)^2 - mgh, \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) - mgs \sin \alpha, \end{aligned}$$

kde jsme označili:  $\alpha$  sklon nakloněné roviny,  $h$  vertikální vzdálenost od nulové hladiny potenciální energie,  $s$  vzdálenost po nakloněné rovině od místa obratu,  $m$  hmotnost kuličky a  $g$  tíhové zrychlení (definujeme  $h, s > 0$ ).

Pro kouli platí  $I/(mR^2) = 2/5$ , tj. pro ztrátovou energii můžeme psát

$$\frac{E_z}{m} = \frac{7}{10}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (1)$$

Nyní určíme moment setrvačnosti pro homogenní kulovou slupku o vnitřním poloměru  $R_1$  a vnějším  $R_2$ . Vztah pro moment setrvačnosti koule můžeme přepsat do tvaru

$$I_k = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\rho \frac{4}{3}\pi R^5 = \frac{8\pi}{15}\rho R^5.$$

Moment setrvačnosti kulové slupky bude rozdílem momentů setrvačnosti koulí o poloměrech  $R_2$  a  $R_1$ . Hmotnost této slupky je

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3).$$

Proto

$$I_s = I_{R_2} - I_{R_1} = \frac{8\pi}{15}\rho(R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5}M\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Pro tenkou slupku pak proto platí

$$I_{ts} = \frac{2}{3}MR^2.$$

Pro energetické ztráty kulové slupky pak platí

$$\frac{E_z}{m} = \frac{5}{6}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (2)$$

Nyní určíme vzdálenost, do které by kulička vyjela od počátku, pokud bychom neuvažovali tření, tj. hladinu nulové potenciální energie. Je-li zrychlení kuličky  $a_k = (5/7)g \sin \alpha$  (lze odvodit ze silového rozkladu), pak vzdálenost teoretického bodu obratu je

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{2a_k}, \quad (3)$$

kde  $v_0$  je rychlost, kterou jsme kuličce na začátku udělili.

### Měření

Vyrobili jsme nakloněnou rovinu, na které byly připevněny špejle zaručující pohyb kuličky pouze v přímém směru, viz obrázek 1. Délka nakloněné roviny byla  $s_0 = (1\,500 \pm 5)$  mm, výška byla  $h_0 = (66 \pm 1)$  mm, proto je sklon  $\alpha = (2,52 \pm 0,04)^\circ$ . Úhel jsme volili záměrně menší, aby měly odporové síly větší vliv.

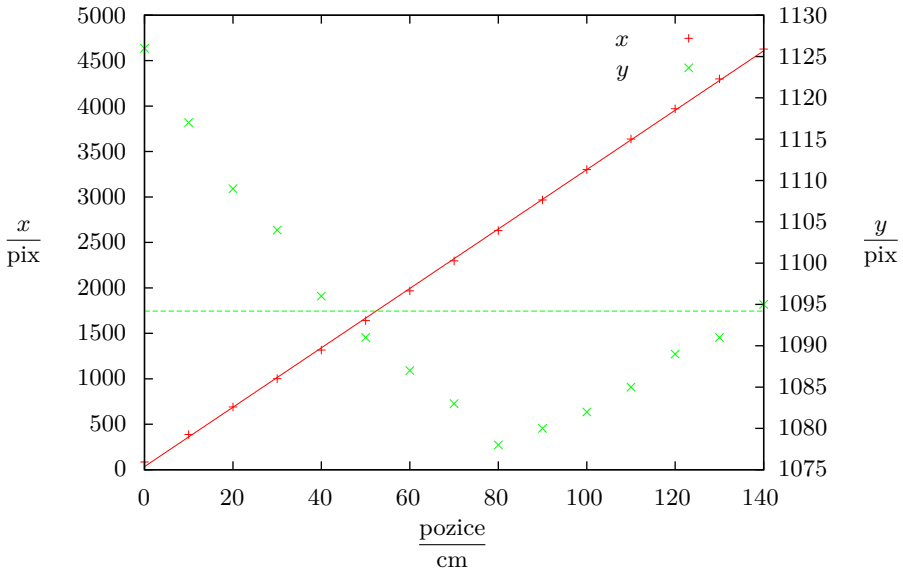


Obr. 1: Fotografie nakloněné roviny

Na nakloněné rovině jsme měli připevněno též délkové měřítko, abychom mohli přepočítat souřadnici v pixelech na polohu kuličky na nakloněné rovině.

Pro kalibraci jsme stejnou situaci vyfotili v rozlišení  $5\,184 \times 3\,456$ . Zaznamenali jsme si  $x$ -ovou a  $y$ -ovou souřadnici bodů na měřítku, a to po deseti centimetrech. Na grafu 2 je uvedena závislost  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice na poloze na měřítku. Na levé ose je  $x$ -ová souřadnice a na pravé ose je  $y$ -ová. Odchylka od kalibračních přímek je menší než 50 pixelů, což odpovídá 1,5 cm, tedy chyba je v řádu procenta. Upozorňujeme, že na levé a pravé ose je jiná škála. Výsledkem lineární kalibrace je škálovací faktor  $\xi = (32,7 \pm 0,2) \text{ pix} \cdot \text{cm}^{-1}$ .

K měření jsme použili dvě různé kuličky, jednak kuličku z myši, jednak kuličku z deodorantu. Kulička z myši byla plná, kulička z deodorantu byla prázdná, proto jsme si v teorii připravovali též momenty setrvačnosti pro kulovou slupku.



Obr. 2: Kalibrační křivky

Pomocí programu Tracker jsme určili závislost polohy a rychlosti na čase. Abychom odstranili šum, vypočítali jsme vždy průměr 7 okolních hodnot. Pak dle vztahu (1) určíme závislost energetické ztráty na poloze kuličky z myši a podle vztahu (2) určíme energetické ztráty kuličky z deodorantu.

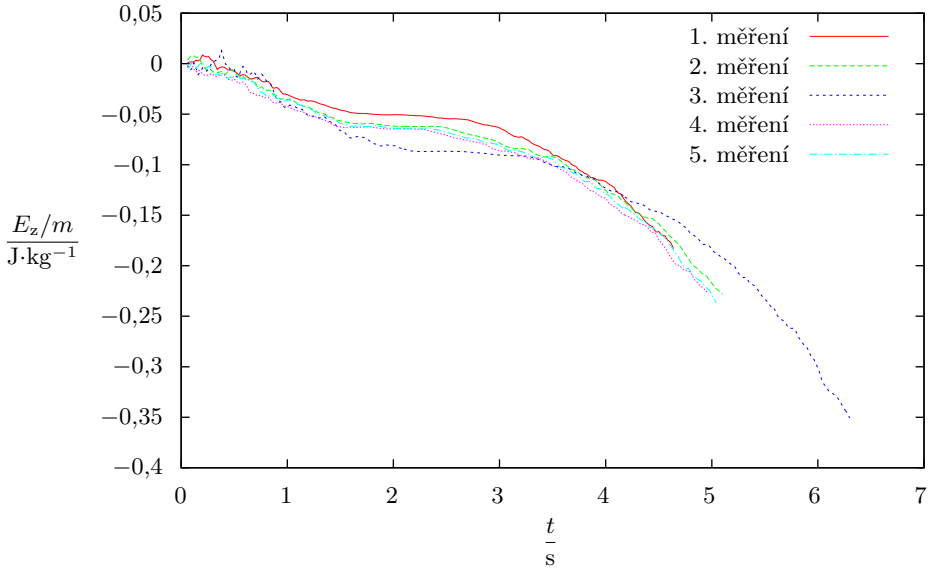
Na grafech jsou uvedeny měrné ztráty energie, tedy vydělené hmotností odpovídající kuličky. Graf závislosti energetických ztrát pro kuličku z myši je uveden na obrázku 3, týž výsledek pro kuličku z deodorantu je uveden na obrázku 4. Poloha v pixelech byla přepočítána pomocí kalibrace  $\xi$  a informace, že kamera zabírala stejnou oblast, ale místo 5184 pixelů měla pouze 1280 pixelů, dává škálovací faktor pro kameru  $\xi_k = (8,06 \pm 0,04) \text{ pix}\cdot\text{cm}^{-1}$ . Video bylo pořizováno s frekvencí 50 fps.

Nejzajímavějším výsledkem by samozřejmě bylo určení závislosti zrychlení kuličky na rychlosti pohybu. Tyto závislosti jsou uvedeny na obrázku 5.

### Diskuse

Křivky závislosti ztrátové energie na čase jsou značně zašumělé, protože určování polohy je limitováno jednak rozlišovací schopností kamery, jednak přesností identifikace polohy kuličky na videozáznamu. Tento šum je vidět, i když jsme použili filtrování. Toto filtrování není možné použít na větším rozsahu, protože by mohly být nesprávně shlazeny extrémy.

Pro kuličku myši odpovídají výsledky předpokladu, tj. ztrátová energie s časem klesá. Je zajímavé, že kulička přijde o větší část energie na sestupné části trajektorie. Odchytky mezi jednotlivými měřeními jsou způsobeny různými počátečními rychlostmi. Jistou malou odchytkou mohlo způsobit gumové opláštění kuličky, které zvětšovalo poloměr, ale nikoli moment setr-



Obr. 3: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši

vačnosti vůči středu. Další odchylku mohly způsobit kolejničky, kvůli čemuž kulička musela rotovat rychleji. Tyto dvě systematické chyby se ale naštěstí odečítají.

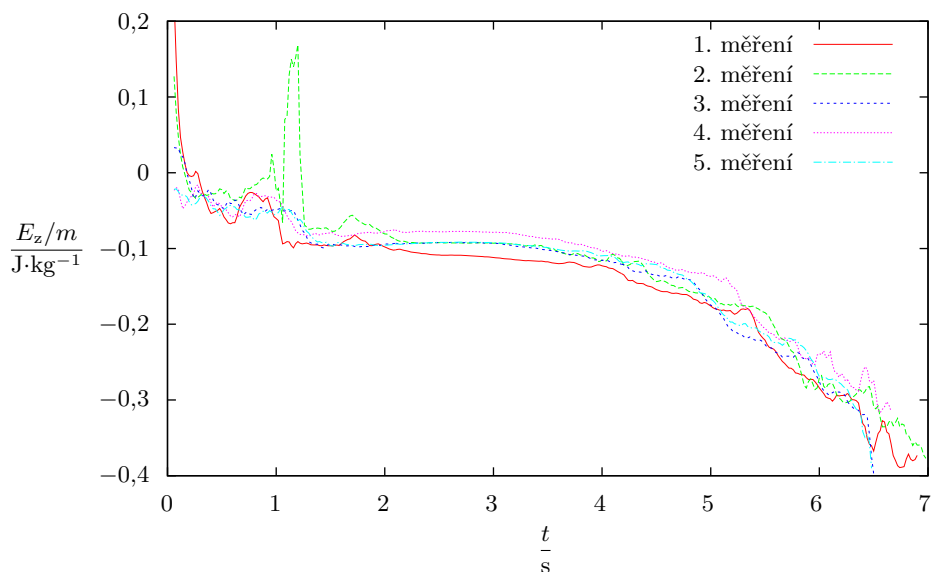
Pro kuličku z deodorantu můžeme pozorovat strmý pokles ztrátové energie na počátku pohybu především pro první dvě měření. Tato odchylka od modelu se dá vysvětlit prokluzováním kuličky, tj. platí  $v \not\propto \omega R$ . Další zajímavostí je vysoký peak pozorovaný při druhém měření. Tento je způsoben právě vyhodnocováním polohy kuličky pomocí programu Tracker — referenční bod se posunul. Zajímavostí je, že pokud bychom pro výpočet ztrátové energie použili vztah (1) a nikoli (2), pozorovali bychom nárůst ztrátové energie okolo horní úvrati pohybu. Můžeme tedy toto měření použít i pro vyvrácení hypotézy o plnosti kuličky.

Závislost zrychlení na rychlosti je bohužel velmi zašumělá, a proto z ní něco usuzovat lze pouze velmi těžší. Je zde vidět, že zrychlení se blíží k nule pro  $v \rightarrow -\infty$ . Tato asymptotika je pochopitelná, protože po dlouhé době, kdy jede kulička po nakloněné rovině dolů, dosáhne ustáleného stavu a bude se pohybovat s nulovým zrychlením. Jednoduše nevysvětlitelná je ale pravá část grafu, kde můžeme pozorovat klesající velikost zrychlení pro velké (počáteční) rychlosti. Jedním z vysvětlení je vyrovnávání momentu hybnosti a hybnosti třením o podložku, v této době není splněn předpoklad  $v = \omega R$ .

Pokud by tyto hodnoty nebyly zatíženy šumem, mohli bychom tvořit hypotézy, jaké jsou původní třecích sil působících v systému.

### Závěr

Změřili jsme závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši, viz graf 3, a také pro dutou kuličku z deodorantu, viz graf 4. Pokusili jsme se analyzovat původ třecích sil, ale bohužel



Obr. 4: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z deodorantu

neúspěšně, viz graf 5.

#### Poznámky k došlým řešením

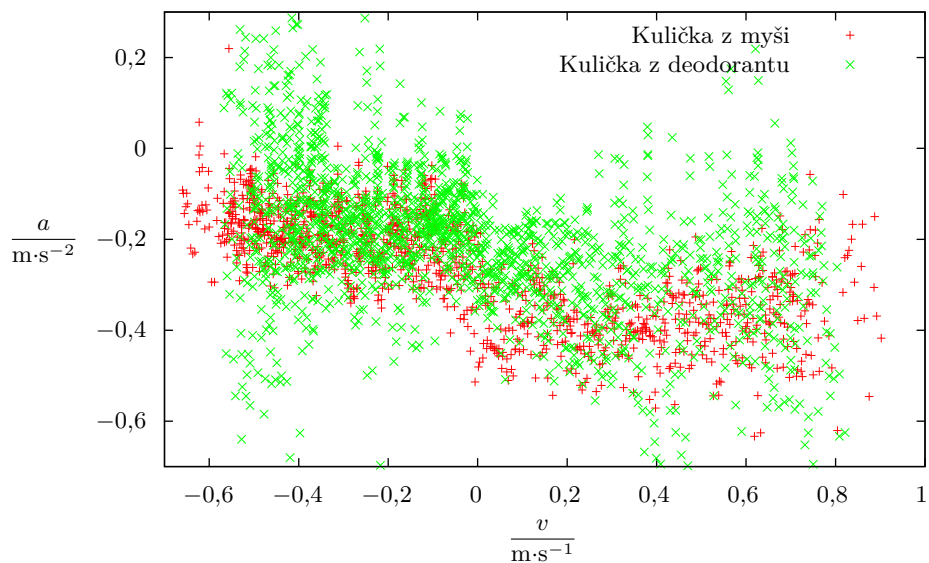
Nejčastější chybou v došlých řešeních bylo nepochopení základního principu úlohy a následné zanedbání odporových sil působících na míček. Místo ztrát mechanické energie se pak v řešeních často objevoval prostý vývoj hodnoty kinetické energie v čase. Dalším častým problémem bylo opomenutí složky kinetické energie při rotaci, což vedlo také k nesprávnému odvození vztahu pro zrychlení. Někteří řešitelé si také neuvědomili, že pro sestrojení grafu závislosti rychlosti na čase je potřeba proměřit závislost polohy na čase v několika krátkých úsecích, a místo toho měřili pouze průměrnou rychlost. Mnoho řešitelů také opominulo tu část pohybu míčku, kdy se vrací zpět do startovní pozice. Velmi často se také vyskytovaly problémy s počtem platných číslic, popisováním os grafu a podobně. Nakonec bychom rádi vyzdvihli řešení Martina Štykse, který provedl pečlivé měření pro tři různé míčky či míče, a dále řešení Jakuba Kvorcky a Filipa Ayaziho, kteří dodali nejlepší řešení po stránce teoretické.

*Michal Červeňák*  
miso@fykos.cz

*Lukáš Ledvina*  
lukasl@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



Obr. 5: Závislost zrychlení na rychlosti