

Úloha III.P . . . zahvízdej mi něco

5 bodů; průměr 2,10; řešilo 31 studentů

Vysvětlete, na jakém principu funguje hvízdání pomocí úst. Uvažujte přitom nejprve jednoduché modely a postupně přejděte ke složitějším. Pak vyberte nejlepší z nich a na základě něj odhadněte, v jakém rozsahu se může pohybovat základní frekvence hvízd. (Pokud umíte hvízdát, můžete zkusit posoudit přesnost vašeho odhadu pomocí experimentu.)

Mirek chce nenápadně zjistit, kolik řešitelů taky neumí hvízdát.

Tato úloha má plné právo nazývat se problémovou. Jak si ukážeme, základní fyzikální principy hvízdání nejsou příliš složité, nicméně přesný popis jevu není možný kvůli komplikované stavbě ústní dutiny. Budeme se snažit spíše o srozumitelné vysvětlení zkoumaných jevů než o podrobný matematický popis.

V následujícím textu si zopakujeme, co to je vlastně zvuk, podíváme se na stojaté vlnění ve vzduchovém válci, naučíme se něco málo z hudební teorie a seznámíme se s principem akustických rezonátorů, konkrétně Helmholtzova rezonátoru. Nakonec zkusíme nabyté poznatky aplikovat na samotné hvízdání ústy a zamyslíme se nad rozdíly mezi modelem a skutečností.

Zvuk

Jako zvuk v běžném životě označujeme vjem, který jsme schopni vnímat pomocí sluchu. Ve fyzice pod tímto pojmem obvykle rozumíme longitudinální (podélné) mechanické vlnění ve hmotném prostředí, nehledě na to, zda se jedná o slyšitelnou frekvenci. Akustickou (zvukovou) vlnu si můžeme představit jako periodické zhušťování a rozpínání látkového prostředí, v našem případě vzduchu. Při popisu vlnění se díváme buďto na výchylku jednotlivých částic kolem jejich středních poloh, nebo na okamžitou výchylku objemového elementu¹

$$y(x, t) = y_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_s} \right) \right], \quad (1)$$

kde y_0 je amplituda a c_s rychlost zvuku v daném prostředí. Uvažujeme zde rovinnou vlnu, kde x určuje vzdálenost daného bodu vlny od bodového zdroje zvuku. Rychlost zvuku v plynném prostředí je přibližně dána vztahem

$$c_s = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (2)$$

kde κ je Poissonova konstanta ideálního plynu a ρ je jeho hustota. Amplitudou zvukového vlnění se zde zabývat nebudeme (závisí na ní především intenzita zvuku), důležitá pro nás bude frekvence, resp. vlnová délka. Jednak proto, že podle frekvence určujeme výšku tónu, a jednak proto, že vlnová délka určuje módy stojatého vlnění, které mohou existovat v rezonančním válci daných rozměrů.

Stojaté vlnění ve vzduchovém válci

Nyní se podíváme na to, jak se chová zvukové vlnění v dlouhé válcové dutině naplněné vzduchem. Pro jistotu zde připomeňme vztahy mezi vlnovou délkou λ , frekvencí f a úhlovou frekvencí ω

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_s}{\lambda}.$$

¹Místo výchylky objemového elementu či částic můžeme vlnění také popsat pomocí lokální odchylky tlaku plynu

$$p(x, t) = p_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_s} \right) \right].$$

Stojaté vlnění vzniká interferencí dvou shodných vln, přichozí a odražené. Superpozicí dvou vln popsaných rovnicí (1) dostaneme v jednorozměrném případě vztah

$$y(x, t) = 2y_0 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega x}{c_s}\right) = 2y_0 \cos(2\pi f t) \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right),$$

kde $2y_0 \sin(2\pi x/\lambda)$ je amplituda stojatého vlnění. Pro lepší představu si nejprve myslíme, že místo vzduchového válce máme strunu. Pevně uchycený konec struny odpovídá uzavřenému válci, volný konec struny otevřenému. Při odrazu na volném konci má odražená vlna stejnou fázi jako vlna přichozí, dochází tedy ke konstruktivnímu skládání a v bodě vznikne kmitna, tj. místo s maximální amplitudou. Při odrazu na pevném konci je fáze odražené vlny opačná, skládání je pak destruktivní a v bodě vznikne nehybný uzel.

Chování struny odpovídá harmonickému pohybu částic při šíření zvuku. Na uzavřeném konci zřejmě nemůže docházet k posunu objemových elementů vzduchu, částice se zde pružně odrážejí, což odpovídá opačné fázi vlny. Na pevném konci je tedy uzel. Pro změny tlaku však dostaneme opačný výsledek, neboť odrazy částic představují harmonické změny tlaku v oblasti uzavřeného konce (uzavřený konec působí silou proti pohybu částic), máme zde tedy „tlakovou kmitnu“. Na otevřeném konci vzduch volně proudí, z pohledu částic zde bude kmitna, zatímco tlak se vyrovnává s okolím, bude mít proto na otevřeném konci uzel.² Fáze harmonických změn tlaku a polohy částic jsou tedy posunuty ve fázi o $\pi/2$.

Zajímat nás bude především případ, kdy jsou oba konce otevřené. Jeden konec představuje dýchací ústrojí, druhý konec jsou ústa. Je zřejmé, že aproximovat ústní dutinu trubicí není možné, představujeme si proto pro teď, že se nesnažíme hvízdát, ale hraje třeba na píšťalu. Jaké stojaté vlnění může v píšťale vznikat? Jestliže jsou oba konce otevřené, musí se v nich nacházet kmitny. Pokud jsou to jediné kmitny v celém válci o délce L , platí pak $L = \lambda/2$. Mezi kmitnami se v tomto případě nachází pouze jeden uzel. Bude-li uzlů $n \in \mathbb{N}$, bude platit obecně $L = n\lambda/2$. Frekvence vln je potom

$$f = \frac{nc_s}{2L}. \quad (3)$$

Ještě poznamenejme, že šířka válce musí být menší než vlnová délka, abychom mohli zanedbat kolmé šíření.

Trocha hudební nauky

Nyní si musíme objasnit, proč vlastně chceme, aby byl zvuk tvořen stojatým vlněním určité frekvence a ne směsí libovolných vln s proměnnými frekvencemi. Akustické kmity, které nemají konstantní frekvenci, vnímáme jako hluk. Oproti tomu pravidelné kmitání naše sluchová centra přeloží jako tón. Sami však možná víte, že pokud si necháte na počítači vygenerovat tón jedné frekvence, může být jeho poslech poměrně nepříjemný (zvláště jedná-li se o vysoké frekvence). Každý hudební tón totiž obsahuje další, tzv. alikvotní neboli vyšší harmonické tóny. V případě píšťaly se jedná o ty frekvence, pro něž je v rovnici (3) $n = 2, 3, \dots$. Pokud tedy budeme hledat frekvenci hvizdu, bude nás vždy zajímat první harmonická, tj. $n = 1$.

Také budeme chtít později určit tónový rozsah hvizdu. K tomu potřebujeme vědět, že v evropské hudbě se používá rovnoměrné temperované ladění, které rozdělí každou oktávu (rozdíl

²Ve skutečnosti se tlak vyrovná až vně trubice, uzel tedy není přímo v rovině otevřeného konce, ale tuto skutečnost si tady dovolíme zanedbat.

mezi dvěma sousedními harmonickými frekvencemi) na dvanáct tónů. Frekvence každého tónu je vždy rovna $\sqrt[12]{2}$ násobku frekvence tónu pod ním. Při přiřazování tónů frekvencím pak můžeme vyjít z komorního A (nejčastěji 440 Hz), nebo použít převodní tabulku.³

Jak jsme už ale zmínili výše, pomocí chvění vzduchu ve vzduchové trubici hvízdání modelovat nelze. Jaký vhodný model tedy můžeme použít?

Helmholtzův rezonátor

Resonancemi vzduchu v dutinách se zabýval významný německý fyzik a fyziolog Hermann von Helmholtz, po němž jsou tyto resonance také pojmenovány. Helmholtz při svém výzkumu v oblasti akustiky používal k identifikaci frekvencí jednotlivých tónů mosaznou baňku s úzkým hrdlem, kterou dnes nazýváme Helmholtzův rezonátor.⁴ Princip funkce Helmholtzova rezonátoru je podobný jako v případě hry na skleněné láhve. Vnější silou je dovnitř dutiny vtlačen vzduch, který po zeslabení vnější síly opět uniká ven. Tlak v dutině se sníží až na hodnotu menší, než je okolní tlak, proto je vzduch opět vtažen dovnitř a proces se opakuje, pouze s menší intenzitou.

Oscilace vzduchu v rezonátoru budeme modelovat pomocí harmonického oscilátoru (pružiny). V hrdle se nachází masa vzduchu o hmotnosti m , tuhost systému definujeme jako

$$k = - \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0},$$

kde y je výchylka od ekvilibría y_0 a F je okamžitá síla působící na masu vzduchu v hrdle. Pro úhlovou frekvenci oscilací platí

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = - \frac{1}{m} \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0} = - \frac{S}{m} \left. \frac{dp}{dy} \right|_{y=y_0}, \quad (4)$$

kde S je průřez hrdla a $p = F/S$ je okamžitý tlak vzduchu. Nyní zavedeme předpoklad, že se jedná o adiabatický děj. Tento předpoklad je nutný také pro platnost vztahu (2). Při odvozování Poissonova zákona pro adiabatický děj dojdeme přes první větu termodynamickou, stavovou rovnici ideálního plynu a vztah pro výpočet vnitřní energie ideálního plynu⁵ k rovnici

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V}, \quad (5)$$

kde κ je Poissonova konstanta ideálního plynu a V je objem celé rezonanční komory včetně hrdla. V rovnici (4) můžeme psát $dy = dV/S$, neboť ke změně objemu dochází ve válcovitém hrdle komory, kde zřejmě $V(y) \propto y$. Po této úpravě dosadíme z (5), dostaneme

$$\omega^2 = \frac{\kappa S^2 p_0}{m V_0}.$$

Veličiny p_0 a V_0 opět označují rovnovážné hodnoty.

Dále si můžeme hmotnost masy vzduchu v hrdle vyjádřit pomocí hustoty vzduchu ρ , délky hrdla L a průřezu hrdla jako

$$m = \rho S L \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\kappa S p_0}{\rho L V_0}. \quad (6)$$

³<http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html>

⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_resonance

⁵Odvození není těžké, ale již bychom příliš odbočili. Výpočet najdete např. na české i anglické Wikipedii v článku Adiabatický děj (Adiabatic process).

Umocněním vztahu (2) dostaneme

$$c_s^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho}$$

a dosazením do (6) získáme

$$\omega^2 = \frac{c^2 S}{LV_0}.$$

Tento vztah nakonec přepíšeme pomocí $\omega = 2\pi f$ jako

$$f = \frac{c_s}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{LV_0}}. \quad (7)$$

Empirická měření ukazují⁶, že místo délky L je přesnější uvažovat ekvivalentní délku $L_{\text{eq}} = L + 0,4D$, kde D je hydraulický průměr hrdla. Proto pokud neplatí $L \gg D$, měli bychom ve vztahu (7) psát L_{eq} místo L .

Hvízdání

Nyní se už konečně podívejme na samotné hvízdání. Na rozdíl od Helmholtzova rezonátoru má rezonanční dutina (ústní dutina) ještě jeden otvor (hrtan), ze kterého proudí dovnitř dutiny vzduch hnaný z plic. To pro nás však není podstatné, důležité je, že má vzduch v dutině vyšší tlak a uniká ven úzkým otvorem (ústy). Navíc lze také hvízdát i při nasávání vzduchu, potom je princip zcela identický.

Podle článku Whistling na anglické Wikipedii⁷ mohou při hvízdání ústy zůstávat rty v téměř neměnné pozici, přičemž výšku tónu měníme pouze pozicí jazyka.⁸ Rty a zuby mění pouze barvu tónu. Potom by ve vztahu (7) byl jedinou proměnnou objem V_0 . Velikost objemu vzduchu, který se podílí na resonanci v ústní dutině, závisí na tom, jak moc přiblížíme jazyk k hornímu patru. Teoreticky bychom mohli snížit objem téměř na nulu, frekvence by potom nebyla shora omezena. Dolním limitem je objem ústní dutiny.

Podle lorda Rayleigh⁹ se frekvence hvizdu může pohybovat v rozsahu 500 Hz až 4 200 Hz. Zkusme rozumně zvolit hodnoty veličin v (7) a provést dolní odhad. Rychlost zvuku je přibližně $c_s \approx 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, otvor mezi rty nebude mít menší průřez než $S \approx 0,5 \text{ cm}^2$, objem úst s jazykem u dolního patra odhadneme na $V_0 \approx 50 \text{ ml}$. Nejhuře se odhaduje délka L , předpokládáme, že je rovna tloušťce rtu $L \approx 5 \text{ mm}$. Po dosazení dostaneme nejnižší možnou frekvenci

$$f_{\text{min}} \approx 700 \text{ Hz}.$$

Zahrneme-li hydraulický průměr $D \approx 5 \text{ mm}$, dostaneme o něco nižší frekvenci $f_{\text{min}} \approx 500 \text{ Hz}$. Náš odhad je spíše řádový, hodnoty S i L jsou špatně měřitelné a liší se člověk od člověka, takže s výsledkem můžeme být velmi spokojeni. Při horním odhadu snižujeme V_0 , dolní mez je však těžké stanovit. Resonanční objem určitě může poklesnout až na jednotky mililitrů, pro $V_0 = 2 \text{ ml}$ dostaneme pětkrát vyšší frekvenci

$$f_{\text{max}} \approx 2 500 \text{ Hz}.$$

To je méně, než tvrdí Rayleigh, ale vzhledem k hrubosti odhadů je to stále výborný výsledek.

⁶http://www.lightandmatter.com/html_books/0sn/ch05/ch05.html#Section5.5

⁷<http://en.wikipedia.org/wiki/Whistling>

⁸<http://en.wikipedia.org/wiki/Whistling>. Pozici rtů nemůžeme příliš měnit proto, že při zmenšení otvoru dochází k zadušení tónů, zatímco při zvětšení otvoru není tón čistý a rychle přechází v šum

⁹<http://mysite.du.edu/~jcalvert/waves/pipes.htm>

Podle našeho odhadu se tónový rozsah hvízdání pohybuje v rozmezí H_4 až $D_7^\#$. Pro srovnání, rozsah sopránu je přibližně C_4 až C_6 .¹⁰ Zajímavé je, že pokud se vrátíme k modelu vzduchové trubice a použijeme pro určení frekvence hvizdu vztah (3), do nějž dosadíme hloubku ústní dutiny $L \approx 10$ cm, dostaneme frekvenci $f \approx 1500$ Hz, což je také řádově dobrý výsledek. Fyzikálně však nemůže být správný, protože šířka ústní dutiny je srovnatelná s její hloubkou (transversální šíření) a také víme, že při změně polohy jazyka v ústech necháváme vzduch stále volně proudit, nedochází tedy ke zkrácení délky L . Výšku tónu by pak nebylo možné modulovat.

Experimentální ověření

Co se týče experimentálního ověření výsledků, tak autor tohoto textu hvízdát neumí, nicméně se našel dobrovolný experimentální subjekt, jehož tónový rozsah hvizdu byl změřen pomocí programu Audacity. Nejnižší naměřená základní frekvence byla 440 Hz (A_4), nejvyšší 1 400 Hz ($\sim F_6$). Na dolní hranici byl záznam již dost zašumělý a nešlo již dost dobře rozlišit mezi základní frekvencí a druhou harmonickou, proto byl nejnižší tón dodatečně stanoven poslechem oproti klavíru. Měření je v souladu s naším i Rayleighovým odhadem, spíše nižší rozsah (méně než dvě oktávy) je čistě otázkou trénovanosti subjektu. Pro zajímavost – podle Guinnessovy knihy rekordů¹¹ je v současnosti nejvyšším tónem dosaženým při hvízdání nota H_7 (3 951 Hz). Nejnižším zahvízdaným tónem je F_3 (174,6 Hz).¹²

Závěr

Co říci závěrem? V úvodu jsme předesílali, že se pokusíme spíše o kvalitativní popis, nakonec se nám však zkoumaný děj povedlo i docela dobře kvantifikovat. Musíme však mít na paměti, že jsme si spoustu věcí zjednodušili a nemáme záruku, že je náš model skutečně fyzikálně správný. Podrobný rozbor by vyžadoval exaktní výpočty a pravděpodobně bychom skončili u modelování proudění vzduchu v ústní dutině. O modelování naleznete více v odkazu v poznámce,¹³ kde se autor práce zabývá prouděním vzduchu ve flétnách.

Komentář k došlým řešením

Ve značném počtu řešení se vyskytoval předpoklad, že v ústní dutině vzniká stojaté vlnění, podobně jako ve flétnách. Jak jsme však uvedli výše, tento model není vhodný z důvodu složité stavby ústní dutiny. Někteří z vás tvrdili, že hvízdání je umožněno díky rezonanci rtů – při hvízdání sice můžeme zaznamenat jemné chvění rtů a tváří, ale to je pouze důsledkem rezonance vzduchu v ústní dutině; hvízdát lze i s „inhibovanými“ rty. V nemalém počtu řešení se objevil Helmholtzův rezonátor jako vhodný model pro hvízdání, ale občas jste přisuzovali schopnost měnit frekvenci hvizdu spíše změně velikosti otvoru mezi rty než změně rezonančního objemu ústní dutiny. Velikost otvoru, kterým vzduch uniká, sice ovlivňuje základní frekvenci, ale pouze omezeně, neboť s příliš otevřenými ústy přechází hvizd ve foukání (šum) a s téměř uzavřený-

¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Vocal_range. Oktávy značíme dolním indexem podle polohy na moderním pianě od A_0 po C_8 , komorní A je A_4 .

¹¹<http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/highest-note-whistled>

¹²<http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/lowest-note-whistled>

¹³<http://www.lam.jussieu.fr/Publications/Theses/these-patricio-de-la-cuadra.pdf>

mi ústy je hvizd ztlumen. Pochvala patří těm řešitelům, kteří Helmholtzovu rezonanci nejen srozumitelně popsali, ale také správně odvodili vztah pro základní frekvenci.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.