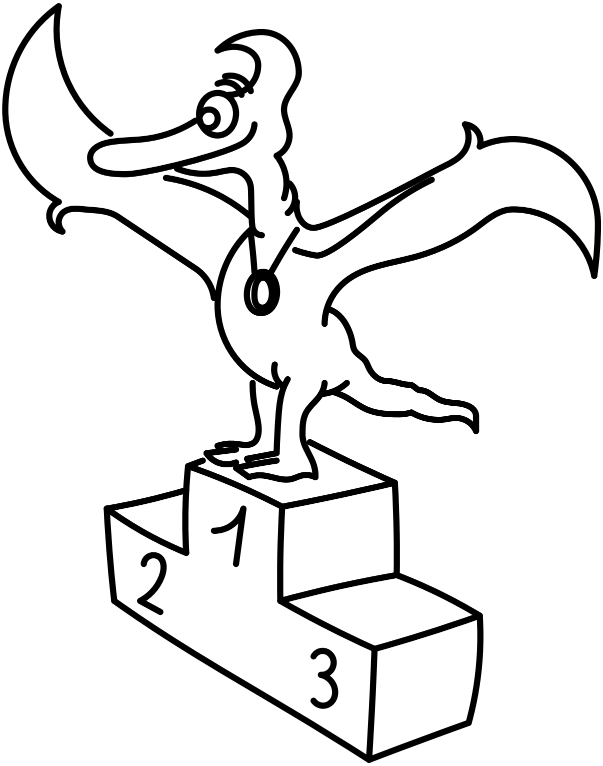
# Řešení úloh 10. ročníku FYKOSího Fyziklání



## Úloha AA ... šla Nanynka do zelí

*Šla Nanynka do zelí, aby natrhala lupení. Zelí je od Nanynky vzdálené $s = 10\,\mathrm{m}$, Nanynčina rychlost je $v = 0{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Za jaký čas $t$ dojde Nanynka do zelí?* *Aleš měl hlad.*

Úloha je triviální, kouknu se a vidím $t = s/v = 100\,\mathrm{s}$.

***Aleš Podolník***
`ales@fykos.cz`

## Úloha AB ... čtvrtmaraton

*Karel se rozhodl, že se zúčastní běžeckého závodu na $12\,\mathrm{km}$. V první třetině délky trati běžel rychlostí $2v$, v prostřední třetině běžel rychlostí $v$ a v poslední třetině trati už jen rychlostí $v/2$. Závod dokončil v čase $1{,}2\,\mathrm{h}$. Jakou rychlostí běžel v prostřední třetině trati? (Výsledek uveďte v $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.)*
*Michal zjistil, že v aplikaci Runtastic nelze zjistit průměrnou rychlost za zvolený úsek trati :-(.*

Podle vzorce

$$t = \frac{s}{v}$$

sestavíme rovnici

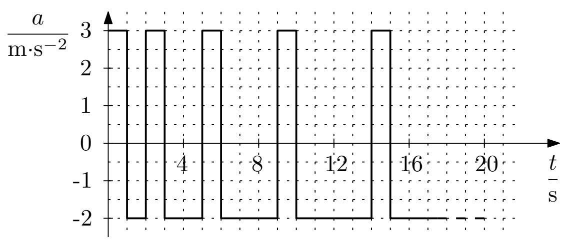
$$1{,}2\,\mathrm{h} = \frac{4\,\mathrm{km}}{\frac{v}{2}} + \frac{4\,\mathrm{km}}{v} + \frac{4\,\mathrm{km}}{2v}\,.$$

Tuto rovnici jednoduše vyřešíme a dostáváme výsledek $v = \frac{35}{3}\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 11{,}7\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

***Michal Nožička***
`nozicka@fykos.cz`

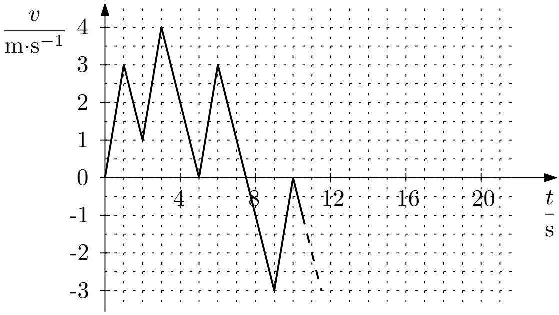
## Úloha AC ... stará raketa

*Z povrchu země startuje raketa, ale má porouchaný motor, který pracuje nepravidelně. Výsledné zrychlení rakety ve směru kolmo vůči povrchu se proto vyvíjí podle přiloženého obrázku. Určete, v jakém čase dosáhne raketa maximální výšky od bodu startu. Počáteční rychlost rakety je nulová.* *Mirek koukal na motory ve Star Wars.*




Obr. 1: Závislost zrychlení na čase.

Vidíme, že se raketa pohybuje vždy rovnoměrně zrychleně (zpomaleně). Snadno proto nakreslíme k zadanému grafu odpovídající graf závislosti rychlosti na čase – viz obrázek, kde kladná rychlost značí směr pohybu od země. Je zřejmé, že dokud se raketa pohybuje s kladnou rychlostí, její vzdálenost od země narůstá. Jak je vidět z obrázku, až do času $t = 7{,}5\,\mathrm{s}$ je rychlost vždy kladná, poté vždy záporná. Do maximální vzdálenosti od země se proto raketa dostane právě v čase $t = 7{,}5\,\mathrm{s}$. Pokud by nás čistě ze zvědavosti zajímala hodnota této vzdálenosti, stačí určit plochu pod grafem mezi počátkem a časem $t$.




Obr. 2: Závislost rychlosti na čase.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha AD ... nakloněná páka

*Máme tyč zanedbatelné hmotnosti o délce $l$. Na jednom jejím konci je upevněné závaží s hmotností $m_1$, na druhém konci závaží s hmotností $m_2$. V jaké vzdálenosti od závaží $m_1$ ji máme podepřít, aby byla v rovnováze nakloněna pod úhlem $\alpha$?*

*Xellosovi chýba len to celé zavesiť na kladku.*

Uvedomme si, že na uhle $\alpha$ nezáleží – momenty síl pôsobiacich na obe závažia sa síce prenásobia $\cos\alpha$, ale to neovplyvní podmienku rovnováhy. Tá znie (ide o rovnováhu momentov síl, píšeme ju rovno pre $\alpha = 0$)

$$xm_1 = (l - x)m_2\,,$$

kde sme hľadanú vzdialenosť označili $x$. Z toho už ľahko určíme

$$x = \frac{l}{1 + \frac{m_1}{m_2}}\,.$$

Môžete si to vyskúšať na hojdačke.

***Jakub Šafin***
`xellos@fykos.cz`

## Úloha AE ... animální přitažlivost

*Jakou silou jsou k sobě přitahováni muž se ženou? A jakou muž k muži? Muži váží přibližně* $m_{\mathrm{m}} = 80\,\mathrm{kg}$, *ženy* $m_{\check{\mathrm{z}}} = 60\,\mathrm{kg}$. *Stačí uvažovat sílu při konkrétní vzdálenosti* $d = 10\,\mathrm{m}$.

*Karel nikdy nechtěl být biologem.*

Známe, nebo si v tabulkách najdeme, vztah pro sílu mezi dvěma hmotnými body a dosadíme hodnoty, které jsou zadané, kromě gravitační konstanty, kterou si také najdeme v tabulkách ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-2}{\cdot}m^2}$). Výsledné hodnoty sil jsou tedy

$$F_1 = G\frac{m_{\mathrm{m}} m_{\check{\mathrm{z}}}}{d^2} = 3{,}2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{N} = 3{,}2\,\mathrm{nN}\,,$$
$$F_2 = G\frac{m_{\mathrm{m}} m_{\mathrm{m}}}{d^2} = 4{,}3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{N} = 4{,}3\,\mathrm{nN}\,.$$

Z výsledku je tedy vidět, že přitažlivost (gravitační síla) mezi dvěma muži je při stejné vzdálenosti vyšší než mezi mužem a ženou.

***Karel Kolář***
karel@fykos.cz

## Úloha AF ... zapomenutá voda

*Do barelu tvaru dutého válce s průměrem dna* $d = 0{,}6\,\mathrm{m}$ *přes rok napršela voda o hustotě* $\varrho_1 = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Nakonec jí bylo tolik, že sahala do dvou třetin výšky barelu. Další den ale uhodily mrazy a všechna voda zmrzla na led o hustotě* $\varrho_2 = 920\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *který sahal* $20\,\mathrm{cm}$ *pod okraj barelu. Jaký má barel objem?* *Meggy byla zase zima.*

Platí $m = \varrho V$, hmotnost vody se nezměnila. Objem válce se spočítá jako obsah dna krát výška. Voda má tvar válce s výškou $h_1 = 2h/3$, led válce s výškou $h_2 = h - \Delta h_2$, kde $\Delta h_2 = 20\,\mathrm{cm}$; obsah dna $S = \pi d^2/4$ je u obou stejný. Hmotnost vody resp. ledu vyjádříme jako

$$m = \varrho_1 h_1 S = \varrho_2 h_2 S \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3\varrho_2 \Delta h_2}{3\varrho_2 - 2\varrho_1} \doteq 73\,\mathrm{cm}\,.$$

Objem barelu s výškou $h$ je tedy $V_{\mathrm{b}} = \pi d^2 h/4 \doteq 0{,}21\,\mathrm{m}^3$.

***Markéta Calábková***
calabkovam@fykos.cz

## Úloha AG ... plovoucí poklad

*Lukáš se válel na pláži v Portugalsku a chytal lelky, když tu si náhle všiml, že na klidné mořské hladině něco plove. Byla to dvoulitrová lahev od koly, která byla ze tří čtvrtin ponořena pod hladinou. Lukáš ji vylovil, otevřel a ke svému nadšení zjistil, že se v ní nachází 128 kovových mincí. Mince vysypal, lahev opět zašrouboval a hodil ji zpět do moře. Odplouvající lahev byla pod hladinu ponořena pouze z jedné osminy. Určete hmotnost* $m$ *jedné mince. Hustota vody je* $\varrho = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. *Mirek přemýšlel, co dělá Lukáš na konferenci.*

Označme si hmotnost prázdné lahve $M$, její objem $V$ a počet mincí $N$. Potom rovnováhu sil pro lahev s mincemi, která je ze tří čtvrtin ponořená, zapíšeme jako

$$\frac{3}{4}V\varrho g = (M + Nm)g\,,$$

kde $g$ je tíhové zrychlení. Podobně pro prázdnou lahev platí rovnost

$$\frac{1}{8} V \varrho g = M g\,.$$

Odsud vyjádříme $M = V\varrho/8$ a po dosazení do první rovnice dostaneme

$$\frac{3}{4} V\varrho = \frac{1}{8} V\varrho + Nm\,,$$
$$m = \frac{5}{8}\frac{V\varrho}{N}\,.$$

Po číselném dosazení určíme, že jedna mince má hmotnost $m \doteq 9{,}8\,\mathrm{g}$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha AH ... dobře promazané

*Mirek při rozebírání kola vyndal kuličkové ložisko a chvilku si s ním točil. Ložisko si můžeme představit jako dva soustředné pláště válce s poloměry $r_1$, $r_2$, kde $r_2 > r_1$. Mezi nimi je umístěno 12 kuliček, které se vzájemně nedotýkají. Mirek točí vnitřní částí ložiska úhlovou rychlostí $\omega_1$ proti směru hodinových ručiček a vnější částí rychlostí $\omega_2$ v opačném směru. Určete, jakou rychlostí (ne úhlovou) se pohybují středy kuliček – kladné číslo znamená pohyb ve směru hodinových ručiček. Neuvažujte prokluz. Výsledek zapište v rozumném tvaru.*

*Mirek radši rozebírá než jezdí.*

Kutálí-li se po rovném povrchu koule s obvodovou rychlostí $v$, pohybuje se její střed s rychlostí $v/2$. V našem případě se při rotaci vnějšího disku pohybují kuličky ve směru hodinových ručiček, při rotaci vnitřní části proti směru. Po odečtení obvodových rychlostí dostaneme tedy pro rychlost středů kuliček

$$v = \frac{1}{2}\left(\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1\right).$$

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha BA ... hustá

*O kolik větší hustotu by musela mít Země, aby její gravitační zrychlení bylo $42\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ při zachování jejích rozměrů? Považujme Zemi za homogenní kouli s poloměrem $R = 6\,371\,\mathrm{km}$, gravitační konstanta má velikost $G = 6,67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$, gravitační zrychlení na Zemi je $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.*

*Kiki zapomněla ručník.*

Využijeme vztah pro velikost gravitačního zrychlení $a = GM/R^2$, kde si hmotnost vyjádříme jako součin objemu a hustoty Země, jelikož Zemi považujeme za kouli, lze její objem snadno přepsat jako funkci jejího poloměru. Po úpravách dostaneme vzorec pro rozdíl hustot

$$\Delta\varrho = \frac{3(x-g)}{4\pi RG}\,,$$

kde $x$ je hypotetické zrychlení. Dosazením zjistíme, že hustota Země by se musela zvýšit o přibližně $18\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

***Kristína Nešporová***
kiki@fykos.cz

## Úloha BB ... hra se stíny

*Po jedné straně silnice jde člověk vysoký $h = 2\,\mathrm{m}$ rychlostí $v = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Na druhé straně silnice stojí dvě lampy, které jsou od sebe vzdáleny $D = 10\,\mathrm{m}$ a jsou vysoké $H = 4\,\mathrm{m}$. Šířka silnice je $l$. Každá z lamp vrhá za člověkem stín. Nalezněte nejvyšší rychlost, kterou se vůči sobě pohybují hlavy stínů. Silnice je rovná, přímá a nekonečná, stínové hlavy považujte za body.*

*Mirka v noci sledovaly dvě tajemné postavy.*

Dívejme se na celou situaci seshora a sledujme paprsky, které dopadají na hlavu člověka. Tyto paprsky vrhají stín do vzdálenosti stejné, jako je vzdálenost mezi lampou a člověkem (protože $H = 2h$). Geometricky se jedná o zobrazení lamp ve středové souměrnosti s bodem, kde se nachází člověk. Dokud si bude chodec zachovávat konstantní kolmou vzdálenost na spojnici lamp, zachová se i vzdálenost mezi zobrazenými lampami, tedy stínovými hlavami. Vzájemná rychlost hlav je tedy vždy nulová. Toto samozřejmě platí nezávisle na poměru $H$ a $h$, drží-li se chodec stále na druhém okraji silnice.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha BC ... zdlouhavá

*Náry čas od času chce jet z místa svého bydliště do Prahy. Vlak mu jede vždy po hodině přesně v celou. Nikdy by si neodpustil, kdyby stihl ten první, na který vyrazí. Proto na něj vyjde přesně za deset minut celá s konstantní rychlostí $4{,}32\,\mathrm{km\cdot hod^{-1}}$ a v polovině $2{,}8\,\mathrm{km}$ dlouhé dráhy začne zrychlovat s konstantním zrychlením $0{,}002\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Když dorazí na nádraží a ke své spokojenosti zjistí, že mu vlak skutečně ujel, vrátí se domů a na další vlak vyjde o pět minut dříve než v předchozím případě, což opakuje až do té doby, než vlak stihne. V jaký čas nejpozději musí vyjít poprvé, jestliže potřebuje jet nejpozději vlakem v 17 hodin. Náryho rychlost je ve všech případech shodná s popisem u prvního případu.*

*Když jednoduchá, tak alespoň s dlouhým zadáním.*

Pro vyřešení úlohy je klíčové určit, za jak dlouho vlastně Náry na nádraží dojde. Pro první polovinu dráhy vyjdeme ze vzorce pro rovnoměrný pohyb $s = v_0 t$ a pro druhou ze vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, kde hledaný čas bude kladným kořenem příslušné kvadratické rovnice. Celkový čas tedy bude

$$t = \frac{s}{v_0} + \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}\,,$$

což číselně představuje necelých 32 minut. Náry tedy stihne vlak v 17 hodin ve chvíli, kdy vyjde 35 minut před jeho odjezdem, tedy v 16:25. Z toho plyne, že na první vlak musí vyjít nejpozději v 11:50.

***Kristína Nešporová***
kiki@fykos.cz

## Úloha BD ... Mercurial

*Chcete si postavit teploměr ze skleněné trubičky vnitřního průměru $d = 1\,\mathrm{mm}$ s kulovou baňkou na konci. Naplníte soustavu $V_0 = 8{,}63\,\mathrm{cm}^3$ rtuti (baňka je zcela plná a něco je i v trubičce). V jaké vzdálenosti od sebe máte vyznačit rysky pro jednotky °C ? Koeficient objemové roztažnosti rtuti je $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$.* *Michalovi se stýská po rtuťových teploměrech.*

Rtuť se může rozpínat jenom v trubičce. Spočítáme tedy změnu objemu při změně teploty o 1 K (= 1 °C) a spočítáme výšku válce v trubičce.

$$h = \frac{\Delta V}{\pi (d/2)^2} = \frac{\beta V_0 \Delta T}{\pi (d/2)^2} \doteq \frac{1{,}57\,\mathrm{mm}^3}{\pi (0{,}5\,\mathrm{mm})^2} \doteq 2\,\mathrm{mm}\,.$$

Hladina rtuti ve skleněné trubičce tedy při zahřátí o 1°C stoupne o 2 mm a dílky na trubičce bychom vyznačili právě po těchto úsecích.

***Michal Koutný***
`michal@fykos.cz`

## Úloha BE ... náledí

*Jak jest známo, na sněhu mají auta tendenci dostávat smyk, špatně brzdit... Aby se zkrátila brzdná dráha, mají auta zimní pneumatiky, jejichž součinitel smykového tření je $f_\mathrm{z} = 0{,}5$. Spousta řidičů si nechává letní pneumatiky i v zimě, jenže jejich součinitel smykového tření je pouze $f_\mathrm{l} = 0{,}3$. Jakou nejvyšší rychlostí může jet auto na letních pneumatikách, aby mělo na rovině stejně dlouhou brzdnou dráhu jako auto se zimními pneumatikami, které jede rychlostí $v_\mathrm{z} = 72\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$?*

*Kuba jel za vánice domů a autobusy přestaly jezdit, protože měly letní pneumatiky.*

Označme $mg$ tíhovou sílu, kterou auto působí na silnici. Brzdná třecí síla na letních pneumatikách je $F_\mathrm{l} = f_\mathrm{l} F_\mathrm{G}$, na zimních pak $F_\mathrm{z} = f_\mathrm{z} F_\mathrm{G}$. Veškerá práce třecí síly je vynaložena na zastavení vozidla, tedy je rovna počáteční kinetické energii

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{z}^2 = m g f_\mathrm{z} s\,,$$

kde $s$ je uražená dráha. Můžeme vyjádřit

$$s = \frac{v_\mathrm{z}^2}{2 g f_\mathrm{z}}$$

a dosadit toto do rovnosti pro letní pneumatiky

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{l}^2 = m g f_\mathrm{z} s\,.$$

Po pár úpravách získáme

$$v_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{f_\mathrm{l}}{f_\mathrm{z}}} v_\mathrm{z}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot $v_\mathrm{l} \doteq 56\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha BF ... střelba na pohyblivý cíl

*Tank jede po přímé cestě rychlostí $v = 40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Voják stojí $s = 70\,\mathrm{m}$ kolmo od cesty. Když je od něj blížící se tank vzdálený $l = 150\,\mathrm{m}$, vystřelí raketu letící rychlostí $u = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. O jaký úhel $\alpha$ musí předsadit (vodorovně raketomet natočit), aby střela zasáhla cíl?*

*Katka se dívala na klání ve WoT.*

Obsah trojúhelníku původní polohy tanku, polohy vojáka a polohy tanku zasaženého střelou se dá vyjádřit jako

$$S = \frac{1}{2} vts = \frac{1}{2} lut \sin \alpha \,,$$

kde $s$ představuje výšku v tomto trojúhelníku vzhledem k úseku uraženému tankem a $ut \sin \alpha$ představuje výšku vzhledem k původní vzdálenosti $l$. Hledaný úhel předsazení je tedy

$$\alpha = \arcsin \frac{vs}{lu} \,.$$

Číselně $\alpha \doteq 3^\circ$.

***Kateřina Smítalová***
katka@fykos.cz

## Úloha BG ... neviditelná termoska

*Mikuláš seděl na hodině lineární algebry a svýma bystrýma očima, vzdálenýma od sebe $a = 7\,\mathrm{cm}$ pilně sledoval tabuli, když si všiml, že do vzdálenosti $l = 80\,\mathrm{cm}$ postavil termosku. Když se podíval přes její horní část, která má průměr $d_1 = 6{,}5\,\mathrm{cm}$, zjistil, že přečte bez problému vše, co je na tabuli, ale když se podívá přes spodní část o průměru $d_2 = 6{,}75\,\mathrm{cm}$ tak už část textu nevidí. Jak daleko mohl Mikuláš sedět od tabule?*

*Mikuláš seděl na hodině lineární algebry a ...*

Pokud Mikulášovu vzdálenost označíme $L$, tak přes podobnost trojúhelníků zjistíme, že

$$\frac{2L}{a} = \frac{2l}{a - d} \,,$$

kde $d$ je jeden z průměrů termosky. To můžeme upravit na

$$L = \frac{la}{a - d} \,.$$

Tabule je nejblíže, když přes horní okraj právě ještě vidí vše (a při dalším přiblížení by již neviděl), tedy

$$L_{\mathrm{min}} = \frac{la}{a - d_1} \doteq 11\,\mathrm{m} \,.$$

Podobnou úvahou určíme maximální vzdálenost

$$L_{\mathrm{max}} = \frac{la}{a - d_2} \doteq 22\,\mathrm{m} \,.$$

Vzdálenost tabule je tedy z intervalu $(11\,\mathrm{m}; 22\,\mathrm{m})$.

***Mikuláš Matoušek***
mikulas@fykos.cz

## Úloha BH ... zaplatíš krví!

*Při procházce středoamerickými jeskyněmi jsme narazili na netopýra. Visí na stropě ve výšce* $h = 4\,\mathrm{m}$ *ve vodorovné vzdálenosti* $d = 10\,\mathrm{m}$ *od naší pozice. Protože nejsme biologové, vezmeme ze země kámen a mrštíme jím po netopýrovi rychlostí* $v_0 = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$*. Ten se však v přesně okamžiku, kdy kámen hodíme, spustí volným pádem ze stropu. V okamžiku, kdy kámen zasáhne jeho původní pozici, rozepne netopýr svá křídla a my s hrůzou zjišťujeme, že se nejedná o netopýra, ale o upíra.*

*Určete, pod jakým úhlem jsme měli házet, abychom upíra trefili. Předpokládejte, že kámen házíme z nulové výšky (plazíme se strachem po zemi).* *Mirek se neviděl v zrcadle.*

Mohli bychom si rozepsat rovnice pro šikmý vrh a volný pád a hledat průsečík trajektorií netopýra a kamene, ale úloha je mnohem triviálnější. Stačí si uvědomit, že na kámen i na netopýra působí po stejnou dobu (od vypuštění kamene do potenciální srážky) ve svislém směru tíhové zrychlení $g$. V soustavě, kde je netopýr nehybný, bude trajektorií kamene přímka. Musíme tedy hodit pod takovým úhlem $\alpha$, aby vektor počáteční rychlosti mířil přímo na upíra. Stačí tedy z pravoúhlého trojúhelníku s protilehlou odvěsnou $h$ a přilehlou odvěsnou $d$ spočíst

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{d} \doteq 22^\circ\,.$$

Abychom krvežíznivou nestvůru strefili, musíme házet pod úhlem $\alpha = 22^\circ$.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha CA ... bum bác

*Kladivo o hmotnosti* $m = 5\,\mathrm{kg}$ *dopadne v poli tíhového zrychlení* $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *na kovadlinu z výše* $l = 80\,\mathrm{cm}$*. Doba nárazu* $0{,}002\,\mathrm{s}$ *byla určena měřením. Jak velká průměrná síla působí na kovadlinu za předpokladu, že kladivo odskočí od kovadliny stejnou rychlostí, jakou dopadne?*
*f(Aleš) vzpomínal na úlohu s hřebíkem z Fyziklání online.*

Sílu spočteme jako změnu hybnosti za čas, během kterého k ní došlo

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,,$$

kde $\Delta t$ je doba nárazu. Přitom změna hybnosti je dvojnásobkem hybnosti, se kterou kladivo přichází k nárazu. Hybnost se totiž nenuluje, ale otáčí svůj směr. Že výsledná hybnost bude stejná nám říká, že během takto krátké doby nedocházelo k žádným přeměnám energie, které by bylo potřeba uvážit. Jak všichni dobře víme, čas volného pádu je

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}\,,$$

kde $s$ je dráha, pro náš případ shodná s $l$. Hybnost pak můžeme vyjádřit jako

$$p = mv = mgt = mg\sqrt{\frac{2s}{g}}\,.$$

Když dosadíme do vztahu pro výslednou hybnost dostaneme

$$\frac{2mg\sqrt{\frac{2s}{g}}}{\Delta t} \doteq 20\,\mathrm{kN}\,.$$

Síla tedy je přibližně 20 kN.

***Aleš Flandera***
`flandera.ales@fykos.cz`

## Úloha CB ... vejde se?

*V rozpínajícím se vesmíru v oblasti o tvaru koule poklesne hustota nestabilních neinteragujících částic za dobu $t$ šestnáctkrát, přičemž $t = T_{1/2}$ je poločas rozpadu částic. Kolikrát se za tuto dobu zvětšil poloměr zkoumané oblasti?* *f(Aleš) vzpomínal na minulý rok.*

Označme $n_0$ a $N_0$ počáteční hustotu a počet nestabilních částic v kulové oblasti s počátečním poloměrem $R_0$. Dále $n$ a $N$ jsou konečná hustota a počet nestabilních částic v kulové oblasti o poloměru $R$. Z rovnosti

$$\frac{n}{n_0} = \frac{N}{N_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\,,$$

kde počet částic $N$ je dán rozpadovým zákonem

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0 2^{-T_{1/2}^{-1} t}\,,$$

dostáváme pro $t = T_{1/2}$ a $n_0/n = 16$ poměr mezi konečným a počátečním poloměrem kulového vesmíru

$$\frac{R}{R_0} = \left[\frac{n_0}{n} 2^{-T_{1/2}^{-1} t}\right]^{\frac{1}{3}} = 2\,.$$

Poloměr se tedy za dobu $t$ zvětšil dvakrát.

***Aleš Flandera***
`flandera.ales@fykos.cz`

## Úloha CC ... světlo se ohýbá

*Světlo o vlnové délce $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ dopadá ze vzduchu s indexem lomu $n_1 = 1$ na sklo, které má všude stejnou tloušťku, pod úhlem $\beta_1 = 50^\circ$ od kolmice. Tloušťka skla je $d = 7{,}5\,\mathrm{mm}$. Index lomu skla je $n_2 = 1{,}5$. Ze skla se pak znovu láme a to do vody, která má index lomu $n_3 = 1{,}33$. Jaký je úhel, pod kterým světlo vchází do vody?* *Olda se učil na test z optiky.*

K vyřešení úlohy není potřeba vědět, jaká je vlnová délka světla, ani jaká je tloušťka skla. Všechno, co potřebujeme k řešení, je Snellův zákon. Podle tohoto zákona pak máme na prvním a druhém rozhraní rovnice

$$n_1 \sin\beta_1 = n_2 \sin\beta_2\,,$$
$$n_2 \sin\beta_2 = n_3 \sin\beta_3\,.$$

Nyní vidíme že na druhém prostředí moc nezáleží (nedojde-li k totálnímu odrazu) a výsledek je tedy ve tvaru

$$\arcsin\left(\frac{n_1 \sin\beta_1}{n_3}\right) = \beta_3\,.$$

Výsledek je tedy po číselném dosazení $\beta_3 = 35{,}2^\circ$.

***Oldřich Holcner***
`holcner@fykos.cz`

## Úloha CD ... autobusová

*Mikulášovi se nechce čekat na autobus. Ze školy proto chodí pěšky po mostě. Místo aby šel* $a = 300\,\mathrm{m}$ *na zastávku, a pak jel autobusem, urazí vzdálenost* $b = 1\,100\,\mathrm{m}$. *Pohybuje se vždy rychlostí* $v = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *(nedobíhá autobus). Cesta autobusem trvá* $\tau = 2\,\mathrm{min}$. *Vypočítejte, jak dlouhý musí být interval autobusu* $i = ?\,\mathrm{min}$, *aby se mu to vyplatilo. Tzn. chceme, aby pravděpodobnost* $p$, *že cesta autobusem bude trvat déle než pěšky, byla* $p > p_1 = 0{,}5$. *Předpokládejte, že potom, co Mikuláš přijde na zastávku, jsou všechny časy příjezdu autobusu* $t < i$ *stejně pravděpodobné.* Nápověda: *Pravděpodobnost, že autobus přijede později než za* $t_1$, *se spočítá* $p = 1 - t_1/i$. *Erik byl líný koukat na jízdní řády.*

Vyjdeme z nápovědy

$$p = 1 - \frac{t_1}{i}\,,$$

přičemž chceme $p > p_1$ a $t_1$ volíme nejmenší možný, aby se cesta pěšky vyplatila, tedy

$$t_1 = \frac{b}{v} - \frac{a}{v} - \tau\,.$$

Po dosazení do pravděpodobnosti a jednoduché úpravě dostaneme

$$p_1 < 1 - \frac{b - a - \tau v}{vi}\,.$$

Vyjádříme hledaný interval

$$i > \frac{b - a - \tau v}{(1 - p_1)v}\,.$$

Po číselném dosazení $i > 830\,\mathrm{s} \doteq 14\,\mathrm{min}$.

***Erik Hendrych***
`erik@fykos.cz`

## Úloha CE ... rozbitý výtah

*Ve výtahu o hmotnosti* $M = 420\,\mathrm{kg}$ *jel Karel vážící* $m = 80\,\mathrm{kg}$ *směrem dolu. Výtah klesající rychlostí* $v = 5\,\mathrm{m/s}$ *visí na třech ocelových lanech. Průměr každého lana je* $d = 1\,\mathrm{cm}$. *Motor, ze kterého se lana odvíjí, se najednou zasekl a přestal se otáčet, a tak výtah zůstal viset v pátém patře, na 90 metrech lana (*$l_1 = 30\,\mathrm{m}$ *každé). Karel se rozhodl z rozbitého výtahu vystoupit. O kolik vystoupá výtah po tom, co Karel vystoupí? Modul pružnosti oceli v tahu je* $E = 200\,\mathrm{GPa}$. *Kuba jel ve výtahu, který se rozbil.*

Vidíme, že se jedná o nějaké změny délek lana v závislosti na síle, takže vyjdeme z Hookova zákona $\sigma = E\varepsilon$. Tento vzoreček můžeme rozepsáním napětí $\sigma$ a relativního prodloužení $\varepsilon$ upravit do tvaru

$$\frac{F}{S} = E\frac{l - l_0}{l_0}\,,$$

kde $F$ je síla pnutí, $S$ je plocha průřezu lana (nezatíženého), $l$ je délka nataženého lana a $l_0$ délka lana bez zátěže. Máme dvě rovnice: pro první stav, než Karel vystoupil (síla $F_1$, délka $l_1$), a pro druhý stav, když Karel vystoupil (síla $F_2$, délka $l_2$). Tedy

$$\frac{F_1}{S} = E\frac{l_1 - l_0}{l_0}\,,$$
$$\frac{F_2}{S} = E\frac{l_2 - l_0}{l_0}\,.$$

V této soustavě rovnic známe všechno až na $l_0$ a $l_2$, neboť ze zadání víme, že $l_1 = 30\,\mathrm{m}$. Na levou stranu se můžeme dívat buď jako na tíhovou sílu působící na lano trojnásobného průřezu, nebo jako na třetinovou sílu působící na lano průřezu $S$. Tak či tak

$$\frac{F_1}{S} = \frac{4(M + m)g}{3\pi d^2}$$

a

$$\frac{F_2}{S} = \frac{4Mg}{3\pi d^2}\,.$$

Odečtením druhé rovnice od první snadno dostaneme

$$\Delta l = l_1 - l_2 = \frac{l_0}{SE}(F_1 - F_2) = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{4mg}{3\pi d^2}\,.$$

Číselným dosazením dostaneme, že $\Delta l \doteq 0{,}5\,\mathrm{mm}$.

***Jakub Sláma***
slama@fykos.cz

## Úloha CF ... vstávat a cvičit

*Při hodině tělocviku dívky házely granátem. Nejdříve hodil učitel. Granát z ruky vypustil pod úhlem $\varphi = 45^\circ$ a dohodil do vzdálenosti $s_1 = 40\,\mathrm{m}$. Po něm šla házet Markéta. Vypustila granát z ruky pod stejným úhlem, ale protože byla o $\Delta = 20\,\mathrm{cm}$ menší než učitel (tedy vypustila granát o $20\,\mathrm{cm}$ níž) a házela oproti němu s pětišestinovou počáteční rychlostí, uletěl granát jen $s_2 = 28\,\mathrm{m}$ (vzdálenosti jsou zaokrouhlené). Jakou rychlostí $v_2$ hodila Markéta granát? Gravitační zrychlení je $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.* *Meggy si vzpomněla na své hodiny tělocviku a jak jí to nešlo.*

Učitel vyhodil granát rychlostí $v_1$, přičemž platí $\frac{5}{6}v_1 = v_2$, tedy $v_1 = \frac{6}{5}v_2$. Protože házel pod úhlem $45^\circ$, vodorovná složka této rychlosti $v_{1x}$ je jednak rovna svislé složce rychlosti a jednak platí $v_1 = \sqrt{2}v_{1x}$. Označme si výšku, ve které učitel vypustil granát, jako $h_1$ a čas pobytu granátu ve vzduchu jako $t_1$. Platí

$$s_1 = v_{1x}t_1 = \frac{6}{5}v_{2x}t_1\,,$$
$$\frac{gt_1^2}{2} = v_{1x}t_1 + h_1 = v_{1x}t_1 + h_2 + \Delta\,,$$

kde bereme $g$ kladné a $h_2$ je výška, ze které hází Markéta. Pro Markétu máme podobně

$$s_2 = v_{2x}t_2 \,,$$
$$\frac{gt_2^2}{2} = v_{2x}t_2 + h_2 \,.$$

To jsou celkem čtyři rovnice pro čtyři neznámé $t_1$, $t_2$, $v_{2x}$, $h_2$. Dosadíme $t_1 = (5s_1)/(6v_{2x})$ a $t_2 = s_2/v_{2x}$, získáme

$$\frac{1}{2}g\frac{25}{36}\frac{s_1^2}{v_{2x}^2} = s_1 + h_2 + \Delta \,,$$
$$\frac{1}{2}g\frac{s_2^2}{v_{2x}^2} = s_2 + h_2 \,.$$

Odečtením rovnic eliminujeme neznámou $h_2$ a obdržíme

$$\frac{1}{2}g\frac{1}{v_{2x}^2}\left(\frac{25}{36}s_1^2 - s_2^2\right) = (s_1 - s_2) + \Delta \,.$$

Nyní už jen zbývá vyjádřit kladný kořen této kvadratické rovnice a dopočíst hledanou rychlost

$$v_2 = \sqrt{2}v_{2x} = \sqrt{\frac{g\left(\frac{25}{36}s_1^2 - s_2^2\right)}{s_1 - s_2 + \Delta}} \,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání $v_2 \doteq 16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

***Markéta Calábková***
calabkovam@fykos.cz

## Úloha CG ... vodu si osladím

*Ve válci s obsahem podstavy $S = 1\,\mathrm{dm^2}$ se nachází jeden litr velmi slané vody o hustotě $\varrho_0 = 1\,150\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Do ní ponoříme $m = 1\,\mathrm{kg}$ ledu ze sladké vody, která má hustotu $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Určete, jak se změní výška hladiny, jestliže polovina hmotnosti ledu roztaje. Uvažujte, že kapaliny se promísí dokonale a nedojde k objemové kontrakci.*

*Mirek vymýšlí a vymýšlí.*

Po vložení ledu do válce vytlačíme objem vody $\Delta V_0 = m/\varrho_0$, jak plyne z Archimédova zákona. Po roztátí poloviny ledu je vytěsněn již menší objem $\Delta V_1 = m/(2\varrho_1)$, kde $\varrho_1$ je hustota původní vody smíšené s vodou vzniklou při tání. Objem vody, která roztála, je $\Delta V = m/(2\varrho)$. Jelikož se voda s ledem nachází ve válci, snadno určíme změnu výšky hladiny

$$\Delta h = \frac{\Delta V_1 + \Delta V - \Delta V_0}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{2\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \,.$$

Nyní potřebujeme určit hustotu smíšené vody $\varrho_1$. Ta je rovna poměru celkové hmotnosti

$$m' = \varrho_0 V_0 + \frac{m}{2}$$

a celkového objemu

$$V' = V_0 + \frac{m}{2\varrho}\,,$$

kde $V_0 = 1\,\mathrm{l}$. Tedy

$$\varrho_1 = \frac{\varrho_0 V_0 + \dfrac{m}{2}}{V_0 + \dfrac{m}{2\varrho}}\,.$$

Po číselném dosazení $\varrho_1 = 1\,100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a

$$\Delta h = \frac{m}{S}\frac{\varrho_0 V_0 + m}{2\varrho_0 V_0 + m}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \doteq 0{,}85\,\mathrm{cm}\,.$$

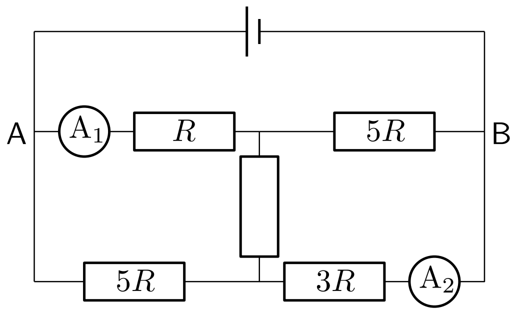
Hodnota $\Delta h$ je kladná, hladina tedy stoupne.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha CH ... zapomenutý obvod

*Erik si postavil na stole malý obvod a zaznamenal si, v jakém poměru jsou odpory čtyř z pěti rezistorů, jak vidíte na obrázku. Dokáže z takto malého množství údajů určit, v jakém poměru jsou proudy tekoucí ampérmetry $A_1$ a $A_2$? Zkuste to – vyjádřete proud $I_2$ tekoucí druhým ampérmetrem v násobcích proudu $I_1$ tekoucím prvním ampérmetrem.*

*Mirek sledoval Erika při práci.*




Obr. 3: Schéma obvodu.

Označme proudy tekoucí z bodu A jako $I_1$ a $I_3$ a proudy tekoucí do bodu B jako $I_2$ a $I_4$, přičemž značení je v souladu se zadáním. Potom dle zákona zachování elektrického náboje platí pro uzlové body rovnice

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4\,.$$

Napětí mezi body A, B vyjádříme podle dolní větve jako

$$U_{\mathrm{AB}} = 5RI_3 + 3RI_2\,,$$

ale zároveň ho dokážeme vyjádřit také pomocí prostřední větve jako

$$U_{\mathrm{AB}} = RI_1 + 5RI_4\,.$$

Porovnáním posledních dvou rovnic dostaneme

$$5I_3 + 3I_2 = I_1 + 5I_4\,.$$

Odečtením pětinásobku první rovnice od této získáme hledaný vztah mezi proudy na ampérmetrech

$$3I_2 - 5I_1 = I_1 - 5I_2\,,$$
$$4I_2 = 3I_1\,.$$

Proud na druhém ampérmetru je tedy 3/4-násobkem proudu na prvním ampérmetru.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha DA ... náhle otočil o 360 stupňů

*Mirek letí letadlem, které se pohybuje v horizontální rovině po přímce rychlostí $v_0 = 800\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Určete, o kolik se musí zvýšit rychlost letadla, aby mohlo kroužit stále ve vodorovné rovině po kružnici o poloměru $R = 12\,\mathrm{km}$. Zároveň také určete, jaký přitom musí být sklon letadla od roviny (odpovědí jsou tedy* ***dvě*** *čísla s jednotkou). Letadlo mění směr letu náklonem, přičemž dynamická vztlaková síla působící kolmo na plochu křídel je úměrná kvadrátu rychlosti s koeficientem úměrnosti $k$, který se při náklonu nemění. Přestože letadlo letí vysoko nad zemí, počítejte s tíhovým zrychlením $g \doteq 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.* *Mirka při létání bolí hlava, potřeboval zabavit.*

Na letadlo o hmotnosti $m$ působí tíhová síla $mg$, kterou vyrovnává vztlaková odporová síla $kv_0^2$, kde koeficient $k$ zahrnuje parametry letadla. Když se letadlo nakloní o úhel $\alpha$ a začne kroužit, musí být tíhová síla vyrovnána průmětem vztlakové síly do vertikální roviny, tedy

$$mg = kv_1^2 \cos\alpha\,,$$

kde $v_1$ je nová rychlost letadla. Ve vodorovném směru představuje odporová síla dostředivou sílu, platí tedy

$$kv_1^2 \sin\alpha = m\frac{v_1^2}{R}\,.$$

Vyjádříme si

$$k = \frac{mg}{v_0^2}$$

a dosadíme do poslední rovnice, získáme tak úhel $\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{v_0^2}{gR} \quad\Rightarrow\quad \alpha \doteq 24{,}3^\circ\,.$$

Dosazením vyjádření $k$ do rovnosti vertikálním směru získáme novou rychlost

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{\cos\alpha}} = v_0\left(1 - \frac{v_0^4}{g^2R^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \doteq 840\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 230\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Letadlo se skloní o úhel $\alpha \doteq 24^\circ$ a poletí rychlostí o $\Delta v \doteq 40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ vyšší.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha DB ... nabíječ

*V laboratoři jsme sestavili experiment: nad středem tenkostěnné kovové koule s poloměrem* $R = 5\,\mathrm{cm}$ *visí ve vzdálenosti* $h = 10\,\mathrm{cm}$ *od jejího povrchu kapátko s elektricky nabitou vodou (hustota* $\varrho = 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*). Z něj odkapávají malé kapičky přímo dovnitř koule, neboť ta má nahoře malý otvor. Po určité době se může stát, že se kapce nepodaří vlivem elektrostatického odpuzování projít otvorem. Určete maximální náboj* $Q_0$*, který se na kouli může uložit, jestliže náboj každé kapky je* $q = 1{,}8 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}$*. Kapka má tvar koule s poloměrem* $r = 1\,\mathrm{mm}$*.*

*Mirek už ví, že když nabitá koule, tak jedna.*

Po dopadu $n$ kapek má koule náboj $Q = nq$. Tento náboj se rozloží na povrchu koule rovnoměrně tak, že se bude vůči kapkám chovat jako bodový náboj $Q$ ve středu koule (potenciál vně koule bude stejný jako potenciál takového náboje). Náboje kapek jsou malé, jejich vliv na rozložení náboje na kouli můžeme tedy zanedbat. Využijeme zákon zachování energie, který nám dává rovnici

$$mgh + \frac{kQq}{R+h} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kqQ}{R}\,.$$

Označili jsme $m$ hmotnost kapky

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\,,$$

dále $v$ rychlost kapky u povrchu koule a $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ Coulombovu konstantu. Koule dosáhne maximálního náboje, pokud je rychlost kapky u povrchu koule nulová, takže

$$mgh + \frac{kQ_0q}{R+h} = \frac{kqQ_0}{R}\,.$$

Snadno už vyjádříme náboj

$$Q_0 = \frac{mgR(R+h)}{kq} = \frac{4\pi r^3 \varrho g R(R+h)}{3kq} \doteq 1{,}9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\,.$$

Maximální náboj, kterého koule dosáhne, je tedy $Q_0 = 1{,}9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$.

Mohlo by se stát, že se odpovídající počet kapek $n_0 = Q_0/q$ do koule nevejde. Pokud by vytékající kapky strhávaly náboj, náš výsledek by neplatil. Lze však snadno ověřit, že

$$n_0 = \frac{mgR(R+h)}{kq^2} \doteq 1{,}06 \cdot 10^5$$

je menší než maximální počet kapek

$$n_{\max} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 1{,}25 \cdot 10^5\,,$$

výsledek výše je tedy správný.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha DC ... chvilka napětí

*Karel byl na Taiwanu a koupil si tam ve slevě žehličku. Vyzkoušel ji v místní síti s jednofázovým napětím $U_1 = 110\,\mathrm{V}$ a zjistil, že se po delší době rozehřeje na stálou teplotu $t_1 = 150\,\mathrm{^\circ C}$. Když si však doma chtěl vyžehlit košili, začala mu po chvíli žehlení černat. Na jakou teplotu se mohla žehlička rozehřát, jestliže je v české elektrické síti napětí $U_2 = 230\,\mathrm{V}$? Uvažujte, že teplo, které žhavená smyčka uvnitř žehličky předává okolí, je přímo úměrné rozdílu teplot. Teplota místnosti je $t_0 = 20\,\mathrm{^\circ C}$, odpor se s teplotou nemění.* *Mirek už zase přemýšlel, co jak zapálit.*

Při průchodu proudu smyčkou v žehličce dochází k Jouleově ohřevu. Označíme-li koeficient úměrnosti mezi tepelným výkonem a rozdílem teplot $\gamma$, platí pro výkon odevzdaný do okolí

$$\frac{U_1^2}{R} = \gamma(t_1 - t_0)$$

na Taiwanu a

$$\frac{U_2^2}{R} = \gamma(t_2 - t_0)$$

v České republice, přičemž $R$ značí odpor ohřívače v žehličce a $t_2$ maximální teplotu dosaženou v české síti. Z těchto dvou rovnic snadno nalezneme

$$t_2 = t_0 + \frac{U_2^2}{U_1^2}(t_1 - t_0) \doteq 590\,\mathrm{^\circ C}\,.$$

Žehlička se může rozehřát až na teplotu $t_2 = 590\,\mathrm{^\circ C}$, při níž například bavlna okamžitě vzplane.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha DD ... útok z hlubiny

*Michal se díval na film o krvelačných žralocích a usmyslel si, že si vyrobí model žraloka, se kterým bude strašit lidi u pláže. Vyrobil model o hustotě $\varrho_\mathrm{z}$, která byla však příliš vysoká, proto ke žraloku připevnil balónky naplněné vzduchem. Při testování v rybníce s hustotou vody $\varrho_1 = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ zjistil, že do hloubky $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ se model vznese k hladině, ale pro vyšší hloubky se ponoří. Když se konečně s žralokem dostal na moře, změnila se tato kritická hloubka na $h_2 = 5\,\mathrm{m}$, přičemž hustota slané mořské vody byla $\varrho_2 = 1\,030\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Určete na základě těchto údajů hustotu modelu bez přídavných balónků. Předpokládejte, že teplota vody se s hloubkou nemění a vzduch je ideální plyn. Tlak způsobený materiálem balónku zanedbejte. Atmosférický tlak je $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$, tíhové zrychlení $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.*

*Mirek sledoval, jak žraločí ploutev brázdí rybníky.*

Jelikož je teplota vody všude konstantní, bude plyn v balóncích při ponořování procházet izotermickým procesem. V kritické hloubce se balónek stlačí natolik, že se hustota celého modelu vyrovná hustotě vody a vztlaková síla již nebude stačit na to, aby model vynesla k hladině.

Veličiny příslušející žraloku bez balónku budeme značit s indexem $z$. Objem balónků je $V_0$ nad vodou, $V_1$ v kritické hloubce ve sladké vodě a $V_2$ v kritické hloubce ve slané vodě. Atmosférický tlak je $p_0$. Pro vztlak v kritické hloubce platí

$$m_\mathrm{z} g = \varrho_{1(2)}(V_\mathrm{z} + V_{1(2)})g\,.$$

Podle Boyleova-Mariottova zákona platí při izotermickém ději $pV =$ konst, tedy

$$p_0 V_0 = (p_0 + \varrho_{1(2)} g h_{1(2)}) V_{1(2)}\,.$$

Z první rovnice po zkrácení $g$ a dosazení $m_\mathrm{z} = \varrho_\mathrm{z} V_\mathrm{z}$ vyjádříme

$$\varrho_{1(2)} V_{1(2)} = \left(\varrho_\mathrm{z} - \varrho_{1(2)}\right) V_\mathrm{z}\,.$$

Z těchto dvou rovnic (nezapomeňte, že je píšeme pro oba indexy dohromady) vyjádříme dále

$$\frac{\varrho_1 V_1}{\varrho_2 V_2} = \frac{\varrho_\mathrm{z} - \varrho_1}{\varrho_\mathrm{z} - \varrho_2}\,.$$

Z Boyleova-Mariottova zákona výše známe poměr objemů

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_0 + \varrho_2 g h_2}{p_0 + \varrho_1 g h_1}\,,$$

což nám po dosazení do předchozí rovnice dá

$$\varrho_1 (p_0 + \varrho_2 g h_2)(\varrho_\mathrm{z} - \varrho_2) = \varrho_2 (p_0 + \varrho_1 g h_1)(\varrho_\mathrm{z} - \varrho_1)\,.$$

Po úpravách tohoto výrazu nalezneme hustotu žraloka

$$\varrho_\mathrm{z} = \frac{\varrho_2 h_2 - \varrho_1 h_1}{h_2 - h_1 - \left(\dfrac{p_0}{\varrho_1 \varrho_2 g}\right)(\varrho_2 - \varrho_1)}\,.$$

Po číselném dosazení hustot a kritických hloubek dostaneme $\varrho_\mathrm{z} \doteq 1\,120\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha DE ... literární

*V této úloze se zaměříme na jedinou buňku/pixel tzv. elektronického papíru. Je to kostka o hraně $a = 80\,\mathrm{\mu m}$ naplněná černým olejem o dynamické viskozitě $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m^2}$. V této kapalině se vznáší drobounké bílé kuličky o průměru $d = 1\,\mathrm{\mu m}$. Když jsou u přední stěny je pixel bílý, když jsou u zadní je černý. Na přední a zadní stěně jsou (průhledné) elektrody, mezi nimiž je napětí $U = 2\,\mathrm{V}$. V roztoku je zároveň činidlo, které udržuje každou kuličku průměrně nabitou nábojem velikosti $Q = 1\,000e$. Za jak dlouho se pixel překreslí z plně bílého na plně černý? (Olej kuličky při pohybu obtéká laminárně a uvažujte, že všechny kuličky se pohybují zároveň v rovině rovnoběžné s přední stěnou buňky. Přechodové jevy zanedbejte.)*

*Nerušte Michalovy kuličky.*

Zadání nám říká, že můžeme rychlost pohybu kuliček považovat za konstantní. Z rovnosti odporové síly při laminárním obtékání $F_\mathrm{o} = 3\pi\eta d v$ a elektrické síly $F_\mathrm{e} = QU/a$ odvodíme rychlost pohybu kuliček

$$v = \frac{QU}{3\pi\eta d a}$$

a s ní už snadno spočteme čas potřebný na přesun v rámci kostičky

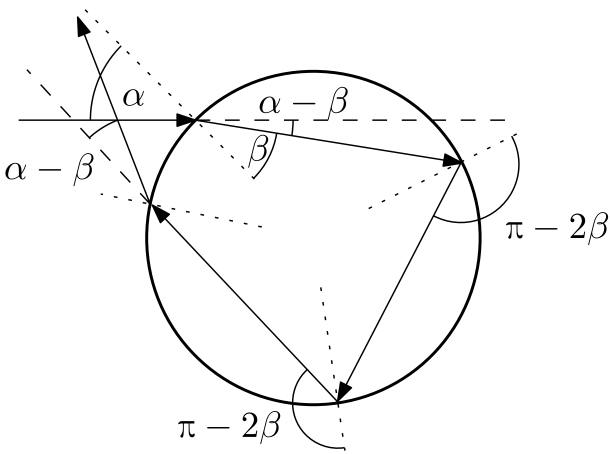
$$t = \frac{3\pi\eta d a^2}{UQ} \,.$$

Po číselném dosazení vyjde $t \doteq 280\,\mathrm{ms}$.

***Michal Koutný***
michal@fykos.cz

## Úloha DF ... duhovka

*Víme, že duha vzniká díky odrazu světla uvnitř vodních kapek. Vícenásobným vnitřním odrazem vznikají vedlejší duhy (ty ale většinou nevidíme). Vypočítejte úhel, o který se odchýlí od původního směru světelný paprsek, který dopadá na kapku pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ a předtím, než vystoupí z kapky, se uvnitř odrazí dvakrát. Index lomu vody uvažujte $n = 4/3$ a zanedbejte jeho závislost na vlnové délce.* *Xellos videl dúhy.*




Obr. 4: Lúč v kvapke.

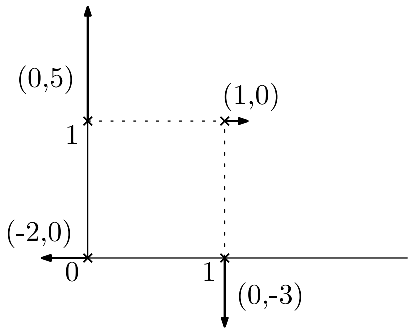
Zo Snellovho zákona je uhol $\beta$, pod ktorým sa láme lúč od kolmice v kvapke, daný ako $\sin\beta = (\sin\alpha)/n$. Pri lome do vnútra aj von z kvapky sa lúč otočí o $\alpha - \beta$. Rovnoramenné trojuholníky v guli ukazujú, že pri každom odraze sa lúč otočí o $180^\circ - 2\beta$, celkovo sa teda otočí o $2(180^\circ - 2\beta) + 2(\alpha - \beta) = 2\alpha - 6\beta$ (otočenie o $360^\circ$ nerobí nič). Výsledný uhol, o ktorý sa lúč odchýli, je teda v abs. hodnote $\delta = |2\alpha - 6\beta| = |2\alpha - 6\arcsin(\sin\alpha/n)| \doteq 102^\circ$.

***Jakub Šafin***
xellos@fykos.cz

## Úloha DG ... jak se zbavit momentu hybnosti?

*Představme si dvoudimenzionální kartézskou soustavu souřadnic, v níž se v nulovém čase nachází čtyři hmotné body stejné hmotnosti. Souřadnice jejich okamžité polohy jsou* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ *a* $(1,1)$. *Všechny body se pohybují rovnoměrně přímočaře rychlostmi (uváděno ve stejném pořadí hmotných bodů jako při výčtu jejich souřadnic)* $(-2,0)$, $(0,-3)$, $(0,5)$, $(1,0)$. *Nalezněte souřadnice jakéhokoli bodu, vůči němuž je celkový moment hybnosti soustavy nulový.*

*Nárymu se nelíbí nenulové hodnoty zvláštních zachovávajících se veličin.*




Obr. 5: Grafické znázornění situace.

Ukážeme, jak nalézt množinu všech bodů, vůči kterým je moment hybnosti soustavy hmotných bodů nulový. Jelikož je hmotnost všech bodů stejná, budeme pracovat s momentem hybnosti děleným hmotností jednoho bodu, označíme si ho $l$. Bude definován vztahem

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{v_i} \,,$$

kde $\boldsymbol{v_i}$ a $\boldsymbol{r_i}$ jsou rychlosti a polohové vektory hmotných bodů vztažené vůči hledanému bodu, jehož polohu označíme $(x, y)$. Rychlost bude mít samozřejmě nulovou. S vektorovým součinem ve dvou dimenzích pracujeme ve smyslu

$$(a, b) \times (c, d) = (ad - bc) \,,$$

přičemž víme, že výsledný vektor míří kolmo na plochu, v níž se body pohybují. Jestliže má být výsledný moment hybnosti nulový, tak potom

$$0 = \boldsymbol{l} = (-x, -y) \times (-2, 0) + (1 - x, -y) \times (0, -3) + (-x, 1 - y) \times (0, 5) + (1 - x, 1 - y) \times (1, 0) =$$

$$= -2y + 3x - 3 - 5x + y - 1 \,,$$

což převedeme na rovnici přímky $y + 2x = -4$. Vůči každému bodu splňujícímu tuto lineární rovnici je moment hybnosti soustavy hmotných bodů nulový.

***Jiří Nárožný***
`nahry@fykos.cz`

## Úloha DH ... řádné horko

*Provádějme kruhový (cyklický) děj s jedním molem plynu, který pro naše účely může být považován za ideální. Nejprve jej necháme adiabaticky vykonat práci $W_1 = 20\,\mathrm{J}$, potom jej izochoricky ochladíme tím, že mu odebereme $Q_1 = 40\,\mathrm{J}$ tepla. Po dodání $W_2 = 50\,\mathrm{J}$ práce okolím při adiabatické kompresi nastává poslední fáze – izobarická expanze. O kolik stupňů se při této expanzi plyn ohřeje, pokud má tepelnou kapacitu při konstantním tlaku $C_p = 20\,\mathrm{J/^\circ C}$?*

*Pavel se zapotil.*

Při kruhovém ději se celková vnitřní energie plynu nemění. Při adiabatickém ději je změna vnitřní energie rovna přijaté (vykonané se znaménkem mínus) práci – vyplývá to z prvního termodynamického zákona a z toho, že soustavě není dodáváno teplo. U izochorického děje naopak není konána práce a změna vnitřní energie je rovna přijatému (resp. mínus vydanému) teplu.

Když to uvážíme, vidíme, že při prvních třech dějích cyklu je změna vnitřní energie našeho plynu rovna $-W_1 - Q_1 + W_2 = -10\,\mathrm{J}$. Při izobarické expanzi je proto třeba plynu dodat $10\,\mathrm{J}$ energie, aby celková energetická bilance skončila na nule. Pro změnu teploty $\Delta T$ platí

$$C_V \Delta T = 10\,\mathrm{J}\,,$$

kde $C_V$ je tepelná kapacita za konstantního objemu. Pro náš jeden mol plynu pak využijeme Mayrův vztah

$$C_V = C_p - R/n\,,$$

kde $n = 1\,\mathrm{mol}$ a $R = 8.31 J.mol^{-1}.K^{-1}$ je univerzální plynová konstanta. Celkem tedy

$$\Delta T = \frac{W_1 + Q_1 - W_2}{C_p - R/n}$$

což po číselném dosazení dá 0,86 °C.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha EA ... usměrňovač

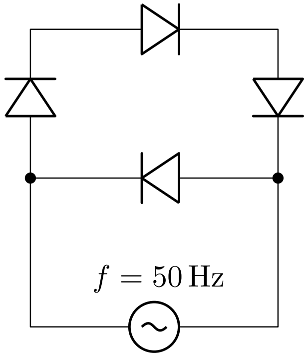
*Mějme čtyři diody zapojené do elektrického obvodu se zdrojem střídavého proudu o frekvenci $f = 50\,\mathrm{Hz}$ v uspořádání, které vidíte na obrázku. Zdroj produkuje pravoúhlé pulzy – polovinu periody konstantní proud $I_\mathrm{z}$ a druhou polovinu periody $-I_\mathrm{z}$. Jaká je střední hodnota výkonu zdroje? Předpokládejte, že mezi napětím $U$ a proudem $I$ každé diody v propustném směru $(U > 0)$ platí vztah*

$$I = I_0 \mathrm{e}^{U/U_0}$$

*a v závěrném směru $(U < 0)$ pak $I = 0$.* *Xellos si myslí, ze Shockleyho zákon ničí úlohy.*

Ak tečie prúd z bodu A do bodu B, jedna dióda je orientovaná záverne a neprepustí nič, môžeme ju teda vyhodiť z obvodu a ostanú 3 diódy v sérii. Každou z nich preteká rovnaký prúd $I_\mathrm{z}$, budú na nich teda konšt. napätia $U_\mathrm{d}$ a platí

$$I_\mathrm{z} = I_0 e^{U_\mathrm{d}/U_0} \quad \Rightarrow \quad U_\mathrm{d} = U_0 \ln \frac{I_\mathrm{z}}{I_0}\,.$$




Obr. 6: Obvod s diodami.

Výkon zdroja v tomto prípade je $P_1 = 3U_\mathrm{d}I_\mathrm{z}$.

Ak tečie prúd v opačnom smere, sú 3 diódy orientované záverne a prúd $-I_\mathrm{z}$ potečie len štvrtou. Na nej bude zasa napätie $-U_\mathrm{d}$, preto je výkon zdroja $P_2 = U_\mathrm{d}I_\mathrm{z}$.

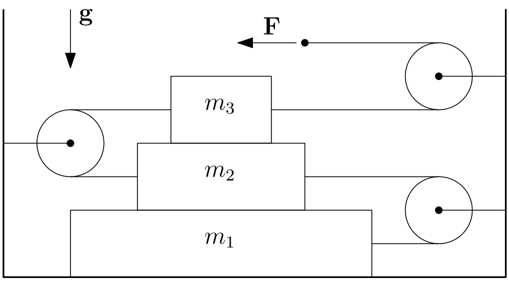
Keďže polovicu času je $P = P_1$ a polovicu $P = P_2$, bude stredný výkon len ich aritmetický priemer, $P = 2U_dI_\mathrm{z} = 2U_0I_\mathrm{z}\ln(I_\mathrm{z}/I_0)$.

***Jakub Šafin***
xellos@fykos.cz

## Úloha EB ... kostky

*Tři tělesa o hmotnostech $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 300\,\mathrm{g}$ a $m_3 = 150\,\mathrm{g}$ leží na sobě a jsou spojena přes kladky lanem, které kromě míst styku s kladkami je všude vodorovné, jako na obrázku 7. Jak velkou silou táhneme za konec lana, jestliže se spodní kostka pohybovala rovnoměrně přímočaře? Dynamický součinitel smykového tření na všech plochách je $f = 0{,}2$.*

*Pikoš hrál s Kiki kostky.*




Obr. 7: Nákres těles a kladek.

Na spodní kostku působí proti směru pohybu třecí síla od podložky o velikosti $(m_1+m_2+m_3)gf$ a dále také proti směru pohybu třecí síla od prostředního tělesa o velikosti $(m_2+m_3)gf$. Aby se pohybovala rovnoměrně přímočaře, velikost výsledné síly na ni působící musí být nulová, tedy lano musí na ni působit silou o velikosti $(m_1 + 2m_2 + 2m_3)gf$.

Takto velikou silou působí lano přes kladku i na prostřední kostku proti směru pohybu. Navíc na tuto kostku působí proti směru pohybu i třecí síla od spodního tělesa o velikosti $(m_2+m_3)gf$ a od horního tělesa třecí síla o velikosti $m_3gf$. Aby výsledná síla působící na ni byla nulová, musí druhé lano působit (ve směru jejího pohybu) silou o velikosti $(m_1 + 3m_2 + 4m_3)gf$.

Touto silou působí lano na horní kostku proti směru pohybu. Navíc proti směru pohybu působí třecí síla o velikosti $m_3gf$. Aby výsledná síla působící na tuto kostku byla nulová, musíme tahat za konec lana silou o velikosti $(m_1 + 3m_2 + 5m_3)gf = 5{,}2\,\mathrm{N}$.

***Tomáš Pikálek***
pikos@fykos.cz

## Úloha EC ... poměřovací

*Náry s Oldou mají místo domácího mazlíčka každý svoji oblíbenou kapiláru. Zajímalo je, čí kapilára je vlastně tenčí. Jelikož neměli měřidlo s dostatečně malými dílky, vložili jednoduše kapiláry do čaje, který si Náry právě uvařil, a hned měli jasno. O kolik je průměr Náryho kapiláry větší/menší než Oldovy, pokud víme, že když Náry na svůj čaj zapomněl a ten vychladl na pokojovou teplotu, výška hladiny v jeho kapiláře se změnila o* $\Delta h_\mathrm{N} = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ *oproti původní výšce po vložení a výška hladiny v Oldově kapiláře se změnila o* $\Delta h_\mathrm{O} = 2{,}5\,\mathrm{mm}$*? Čaj má materiálové vlastnosti vody, po vložení kapilár měl teplotu* $t_1 = 90\,^\circ\mathrm{C}$*, vychladl na* $t_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ *a dokonale smáčí stěnu kapilár. Změna teploty na samotnou kapiláru nemá vliv. Předpokládejme, že teplota kapaliny v kapiláře je v danou chvíli ve všech místech konstantní a stejná jako teplota čaje. Tíhové zrychlení je* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$*. Při výpočtu se vám bude hodit: povrchové napětí* $\sigma(t_1) = 60{,}82\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$*,* $\sigma(t_2) = 72{,}75\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$ *a hustota vody* $\varrho(t_1) = 965{,}35\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*,* $\varrho(t_2) = 998{,}21\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*.* *Náry a Olda na pustém ostrově.*

Kapalina v kapiláře vystoupí do takové výšky $h$, aby se vyrovnala síla tíhová $F_g = mg$ působící na sloupec kapaliny o hmotnosti $m$ v kapiláře a elevační síla povrchového napětí $F_e = \sigma l$, kde $\sigma$ je povrchové napětí při určité teplotě a $l = 2\pi r$ je délka okraje povrchu. Hmotnost kapaliny v kapiláře lze vyjádřit jako $m = \varrho\pi r^2 h$, a tedy z rovnosti sil pro poloměr kapiláry $r$ platí

$$r = \frac{2\sigma}{h\varrho g}\,.$$

Nyní je důležité si uvědomit, u kterých veličin je relevantní změna teploty. Jak hustota vody, tak její povrchové napětí jsou na teplotě závislé a s jejím nárůstem budou klesat. Při teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$ bude hustota vody $\varrho_2 = 998{,}21\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a povrchové napětí bude $\sigma_2 = 72{,}75\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$. Při teplotě $90\,^\circ\mathrm{C}$ bude hustota vody $\varrho_1 = 965{,}35\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a povrchové napětí bude $\sigma_1 = 60{,}82\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$. Vidíme, že poloměr závisí na povrchovém napětí přímo, zatímco na hustotě nepřímo. Z uvedených hodnot však lze odhadnout, že větší význam má povrchové napětí (poloměr bude větší u většího povrchového napětí a hustota to zase tolik „nezkazí“). Pro výpočet poloměru obou kapilár tedy bude platit

$$\Delta h = \frac{2}{rg}\left(\frac{\sigma_2}{\varrho_2} - \frac{\sigma_1}{\varrho_1}\right) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{\Delta h g}\left(\frac{\sigma_2}{\varrho_2} - \frac{\sigma_1}{\varrho_1}\right)\,,$$

kde $\Delta h$ je rozdíl výšek v dané kapiláře při různé teplotě. Rozdíl obou poloměrů (Náryho mínus Oldovy kapiláry) tedy dostaneme ze vztahu

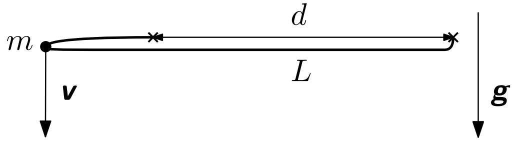
$$\Delta r = \frac{2}{g}\left(\frac{\sigma_2}{\varrho_2} - \frac{\sigma_1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta h_\mathrm{N}} - \frac{1}{\Delta h_\mathrm{O}}\right),$$

kde $\Delta h_\mathrm{N}$ je rozdíl výšek v Náryho kapiláře a $\Delta h_\mathrm{O}$ je rozdíl výšek v Oldově. Po číselném dosazení tedy dostaneme, že Náryho kapilára má o 0,2 mm větší poloměr, má tedy o 0,4 mm větší průměr než Oldova.

***Kristína Nešporová***
kiki@fykos.cz

## Úloha ED ... kořalka

*Máme nehmotnou nepružnou nit délky $L$ upevněnou mezi dvěma body, které jsou ve stejné výšce a které jsou vzdálené $d$. Na nit navlečeme korálek o hmotnosti $m$, natáhneme nit vodorovně (tak, aby byl korálek a body, ve kterých je nit upevněná, na stejné přímce, a korálek byl od nich co nejdál – na obrázku není z technických důvodů nit zcela napnutá) a korálku udělíme rychlost $v$ svisle dolů. Jaká bude rychlost korálku (velikost i směr) v nejnižším bodě dráhy? Tření mezi nití a korálkem neuvažujte.* *Xellos si čítal Олимпиадные задачи по физике.*




Obr. 8: Nákres.

Pri pohybe korálky bude niť napnutá; trenie ale neuvažujeme, preto musí platiť zákon zachovania mechanickej energie. Zo symetrie bude najnižší bod dráhy v strede medzi bodmi upevnenia, vo výške $-h$; rýchlosť v tomto bode musí byť vodorovná, lebo inak by sa korálka pohybovala do nižšieho bodu alebo z neho prichádzala.

Vďaka symetrii môžeme $h$ nájsť pomocou Pytagorovej vety, podľa ktorej máme $(L/2)^2 = (d/2)^2 + h^2$, teda $h = \sqrt{L^2 - d^2}/2$. Zo zákona zachovania mechanickej energie potom

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh\,.$$

Z toho dostávame rýchlosť v najnižšom bode

$$v_f = \sqrt{v^2 + 2hg} = \sqrt{v^2 + \sqrt{L^2 - d^2}g}\,.$$

Otázka na zamyslenie: čo by sa stalo, ak by sme niť na začiatku nenapli alebo udelili korálke aj nenulovú vodorovnú rýchlosť?

***Jakub Šafin***
xellos@fykos.cz

## Úloha EE ... kalamita

*Máme měděný drát délky $l$ kruhového průřezu o poloměru $r = 0{,}9\,\mathrm{mm}$. Začalo mrznout, proto se na drátě vytvořila tenká vrstva ledu tloušťky $t = 0{,}05\,\mathrm{mm}$. Teplota okolí je $T = -5\,^{\circ}\mathrm{C}$. Drát je připojený na zdroj stejnosměrného napětí $U = 600\,\mathrm{V}$ v sérii se zátěží o odporu $R_0 = 100\,\Omega$. Jak dlouho musíme čekat, než led roztaje? Předpokládejte, že odpor $R_0$ je mnohem větší než odpor drátu. Budou se vám hodit následující hodnoty veličin: hustota ledu $\varrho_{\mathrm{l}} = 920\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_{\mathrm{l}} = 330\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$, měrná tepelná kapacita ledu $c_{\mathrm{l}} = 2\,100\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, rezistivita mědi $\varrho = 1{,}7\cdot 10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$.* *Xellos si spomenul, ako v Prahe prestali jazdiť električky.*

Drôtom prechádza prúd $I = U/R_0$. Drôt dĺžky $l$ má odpor

$$R = \varrho \frac{l}{\pi r^2}\,,$$

uvoľňuje sa na ňom teda výkon

$$P = I^2 R = \varrho l U^2\ /(\pi r^2 R_0^2)$$

v podobe tepla. Hmotnosť ľadu je

$$m = \varrho_{\mathrm{l}} l \pi \left((r+t)^2 - r^2\right) = \varrho_{\mathrm{l}} l \pi t (2r + t)$$

($\varrho_{\mathrm{l}}$ je hustota ľadu), na jeho ohriatie na $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ a roztopenie je teda potrebné dodať teplo

$$Q = m(l_{\mathrm{l}} + c_{\mathrm{l}} \Delta T)\,,$$

kde $l_{\mathrm{l}}$ a $c_{\mathrm{l}}$ sú skupenské teplo topenia a tepelná kapacita ľadu. Na to je potrebný čas

$$\tau = \frac{Q}{P} = \frac{\varrho_{\mathrm{l}} t (2r+t)(l_{\mathrm{l}} + c_{\mathrm{l}} T)\pi^2 r^2 R_0^2}{\varrho U^2} \approx \frac{2\varrho_{\mathrm{l}} t (l_{\mathrm{l}} + c_{\mathrm{l}} T)\pi^2 r^3 R_0^2}{\varrho U^2} \doteq 6\,\mathrm{min}\,,$$

kde sme využili, že vrstva ľadu je tenká, teda $t \ll r$.

***Jakub Šafin***
`xellos@fykos.cz`

## Úloha EF ... cesta do školy

*Lukáš chce přejít přes cestu, po které jede cyklista. Cyklista se pohybuje rychlostí $v_{\mathrm{c}}$ po přímce vzdálené $d$ od okraje cesty, na kterém stojí Lukáš. Na začátku je od Lukáše vzdálený $l$ (měřeno podél okraje cesty). Lukáš se může pohybovat po libovolné přímce a libovolnou konstantní rychlostí. Jakou minimální rychlost potřebuje na to, aby přeběhl cestu před kolem, ale kolo ho nesrazilo?* *Xellos [pre/s]formuloval Lukášovu kaskadérsku úlohu.*

Optimálne je zjavne prebehnúť tesne pred cyklistom – cyklista a Lukáš sa stretnú v rovnakom čase na rovnakom mieste.

Keďže nás zaujíma len priamka, po ktorej ide bicykel, vzdialenosti budeme merať pozdĺž tejto priamky. Na začiatku sú súradnice Lukáša a cyklistu $x_{\mathrm{L}} = 0$ a $x_{\mathrm{c}} = -l$.

Nech si Lukáš zvolí uhol $\alpha$ (voči ceste) a rýchlosť $v$. Potom prebehne pred bicyklom v čase

$$t = \frac{d}{v \sin\alpha}\,.$$

V tomto čase sú súradnice Lukáša a bicykla

$$x_{\mathrm{L}} = vt\cos\alpha = \frac{d}{\operatorname{tg}\alpha}\,, \quad x_{\mathrm{c}} = -l + v_{\mathrm{c}}t = -l + \frac{dv_{\mathrm{c}}}{v\sin\alpha}$$

a z ich rovnosti dostaneme podmienku

$$\frac{dv_{\mathrm{c}}}{v} = d\cos\alpha + l\sin\alpha\,.$$

Minimálna rýchlosť $v$ znamená, že je výraz na pravej strane maximálny. Jeho maximum sa dá určiť aj bez derivácií – predstavme si, že $d$ a $l$ sú odvesny pravouhlého trojuholníka s uhlami $\beta, 90^\circ - \beta, 90^\circ$ tak, že platí

$$\sin\beta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}\,,$$
$$\cos\beta = \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}\,.$$

Potom môžeme využiť súčtový vzorec pre sínus a dostaneme

$$\frac{dv_{\mathrm{c}}}{v} = \sin(\alpha + \beta)\sqrt{d^2 + l^2} \leq \sqrt{d^2 + l^2}\,.$$

Maximum výrazu napravo sa ľahko dosiahne tým, že nastavíme $\alpha = 90^\circ - \beta$. Potom je min. rýchlosť

$$v = \frac{dv_{\mathrm{c}}}{\sqrt{d^2 + l^2}}\,.$$

Rovnaký výsledok dostaneme aj derivovaním. Všimnime si, že uhol $\alpha$ je taký, aby sa Lukáš rozbehol pod pravým uhlom od smeru, pod ktorým vidí cyklistu.

***Jakub Šafin***
`xellos@fykos.cz`

## Úloha EG ... přímochlad

*Naproti sobě stojí dvě parabolická zrcadla o průměru $d$. Jedno má v ohnisku kádinku s kapalným dusíkem o stálé teplotě $T_{\mathrm{N}} = 77\,\mathrm{K}$ a druhé dokonale černou kuličku o poloměru $r \ll d$. Celá sestava je umístěna v pozadí o teplotě $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Vzdálenost zrcadel $l \gg d$, jinými slovy můžete uvažovat, že kulička z jedné poloviny „ozařována“ kádinkou a z druhé pozadím. Jaká bude rovnovážná teplota této kuličky? Michala ovál (původně elipsa :-)).*

Pro řešení vyjdeme ze Stefan-Boltzmannova vyzařovacího zákona, jenž říká, že černé těleso s povrchem $S$ o teplotě $T$ vyzáří výkon $P = S\sigma T^4$. Koule je v rovnováze, takže vyzářený i přijatý výkon jsou v rovnováze.

$$2\pi r^2\sigma T_0^4 + 2\pi r^2\sigma T_{\mathrm{N}}^4 = 4\pi r^2\sigma T^4\,,$$

kde $T$ je hledaná teplota. Po úpravě obdržíme

$$T = \sqrt[4]{\frac{T_0^4 + T_{\mathrm{N}}^4}{2}}\,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání zjistíme, že kulička se ochladí na $T \doteq 250\,\mathrm{K}$.

***Michal Koutný***
`michal@fykos.cz`

## Úloha EH ... mřížka

*Na difrakční mřížku, která má 1 000 vrypů na 1 mm, dopadá světlo o vlnové délce $\lambda = 450\,\mathrm{nm}$. Kolik můžeme vidět maxim na stínítku?* *Olda se učil na test z optiky.*

Vycházíme ze známého vzorce pro výpočet polohy $m$-tého maxima na difrakční mřížce. Tento vzorec je ve tvaru

$$a \sin(\beta) = m\lambda \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{m\lambda}{a}\,,$$

kde $a$ je vzdálenost dvou sousedních vrypů a $m$ je řád maxima. Víme, že $\sin(\beta)$ může nabývat hodnot od $-1$ do 1. Teď nám stačí vyřešit následující nerovnost

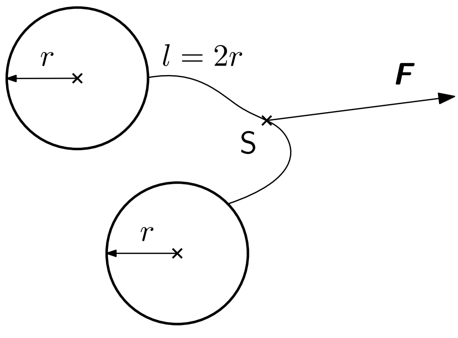
$$1 > \left|\frac{m\lambda}{a}\right| = |0{,}45m|$$

Číslo $m$ je z množiny celých čísel $\mathbb{Z}$, a proto $m$ může být $-2$, $-1$, 0, 1 nebo 2. Tedy můžeme vidět 5 maxim.

***Oldřich Holcner***
`holcner@fykos.cz`

## Úloha FA ... hračka chudých dětí

*Když byl Kuba malý, dostával k narozeninám samé počítačové hry, ale žádné běžné hračky. Vyrobil si proto vlastní hračku – vzal dva tenké dřevěné disky o poloměru $r$ a propojil je provázkem o délce $l = 2r$. Provázek je připevněný k hranám disků, z nichž jeden je dvakrát těžší než druhý. Kuba disky položí (ne postaví!) na vodorovnou podložku a táhne horizontální konstantní silou o velikosti $F = 10\,\mathrm{N}$, která působí ve středu provázku S. Určete, jak velikou silou na sebe disky působí po ustálení směru pohybu. Tření je malé, disky jsou homogenní.*
*Mirek přemýšlel, jaké jsou nejlepší dárky pro děti.*




Obr. 9: Kubova hračka.

Poté, co se provázek napne a disky se pohybují rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem, svírají poloviny provázku úhel $\alpha = 60^\circ$ (protože prodloužení provázku spolu se spojnicí středů disků tvoří rovnostranný trojúhelník). Položme osu úhlu $\alpha$ do osy $x$ souřadného systému a spojnici středů disků do osy $y$. Síla $\boldsymbol{F}$ působí ve směru spojnice středu provázku (působiště síly) a společného těžiště disků, neboť víme, že pohyb disků je přímočarý. Síla $\boldsymbol{F}$ svírá s osou $x$ úhel $\beta$.

Snadno určíme, že těžiště disků leží ve vzdálenosti $2R/3$ od středu těžšího disku, a samozřejmě na spojnici středů.

Když jsme si nyní rozmysleli geometrii úlohy, dokážeme z pravoúhlých trojúhelníků vyjádřit

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(\alpha/2)\,.$$

Dále pokud označíme hmotnost lehčího disku $m$ a těžšího $2m$, tak se celý systém, a tedy i každý z disků, pohybuje se zrychlením

$$a = \frac{F}{3m}\,.$$

Nyní si ještě rozmyslíme, že normálová síla $\boldsymbol{N}$ působící mezi disky se spolu s tahovou silou $\boldsymbol{T}$ provázku sečte na výslednou sílu $\boldsymbol{F}$. Mezi $F$ a $N$ potom platí vztah

$$N\cos(\alpha/2) = ma\cos(\pi/2 - \alpha/2 - \beta) = ma\sin(\alpha/2 + \beta)\,,$$

který jsme získali z průmětu normálové síly a výsledné síly působící na lehčí disk $ma$na kolmici k tažné síle v provázku. Z toho

$$N = \frac{F}{3}\frac{\sin(\alpha/2+\beta)}{\cos(\alpha/2)}\,.$$

Nyní už bychom mohli dosadit, výraz lze však ještě upravit do přijatelnějšího tvaru. S využitím vztahu mezi tangentami a součtových vzorců pro sinus postupně dostáváme

$$\frac{\sin(\alpha/2+\beta)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\sin(\alpha/2)\cos\beta + \sin\beta\cos(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \operatorname{tg}(\alpha/2)\cos\beta + \sin\beta = 4\sin\beta\,,$$

takže

$$N = \frac{4}{3}F\sin\beta\,,$$

kde

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\,.$$

Po dosazení do vztahu pro $N$ tedy

$$N = \frac{2}{3\sqrt{7}}F \doteq 2{,}5\,\mathrm{N}$$

Disky na sebe budou působit silou přibližně 2,5 N.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FB ... není všechno ideální

*V nádobě s pístem se nachází* ***ne****ideální plyn. Nejprve se adiabaticky rozepne a vykoná při tom práci. Poté se plyn izochoricky přesune do stavu s teplotou rovnou počáteční. Nakonec se izotermickým procesem navrátí do původního stavu. Najděte práci* $W_{12}$ *vykonanou na plynu při adiabatickém ději, jestliže bylo plynu během izochorického procesu dodáno teplo* $Q_{23}$ *a při izotermickém ději jsme vykonali práci* $W_{31}$*. Přitom známe kalorickou a termickou stavovou rovnici ve tvarech* $U = \varrho(T)V$ *a* $p = \varrho(T)/3$ *(tedy* $\varrho$ *je funkcí pouze teploty). Očekáváme* *výsledek pouze v proměnných $Q_{23}$, $W_{31}$ upravený do rozumného tvaru.*

*Mirek už měl dost ideálního plynu.*

Máme proces o třech krocích, kde 1−2 je adiabatický proces, 2−3 izochorický a 3−1 izotermický. Jedná se o cyklický děj, takže pro změny vnitřních energií během jednotlivých dějů platí

$$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0\,.$$

Při izochorickém ději se nekoná práce, $W_{23} = 0$, takže

$$\Delta U_{23} = Q_{23}\,.$$

Na izotermě platí

$$\Delta U_{31} = U_1 - U_3 = \varrho(T_1)(V_1 - V_2) = 3p_1(V_1 - V_2) = -3W_{31}\,.$$

Na plynu konáme práci, tedy $W_{31} > 0$; to je v pořádku, neboť zároveň vyměníme teplo $-4W_{31}$, vnitřní energie tedy opravdu poklesne. Pro adiabatický děj z definice platí $Q_{12} = 0$, takže už snadno získáme

$$W_{12} = \Delta U_{12} = -\Delta U_{23} - \Delta U_{31} = -Q_{23} + 3W_{31}\,.$$

Můžete si sami rozmyslet, jak by děj fungoval s ideálním plynem.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

## Úloha FC ... planetka

*Spočtěte celkovou mechanickou energii planetky o hmotnosti $m = 10^{18}$ kg, víte-li, že se v perihéliu, resp. v aféliu své dráhy kolem Slunce pohybuje rychlostí $v_\mathrm{p} = 30\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, resp. $v_\mathrm{a} = 10\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.*

*Kubovi to nedalo a vymyslel úlohu.*

Zachováme-li moment hybnosti, bude platit $r_\mathrm{p}v_\mathrm{p} = r_\mathrm{a}v_\mathrm{a}$, kde $r_\mathrm{p}$, resp. $r_\mathrm{a}$ jsou vzdálenosti planetky od Slunce (o hmotnosti $M$) v perihéliu resp. v aféliu. Označíme-li $E$ hledanou energii, máme

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{GMm}{r_\mathrm{p}} = E = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \frac{GMm}{r_\mathrm{a}}$$

neboli

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}v_\mathrm{a}\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} - \frac{GMm}{r_\mathrm{p}} = E = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}v_\mathrm{p}\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}} - \frac{GMm}{r_\mathrm{a}}\,.$$

Pronásobením výrazů pro energii $r_\mathrm{p}$, resp. $r_\mathrm{a}$ a následným sečtením dostaneme

$$(r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a})E = \frac{1}{2}mv_\mathrm{p}v_\mathrm{a}(r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}) - 2GMm$$

a tedy ($a = r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}$)

$$E = \frac{1}{2}mv_\mathrm{p}v_\mathrm{a} - \frac{GMm}{a}\,.$$

My však víme, že $E = -GMm/2a$ (zjistíme to např. pomocí známého vzorečku, který je možno nalézt v tabulkách a který říká $v = \sqrt{GM\left(2/r - 1/a\right)}$), takže

$$E = -\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}v_\mathrm{a}\,.$$

Číselně $E = -1{,}5 \cdot 10^{26}$ J. Znaménko je správně – obecně při oběhu po uzavřené dráze vychází energie záporná.

***Kuba Vošmera***
kuba@fykos.cz

## Úloha FD ... planetární hydrostatika

*Uvažujme planetu, která je tvořená tekutinou o hustotě, která lineárně klesá směrem od jejího jádra dle vztahu $\varrho(r) = \varrho_0 - \lambda r$, kde $\varrho_0$ je hustota v jejím středu, $r$ je vzdálenost od jejího středu a pro $\lambda$ platí $\lambda \leq \varrho_0/R$, kde $R$ je poloměr planety. Planeta nerotuje a je dokonale kulatá. Vaším úkolem je zjistit, jaké zrychlení $a(r)$ by působilo na malé těleso v klidu o hustotě $\varrho_0$ (konstantní, bez závislosti na okolním tlaku) v závislosti na $r$, pokud by bylo těleso zcela ponořeno v tekutině tvořící planetu. Gravitační konstantu značíme $G$. Karel si vymýšlel planety.*

Při výpočtu gravitačního zrychlení (neboli intenzity gravitačního pole) $a_{\mathrm{G}}(r)$ uvnitř tělesa, které má sféricky symetricky rozloženou hmotu, potřebujeme znát část hmotnosti části planety $m(r)$, která je „pod tělesem“, lépe řečeno koule o poloměru $r$. Hmotnost vnější „slupky“ se totiž při výpočtu neuplatní, protože se gravitační vlivy z různých směrů navzájem vyruší (dá se to dokázat z Gaussova zákona). Při výpočtu si trochu zaintegrujeme – integrujeme od středu až po poloměr $r$ s tím, že $S(r) = 4\pi r^2$ je povrch koule o poloměru $r$

$$m(r) = \int_0^r \varrho(\tilde{r}) S(\tilde{r}) d\tilde{r} = \int_0^r \left(\varrho_0 - \lambda\tilde{r}\right) 4\pi\tilde{r}^2 d\tilde{r} = 4\pi \left[\varrho_0 \frac{\tilde{r}^3}{3} - \lambda \frac{\tilde{r}^4}{4}\right]_{\tilde{r}=0}^{r} = \pi r^3 \left(\frac{4}{3}\varrho_0 - \lambda r\right) .$$

Gravitační intenzita tedy bude

$$a_G(r) = G\frac{m(r)}{r^2} = \pi G r \left(\frac{4}{3}\varrho_0 - \lambda r\right) .$$

Díky tomu, že planeta nerotuje, vstupuje do výpočtu celkového zrychlení pouze gravitační síla $F_G(r) = m_0 a_G(r)$ a vztlaková síla $F_{\mathrm{vz}}(r) = \varrho(r) V a_G(r)$, kde $m_0 = \varrho_0 V$ je hmotnost ponořeného tělesa a $V$ je jeho objem. Pro výslednou sílu $F(r) = m_0 a(r)$ tedy platí

$$\begin{aligned} F(r) &= F_G(r) - F_{\mathrm{vz}}(r) , \\ m_0 a(r) &= m_0 a_G(r) - \varrho(r) V \; a_G(r), \\ a(r) &= \left(1 - \frac{\varrho(r) V}{\varrho_0 V}\right) a_G(r) . \end{aligned}$$

po dosazení tedy dostáváme finální vztah

$$a(r) = \pi G \lambda r^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{\lambda r}{\varrho_0}\right) .$$

Zrychlení s touto velikostí pak působí na ponořené těleso směrem ke středu planety.

***Karel Kolář***
karel@fykos.cz

## Úloha FE ... obtížný hmyz

*Verča byla na výletě a svačila jablko, ale najíst se pořádně nemohla, protože ji neustále otravoval ovád. Když se po něm již dosti vztekle ohnala, vylétlo jí nedojedené jablko z ruky pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ s počáteční rychlostí $v_0 = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Ovád se poté od Verči odpoutal a sledoval jablko po jeho parabolické trajektorii, přičemž letěl s konstantní velikostí rychlosti $v_0$. Určete velikost zrychlení působícího na ováda v bodě, kdy poprvé dosáhne poloviny maximální výšky, do které vyletělo jablko.* *Mirkovi něco přistálo na hlavě.*

Maximální výška, které předmět při šikmém vrhu dosáhne, je

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \,.$$

Podle zákona zachování energie ve výšce $H/2$ platí pro rychlost $v$ jablka

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mg\frac{H}{2} \,.$$

Odtud

$$v^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}\right) \,.$$

Úhel $\varphi$ mezi směrem pohybu a horizontálou potom vyjádříme jako

$$\cos\varphi = \frac{v_0 \cos\alpha}{v} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}}} \,.$$

Ve zkoumaném bodě působí na jablko normálové zrychlení (průmět tíhového zrychlení kolmo na směr rychlosti)

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\varphi \,.$$

$R$ zde označuje poloměr křivosti trajektorie jablka (resp. ováda) v daném bodě, který je tedy roven

$$R = \frac{v^2}{g\cos\varphi} \,.$$

Pro (dostředivé) zrychlení ováda potom platí

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{v_0^2 g\cos\varphi}{v^2} = \frac{g\cos\alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 10{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \,.$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí na počáteční rychlosti $v_0$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha FF ... uranový důl

*Rozpadová řada uranu 238 je následující:*

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} \longrightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow \dots $$

*Poločasy rozpadů (v pořadí rozpadové řady) jsou* $T_1 = 4{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{r}$, $T_2 = 24\,\mathrm{d}$, $T_3 = 6{,}7\,\mathrm{h}$ *a* $T_4 = 2{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{r}$. *Vypočítejte, jaký bude* dlouhodobý *poměr množství* ${}^{234}_{92}\mathrm{U}$ *k* ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. *Předpokládejte, že na počátku máme pouze čistý uran 238.* *Paťa ožiaril tento príklad.*

Musíme si uvedomiť, že všetky polčasy rozpadov sú oproti prvému veľmi, veľmi malé. Z dlhodobého hľadiska preto môžeme povedať, že je to rovnaké, ako keby boli nulové – t.j. ak vznikne nejaké tórium, protaktínium alebo urán, prakticky okamžite sa rozpadnú. Počet ich jadier sa teda dlhodobo nebude meniť.

Napíšme si rovnice pre rozpady. Prvky označíme od 1 po 4 indexmi príslušnými poradiu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_1 N_1\,, \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1\,, \\ \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_3 N_3 + \lambda_2 N_2\,, \\ \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_4 N_4 + \lambda_3 N_3\,. \end{aligned}$$

Rozpadové konštanty $\lambda_i$ súvisia s polčasmi rozpadov podľa vzťahu

$$\lambda_i = \frac{\ln 2}{T_i}\,.$$

Keďže sa však všetko ihneď premieňa, $\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}t} = 0$, teda platí

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \lambda_4 N_4\,.$$

Z rovnice hneď vidíme, že

$$\frac{N_4}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} = \frac{T_4}{T_1}\,.$$

Pomer množstiev izotopov uránu bude číselne $5{,}6 \cdot 10^{-5}$.

***Patrik Švančara***
`pato@fykos.cz`

## Úloha FG ... tajeme

*Do kalorimetru jsme vložili stejné hmotnosti ledu a vody při teplotě* $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$. *Naměřili jsme, že led roztál za* $\tau = 3\,\mathrm{min}$. *Také jsme si z teploměru odečetli, že teplota místnosti je* $t_\mathrm{k} = 20\,^\circ\mathrm{C}$. *Vypočtěte na základě měření, jak dlouho bude trvat, než se voda ohřeje z* $t_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ *na* $t_2 = 10\,^\circ\mathrm{C}$. *Měrná tepelná kapacita vody je* $c = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, *měrné skupenské teplo tání ledu* $l = 3{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$. *Budete potřebovat závislost tepelného toku na rozdílu teplot, uvažujte lineární aproximaci.* *Mirek vzpomínal na středoškolské experimenty.*

Při tání led přijal teplo $ml$ ($m$ je hmotnost ledu). Teplo odebrané z okolí dokážeme vyjádřit jako $(t_\mathrm{k} - t_0)K\tau$, kde $K$ je neznámá konstanta úměrnosti. Díky tomu, že známe čas $\tau$, můžeme tuto konstantu popisující kalorimetr vyjádřit jako

$$K = \frac{ml}{(t_\mathrm{k} - t_0)\tau}\,.$$

Nyní chceme ohřát vodu o $\Delta t = t_2 - t_1$; hmotnost vody je $2m$. Pokud by bylo $\Delta t$ malé, mohli bychom rovnou porovnat tepla

$$2mc\Delta t = K(t_\mathrm{k} - t_0)\Delta\tau = ml\frac{\Delta tau}{\tau}\,.$$

Ohřev vody z bodu mrazu o 10 °C by tedy trval

$$\Delta\tau = \frac{2c\Delta t\tau}{l} \doteq 47\,\mathrm{s}\,.$$

Změna teploty o deset stupňů Celsia však vzhledem k teplotě okolí není malá, nemůžeme si tedy dovolit aproximaci neměnného teplotního rozdílu mezi kalorimetrem a okolím. Nahradíme rozdíly s $\Delta$ diferenciály $\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}t$ a dostaneme diferenciální rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{2mc}{K}\frac{\mathrm{d}t}{t_\mathrm{k} - t} = \mathrm{d}\tau\,.$$

Integrací od $t_1$ do $t_2$ dostaneme rovnici

$$\frac{2mc}{K}\ln\frac{t_\mathrm{k} - t_1}{t_\mathrm{k} - t_2} = \Delta\tau$$

a po dosazení za $K$ konečný vzorec pro dobu ohřevu

$$\Delta\tau = \frac{2c\tau(t_\mathrm{k} - t_0)}{l}\ln\frac{t_\mathrm{k} - t_1}{t_\mathrm{k} - t_2} \doteq 66\,\mathrm{s}\,.$$

Voda se po roztání ledu ohřeje na teplotu 10 °C za $\Delta\tau = 66\,\mathrm{s}$.

***Miroslav Hanzelka***
mirek@fykos.cz

## Úloha FH ... elektromagnetický výtah

*Na měkkém drátu zanedbatelné hmotnosti a délky $2l = 20\,\mathrm{m}$, jehož oba konce jsou upevněné v jednom a tom samém bodě na stropě, je zavěšené závaží o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$. Drátem protéká elektrický proud $I = 1\,\mathrm{A}$. O kolik se závaží zdvihne, pokud zapneme vodorovné magnetické pole $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$?* *Xellos si myslí, že výťahy na koleji sú šrot.*

Kolmo na element $\mathrm{d}l$ drôtu pôsobí sila od mag. poľa $\mathrm{d}F = BI\mathrm{d}l$, ktorá spôsobí, že sa drôt zakriví; polomer krivosti by mal byť jednoznačne udaný touto silou, ktorá je rovnaká všade na drôte okrem bodu, v ktorom je upevnené závažie, preto bude každá polovica drôtu (od stropu po závažie) mať tvar oblúka kružnice; drôt bude natočený kolmo na pole $B$.

Ak je polomer krivosti tohto oblúka $R$, platí pre silu $F_T$ napínajúcu drôt (dá sa to odvodiť tak, že uvažujeme rovnováhu síl pôsobiacich na malý oblúk kružnice)

$$F_T = R\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = RBI\,.$$

Vidíme, že $F_T$ je po celej dĺžke drôtu konštantné. V bode, kde je upevnené závažie, musia napäťové sily $F_T$, ktorými pôsobia obe časti drôtu, vykompenzovať tiaž závažia; pre rovnováhu síl v zvislom smere teda platí

$$2F_T\cos\alpha = mg\,,$$

kde $\alpha$ je uhol, pod ktorým sa v bode so závažim každý oblúk drôtu odkláňa od kolmice. Keďže ide o oblúky kružnice s polomerom $R$ vymedzené uhlom $2\alpha$, platí $2\alpha R = l$, dostávame teda rovnicu

$$lBI\cos\alpha = mg\alpha\,.$$

Ak sú $I$ aj $B$ dostatočne malé, bude aj uhol $\alpha$ blízky nule a $\cos\alpha \approx 1$. Platí teda

$$\alpha \approx \frac{lBI}{mg}\,.$$

Po zdvihnutí je vzdialenosť závažia od stropu $2R\sin\alpha$, hľadaná vzdialenosť je teda

$$\delta h = l - 2R\sin\alpha = l\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) \approx \frac{l\alpha^2}{6} = \frac{l}{6}\left(\frac{lBI}{mg}\right)^2 \doteq 14\,\mathrm{cm}$$

(použili sme odhad sínusu tzv. Taylorovým polynómom 3. stupňa). Výsledná vzdialenosť je strašne malá aj pri dosť veľkom prúde. Na poriadne zdvihnutie potrebujeme veľké mag. pole, vysoký prúd a dlhý drôt. Aby sa drôt nezahrieval príliš prudko, musí byť hrubý a teda ťažký; v skutočnosti potom tiaž lana spôsobí jeho deformáciu.

***Jakub Šafin***
`xellos@fykos.cz`

## Úloha GA ... digamma

*Pozitron pohybující se rychlostí $v$ anihiluje s nehybným elektronem za vzniku dvou fotonů se stejnými vlnovými délkami $\lambda$. Každý foton je od původního směru pohybu pozitronu odchýlený o úhel $\alpha = 30^\circ$. Jaká byla rychlost pozitronu?* *Xellosráta příklady na Fyziku V.*

Nech sa pozitrón pohybuje v smere osi $x$. Pri anihilácii sa zachováva energia a vektorová hybnosť. Energia fotónu je $E_\gamma = hc/\lambda$ a jeho hybnosť je $p_\gamma = E_\gamma/c = h/\lambda$. Nás ale zaujíma len $x$-ová zložka hybnosti (keď ostatné sčítame, dostaneme nulu, čo vyplýva zo symetrie), ktorá je $p_\gamma\cos\alpha$. Pomocou energie pozitrónu $E_p$ a jeho hybnosti $p_p$ pred zrážkou môžeme písať pre celkovú energiu a $x$-ovú hybnosť

$$E = m_\mathrm{e}c^2 + E_\mathrm{p}\,,$$
$$p_x = p_\mathrm{p}\,.$$

Po zrážke zase platí

$$E = 2\frac{hc}{\lambda}\,,$$
$$p_x = 2\frac{h}{\lambda}\cos\alpha\,,$$

teda $p_x = E\cos\alpha/c$. Nakoniec využijeme relativistický vzťah medzi hybnosťou a energiou $(p_\mathrm{p}c)^2 + (m_\mathrm{e}c^2)^2 = E_\mathrm{p}^2$, do ktorého dosadíme a dostaneme

$$\left(m_\mathrm{e}c^2 + E_\mathrm{p}\right)^2\cos^2\alpha + (m_\mathrm{e}c^2)^2 = E_\mathrm{p}^2\,.$$

Označme $m_\mathrm{e}c^2 = E_0$; po úpravách dostaneme kvadratickú rovnicu

$$0 = E_\mathrm{p}^2\sin^2\alpha - E_0^2(1+\cos^2\alpha) - 2E_0E_\mathrm{p}\cos^2\alpha\,.$$

Jej riešením je

$$E_\mathrm{p} = \frac{\cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha}E_0 = \left(\frac{2}{\sin^2\alpha} - 1\right)E_0 = 7E_0$$

(druhý koreň je záporný a teda nefyzikálny). Keďže $E_\mathrm{p} = E_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, získame rýchlosť $v$ ako

$$v = \frac{c\sqrt{2 - 2\sin^4\alpha}}{1+\cos^2\alpha} = c\sqrt{1 - \frac{1}{49}} \doteq 2{,}97\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Všimnime si, že dva fotóny s rovnakými energiami sú potrebné na zachovanie hybnosti a energie.

***Jakub Šafin***
`xellos@fykos.cz`

***FYKOS***
***UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta***
***Ústav teoretické fyziky***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
***http://www.facebook.com/Fykos***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.