

## Úvodem

Milí FYKOSáci,

školní rok se přehoupl do posledního čtvrtletí a s ním přichází šestá a poslední série tohoto ročníku. Někteří z vás mají již nyní diplom úspěšného řešitele jistý a mnozí k němu mají slibně nakročeno. Pokud tedy chcete využít jedné z možností prominutí přijímacích zkoušek na Matfyz nebo pokud si prostě chcete dát diplom za rámeček do výstavky, máte poslední šanci zvýšit svůj bodový zisk. Šesté sérii výjimečně vévodí elektromagnetismus namísto mechaniky, takže budete muset pořádně nastartovat obvodky ve vaší šedé kůře. Mladší z vás, kteří si s elektřinou ještě moc netykají, jistě ocení hravou mechanickou experimentální úlohu. Poslední díl seriálu zrekapituluje probranou látku, ale také prozradí leccos zajímavého o chemických reakcích z pohledu fyzika. Spoustu výtečných nápadů při řešení přejí vaši

*Organizátoři*



### Zadání VI. série



*Termín uploadu: 17. 5. 2016 23.59*

*Termín odeslání: 16. 5. 2016*

#### Úloha VI.1 ... mám toho plnou hlavu

2 body

V roce 2015 byla udělena Nobelova cena za fyziku za experimentální prokázání oscilace neutrin. O neutrinech jste už jistě někdy slyšeli a možná víte, že s látkou interagují jen velmi slabě, a proto dokáží bez zpomalení proletět Zemí a jinými velkými objekty. Zkuste za pomoci literatury a internetových zdrojů určit, kolik neutrin se v jednom okamžiku nachází v průměrném člověku. Nezapomeňte citovat zdroje!

#### Úloha VI.2 ... dioptrická

2 body

Pikošova kamarádka nosí brýle. Když si je nasadí, její oči se zdají menší. Je krátkozraká či dalekozraká? Svou odpověď dobře zdůvodněte.

#### Úloha VI.3 ... jedeme z kopce

4 body

Autem o hmotnosti  $M$  jedeme nahoru do kopce a dolů ze stejného kopce se sklonem  $\alpha$  stejnou rychlostí  $v$  se zařazeným stejným převodovým stupněm, a tedy stejnými otáčkami motoru. Jaký je rozdíl tažného (do kopce) a brzdného (z kopce) výkonu motoru?

#### Úloha VI.4 ... fire in the hole

4 body

Pro ohřev plasmatu ve fúzních zařízeních se používají svazky neutrálních částic. V takovém zařízení se nejprve urychlí ionty deuteria na vysokou energii a následně se přenosem náboje neutralizují, přičemž si zachovávají téměř původní rychlost. Na tokamaku COMPASS mají částice na výstupu ze svazku energii 40 keV a proud ve svazku těsně před neutralizací je 12 A. Jaká síla působí na generátor svazku? Jaký je jeho výkon?

**Úloha VI.5 ... závody částic**

5 bodů

V homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ ,  $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  T obíhají po kružnicích v rovině  $xy$  dvě částice, elektron s hmotností  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg a nábojem  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C a alfa částice s hmotností  $m_{\text{He}} = 6,6 \cdot 10^{-27}$  kg a nábojem  $2e$ . Poloměr trajektorie elektronu je  $r_e = 2$  cm, poloměr trajektorie alfa částice je  $r_{\text{He}} = 200$  m. V jednom okamžiku zapneme slabé homogenní elektrické pole  $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$ ,  $E_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  V·m<sup>-1</sup>. Určete, jaké dráhy  $s_e$  a  $s_{\text{He}}$  urazí každá z částic za čas  $t = 1$  s od zapnutí elektrického pole. Předpokládejte, že částice jsou dostatečně vzdálené a nevyzařují.

**Úloha VI.P ... i-jablko**

6 bodů

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak sestavit zařízení, které pozná, jakým směrem je natočeno vůči směru tíhového zrychlení a tuto informaci nějakým způsobem převede na elektrický signál. (Zařízení na způsob akcelerometru v chytrých telefonech.)

**Úloha VI.E ... zákeřný restituční koeficient**

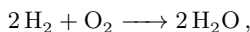
8 bodů

Pokud pustíte hopík či jiný pružný míček na vhodný povrch, pak se začne odrážet. Při každém odrazu se disipuje (ztrácí do tepla, zvuku atd.) kinetická energie míčku a ten proto nevyskočí do počáteční výšky. Definujme koeficient restituční jako poměr kinetické energie míčku po dopadu ku kinetické energii před dopadem. Závisejí koeficient restituční na výšce, ze které míček dopadal? Vyberte si jeden vhodný míček a jeden vhodný povrch (měření na více površích s více míčky samozřejmě náležitě oceníme), na kterém proměříte závislost koeficientu restituční na výšce, ze které míček dopadl. Experiment náležitě popište a proveďte dostatečný počet měření.

**Úloha VI.S ... závěrečná**

6 bodů

a) Najděte v tabulkách nebo na internetu, jak se změní entalpie a Gibbsova energie při reakci



kde jde o přeměnu plynů na plyn a odehrává se při standardních podmínkách. Vypočítejte také, jak se změní entropie při takovéto reakci. Výsledky udávejte vztažené na jeden mol.

b) Pro fotonový plyn platí, že tok energie skrze plochu je dán vztahem

$$j = \frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} c T^4.$$

Dosadte hodnoty konstant a porovnejte výsledek se Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

c) Vypočítejte vnitřní energii a Gibbsovu energii fotonového plynu. Dále pomocí vnitřní energie vypočítejte závislost teploty fotonového plynu na objemu při adiabatickém rozpínání, tedy při procesu s  $\delta Q = 0$ .

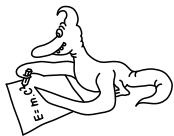
*Nápověda:* Zákon pro adiabatický děj s ideálním plynem jsme odvodili v druhém dílu seriálu.

d) Vezměme si fotonový plyn. Ukažte pro  $\delta Q/T$ , že pokud ho vyjádříme jako

$$\delta Q/T = f_{,T} dT + f_{,V} dV,$$

tak funkce  $f_{,T}$  a  $f_{,V}$  splňují nutnou podmínku na existenci entropie, tedy že

$$\frac{\partial f_{,T}(T, V)}{\partial V} = \frac{\partial f_{,V}(T, V)}{\partial T}.$$



## Řešení V. série

## Úloha V.1 ... už to teče

2 body; průměr 1,89; řešilo 53 studentů

Tenký drát s odporem  $R = 100 \text{ m}\Omega$  a délkou  $l = 1 \text{ m}$ , který je připojen ke zdroji stejnosměrného napětí  $U = 3 \text{ V}$ , obsahuje ve svém objemu  $N = 10^{22}$  volných elektronů, kterými přispívá k toku elektrického proudu. Určete, jak velkou průměrnou (přesněji střední) rychlostí se elektrony v drátu pohybují.

*Mirek už zase slyšel, že částice ve vodiči tečou rychlostí světla.*

Prvním krokem je zjistit, jaký protéká drátem elektrický proud. To je z Ohmova zákona  $I = U/R = 30 \text{ A}$ . Elektrický proud je definován jako náboj, který proteče průřezem vodiče za jednotku času, tedy  $I = Q/\Delta t$ . Posunou-li se všechny elektrony o (střední) vzdálenost  $\Delta l$  ve směru vodiče, projde průřezem vodiče náboj  $Q = \Delta l \cdot Q_{\text{celk}}/l$ . Celkový náboj volných elektronů ve vodiči určíme jako počet elektronů krát náboj elektronu (z tabulek elementární náboj  $e \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) a získáme  $Q_{\text{celk}} = -1,6 \text{ kC}$ . Vyjádříme z výše uvedených rovnic  $\Delta l$  a  $\Delta t$ , podělíme a získáme

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{Ql}{Q_{\text{celk}} I},$$

což můžeme upravit na

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} \equiv v = \frac{lI}{Q_{\text{celk}}} = \frac{lU}{RNe}.$$

Dosazením zjistíme, že střední rychlost elektronů v zadaném vodiči je  $v \doteq 2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vypustili jsme znaménko mínus, neboť směr pro nás není důležitý (elektrony se zřejmě budou pohybovat ke kladnému pólu zdroje). Vidíme, že i když teče drátem velmi vysoký proud, elektrony se rozhodně nepohybují rychlostí světla, jak by si neznalý člověk mohl naivně myslet. Poznamenejme ještě, že kdyby byl drát například měděný, došlo by téměř okamžitě k jeho přetavení.

## Komentáře k došlým řešením

Velmi mě potěšilo, že u naprosté většiny řešení nebylo nic, co by bylo potřeba opravit. Častým nešvarem bylo uvádění zbytečně mnoha desetinných míst (dvě platné číslice jsou v tomto případě víc než dost). Mnoho z vás přidalo nějaký komentář k fyzikální stránce problému, například že vypočítaná rychlost je stále ještě o dva až tři řády vyšší než reálné hodnoty, nebo vypočítali, na jakou rychlost by byly elektrony urychleny daným napětím, pokud by nepůsobil elektrický odpor, případně vysvětlili rozdíl mezi driftovou rychlostí elektronů a rychlostí šíření elektrického pole, což je skutečná „rychlost elektřiny.“ Takové věci ukazují, že se zajímáte o více věcí okolo, než jen o fyzikální vzorce.

**Mikuláš Matoušek**  
mikulas@fykos.cz

**Úloha V.2 . . . mnohočásticová**

2 body; průměr 2,00; řešilo 38 studentů

Mějme nádobu, která je pomyslně rozdělena na dvě shodné disjunktní oblasti A a B. V nádobě je  $n$  částic, z nichž se každá nachází s pravděpodobností 50% v části A a s pravděpodobností 50% v části B. Určete, s jakou pravděpodobností bude v části A  $n_A = 0,6n$ , resp.  $n_A = 1+n/2$  částic. Řešte pro  $n = 10$  a  $n = N_A$ , kde  $N_A \doteq 6 \cdot 10^{23}$  je Avogadrova konstanta.

*Mírek má rád zákon velkých čísel.*

O úloze se lépe přemýšlí jako o posloupnosti bitů, jeden bit pro každou částici. Když je částice v části A, je hodnota 1, pro částici v části B bude hodnota příslušného bitu 0.

*Případ  $n = 10$*

Obě otázky se slily do jedné: „Kdy je v části A 6 částic z 10?“ Předpokládáme, že částice jsou navzájem odlišitelné. Potom všech možných rozdělení částic mezi části A a B je  $2^{10} = 1024$  (počet všech možností pro 10 bitů) a všech možných šestic, které mohou v části A být, je  $\binom{10}{6} = 210$ . Tomuto se říká kombinační číslo, které je definováno

$$\binom{n}{k} = n!/[k! \cdot (n-k)!],$$

kde symbol ! znamená faktoriál. Tedy pravděpodobnost, že v části A bude právě 6 částic, je  $p = 210/1024 \doteq 0,205$ .

*Případ  $n = N_A$*

První otázka: „Kdy je v části A počet částic roven  $0,6N_A$ ?“, druhá „Kdy je v části A počet částic roven  $N_A/2 + 1$ ?“ Rádi bychom použili stejný postup, ale čísla, která vycházejí při mezivýpočtech, jsou moc velká (zkuste si například spočítat  $2^{N_A}$ , to je mnohem větší číslo, než je kalkulačka schopna si zapamatovat). Musíme tedy postupovat opatrně.

V prvním případě má být v části A celkem  $3N_A/5$  částic a v druhém případě je v části A celkem  $N_A/2 + 1$  částic. Pravděpodobnosti, že tyto situace nastanou, jsou menší než pravděpodobnost, že částice budou rovnoměrně rozděleny (z vlastností kombinačních čísel). Budeme tedy počítat pravděpodobnost, že jsou částice rovnoměrně rozděleny mezi obě poloviny. Spočítáme to stejně jako v první části, jen si budeme muset dávat větší pozor.

Nejprve si povězme, jakou použijeme strategii. Rádi bychom si shora omezili kombinační číslo  $\binom{2n}{n}$  pro  $n$  jdoucí k nekonečnu (pro jednoduchost), pokud možno aby se nám v tomto odhadu vyskytovala nějaká mocnina dvojky, pak se pravděpodobnost bude hezky krátit. Tedy si výraz napíšeme a upravíme:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{(1 \cdot 2 \cdots n)^2 \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n}}} = \frac{2^{2n}(1 \cdot 2 \cdots 2n)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)^2}.$$

To si ještě můžeme upravit:

$$\frac{2^{2n}(1 \cdot 2 \cdots 2n)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)(2 \cdot 4 \cdots 2n)} = 2^{2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = 2^{2n} p.$$

Nyní budeme  $p$  odhadovat shora. Uvažme součin:

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = (2n+1)p^2.$$

Tedy:

$$p \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Tak jsme si šikovně omezili  $p$ . Tedy pravděpodobnost, kterou chceme spočítat, je:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = p \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Pro velká  $n$  je  $1/\sqrt{2n}$  opravdu malé číslo, přesněji pro  $N_A$  je to zhruba  $9,1 \cdot 10^{-13}$ . Tedy i obě pravděpodobnosti v druhé části se blíží nule, neboť jsou menší než pravděpodobnost, že rozdělení je rovnoměrné.

Je také užitečné si uvědomit, v jakém poměru jsou vůči sobě pravděpodobnosti pro  $0,6N_A$  a  $N_A/2 + 1$ . Když si tyto pravděpodobnosti rozepíšeme podle výše uvedeného vzorečku a podělíme, dostaneme, že poměr první pravděpodobnosti ku druhé je

$$\frac{(0,5N_A - 1)(0,5N_A - 2) \cdots (0,4N_A + 1)}{0,6N_A(0,6N_A - 1) \cdots (0,5N_A + 2)} = \frac{0,5N_A - 1}{0,6N_A} \cdot \frac{0,5N_A - 2}{0,6N_A - 1} \cdots \frac{0,4N_A + 1}{0,5N_A + 2}.$$

Všimneme si, že každý ze zlomků je menší než  $5/6$ , tedy poměr pravděpodobností se dá shora odhadnout číslem  $(5/6)^{0,1N_A - 1} \approx 10^{-10^{22}}$ , což je také maličké. Tedy pravděpodobnost pro  $N_A + 1$  je řádově mnohem větší než pravděpodobnost pro  $0,6N_A$ .

Úloha se také dala pěkně spočítat s využitím Stirlingova vzorce pro odhad faktoriálu, který odhaduje  $n!$  jako

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Po dosazení by se výrazy pokrátily a vyšly pravděpodobnosti blížící se nule – už jenom jejich (desítkové) logaritmy jsou přibližně  $-2 \cdot 10^{23}$ , tedy jejich hodnoty jsou kolem  $10^{-2 \cdot 10^{23}}$ . Toto řešení je samozřejmě také úplně správně, zde jsme ale chtěli ukázat, že to jde spočítat i středoškolskými metodami. Stejně je ale úloha těžší, než je u jednoduchých úloh běžné, a to při opravování samozřejmě bude zohledněno.

Komentář k bodovému hodnocení: Úloha byla dost obtížná, proto bylo bodování upraveno. Kdo spočítal jen první jednodušší část, dostal jeden bod, za neúplné řešení nebo pokus o spočtení druhé části jsme dávali body dva. Kdo se zdárně dostal až do konce, dostal bonus, dva bonusy dostalo jen několik málo řešení, která byla opravdu dobrá (respektive byla lepší než vzorák). Všichni řešitelé, kteří se o úlohu pokusili, si zaslouží pochvalu.

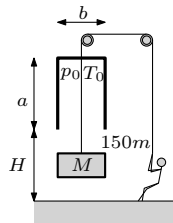
*Markéta Calábková*  
calabkovam@fykos.cz

## Úloha V.3 ... egyptská brána

3 body; průměr 2,65; řešilo 51 studentů

Ve starověkém Egyptu uměli vyrobit bránu, ale ještě neznali mříže, tak brány zavírali nilany (vápencovými kameny). Na obrázku vidíte 150 otroků o hmotnosti  $m = 60$  kg, kteří právě velmi pomalu otevírají bránu zavřenou nilanem o hmotnosti  $M = 8$  t. Nilan přesně (vzduchotěsně) pasuje do konstrukce nad bránou ve tvaru kvádra, která má vnitřní rozměry  $a = 3$  m,  $b = 0,5$  m a  $c = 3$  m. Uvnitř konstrukce je na počátku tlak  $p_0 = 100$  kPa a teplota  $T_0 = 300$  K a je umístěna ve výšce  $H = 3$  m. Určete, jak vysoko jsou otroci schopni vlastní vahou nilan zdvihnout, jestliže se teplota vzduchu nemění.

*Mírek rád předává otrockou práci jiným.*



Nilan je zvedán na kladce, tedy silou stejné velikosti, jakou jsou otroci přitahováni k Zemi. Otroci váží  $150m = 9$  t. Budou proto svojí vahou zvedat kámen silou

$$F_1 = F_{\text{otroci}} - F_{\text{nilan}} = (m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g, \quad (1)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení, do té doby, než se vrchní plocha dotkne konstrukce.

Jakmile se tak stane, uzavře nilan v konstrukci plyn. Pro výpočet budeme uvažovat ideální chování plynu. Kámen se bude chovat jako píst, který stlačuje plyn v konstrukci. Teplota vzduchu se dle zadání nemění. Jedná se tedy o izotermický děj. Teplota se v každém okamžiku vyrovnává s teplotou okolí, pracujeme tedy se sledem rovnovážných stavů. Také platí Boyleův-Mariottův zákon  $pV = \text{konst.}$  Protože objem plynu se bude snižovat, musí se tlak plynu zvyšovat. Na píst působí síla

$$F_2 = S\Delta p = bc\Delta p, \quad (2)$$

kde  $S$  je povrch vrchní stěny nilanu,  $b$  a  $c$  jsou délky vrchních hran a  $\Delta p$  je změna tlaku v důsledku změny objemu (na nilan působí tlak plynu shora i atmosférický tlak zdola, proto je síla úměrná jejich rozdílu  $\Delta p$ ).

Označme stav, kdy se nilan začne dotýkat konstrukce, jako stav 0. Stav 1 nastane ve chvíli, kdy bude kladka v rovnováze. Nutně platí rovnice  $p_1V_1 = p_0V_0$ . Tlak  $p_0$  známe, objem  $V_0$  spočítáme jako součin délek hran  $abc$ .  $p_1$  je větší než  $p_0$ , označme si ho proto jako  $p_0 + \Delta p$ .  $V_1$  můžeme také vypočítat jako součin délek hran. Délky  $b$  a  $c$  se nezmění, ale „výška“ plynu v konstrukci ano. Označme si tento nový rozměr jako  $a'$ . Po dosazení do Boyleova-Mariottova zákona máme

$$\begin{aligned} p_0abc &= (p_0 + \Delta p)bc a', \\ \Delta p &= p_0 \frac{a - a'}{a'}. \end{aligned} \quad (3)$$

Z rovnováhy na kladce (nilan se zvedá pomalu) víme, že kámen se zastaví, právě když  $F_1 = F_2$ . Porovnáním rovnic (1) a (2) zjistíme, že

$$(m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})bcg = \Delta p.$$

Dosazením změny tlaku z rovnice (3) a vyjádřením  $a'$  máme téměř hotovo.

$$\begin{aligned} p_0bc \frac{a - a'}{a'} &= (m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g, \\ a' &= \frac{p_0abc}{(m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g + p_0bc}. \end{aligned}$$

Číselně  $a' \doteq 2,8$  m. My ale máme určit, jak vysoko jsou otroci schopni nilan zdvihnout, to je vzdálenost  $((H - x) + (a - a'))$ , kde  $H$  je výška konstrukce nad zemí,  $x$  výška nilanu,  $a$  výška samotné konstrukce a  $a'$  konečná „výška“ plynu v konstrukci. Výšku nilanu zjistíme z hustoty vápence, kterou můžeme najít na internetu<sup>1</sup>. Vezmeme střední hodnotu  $2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Z toho lze vypočítat výšku nilanu jako

$$x \doteq \frac{m_{\text{nilan}}}{\rho_{\text{nilan}} bc}.$$

Číselně  $x \doteq 1,9$  m.

Vzdálenost  $R$ , o kterou otroci zvednou kámen, je  $R = H - x + a - a'$ . Po číselném dosazení máme  $R \doteq 1,3$  m.

*Kateřina Smítalová*  
katka@fykos.cz

### Úloha V.4 ... bezpečná jízda

4 body; průměr 2,81; řešilo 36 studentů

Máme auto, které se blíží kolmo ke zdi. Řidič, který v autě jede, by se ale chtěl přibližovat ke zdi bezpečně. Jaký by muselo mít auto průběh rychlosti, aby vzdálenost od auta ke zdi v každý okamžik odpovídala dráze, kterou by auto s okamžitou rychlostí v té chvíli urazilo za  $T = 2$  s? Karel přemýšlel nad bezpečnou vzdáleností.

V zadání máme slovně popsanou závislost okamžité rychlosti na vzdálenosti od zdi. Vyjádříme ji ze známého středoškolského vzorce

$$v(s) = \frac{s}{T}.$$

Získat závislost na čase už je podstatně složitější, musíme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{s(t)}{T}. \quad (4)$$

Záporné znaménko v rovnici musí být, abychom se ke zdi přibližovali a ne se od ní vzdalovali. Řešení se dá uhodnout, hledáme funkci, jejíž derivace je násobkem původní funkce. To splňuje exponenciální funkce tvaru  $f(x) = e^x$ , v našem případě je to

$$e^{-\frac{t}{T}}.$$

či její libovolný násobek. Z počátečních podmínek zjistíme konkrétně

$$s(t) = s_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

kde  $s_0$  je vzdálenost v čase  $t = 0$ . Závislost rychlosti na čase pak získáme pomocí vztahu  $v = s/T$ , obdržíme

$$v(t) = \frac{s_0}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Z vlastností této funkce vidíme, že řidič se ke zdi blíží bezpečně, protože v konečném čase do zdi nenarazí. Rychlost je vždy záporná, neboť se měřená vzdálenost  $s(t)$  v čase zmenšuje. Snadno můžeme určit, jaká byla počáteční rychlost  $v_0$  pro zvolenou počáteční vzdálenost  $s_0$ . Počáteční rychlost bude při zvyšování hodnoty daného  $T$  klesat.

<sup>1</sup> <https://sk.wikipedia.org/wiki/Vápenec>

Formálně lze diferenciální rovnici (4) řešit jak přes separaci proměnných, tak přes charakteristický polynom lineární diferenciální rovnice. Jako příklad uveďme první z metod, aplikace by v náznu vypadala takto:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\frac{s}{T}, \\ dt &= -\frac{T}{s} ds, \\ \int dt &= -\int \frac{T}{s} ds, \\ t &= -T \ln s + C, \\ s &= Ce^{-\frac{t}{T}},\end{aligned}$$

kde  $C$  je integrační konstanta (na každém řádku nabývá obecně jiné hodnoty). Za domácí úkol si můžete zkusit postup přes charakteristický polynom.

### Komentáře k došlým řešením

Mile mě překvapilo, kolik z vás dokázalo vyřešit diferenciální rovnici, přestože se jedná o učivo vysoce nad rámec středoškolského učiva. Dále mi přišlo zajímavé, kolika způsoby se dá diferenciální rovnice „obejít“, ať už přes posloupnosti, nebo numerická řešení. Ale překvapivě mnoho z vás zapomíná přidávat integrační konstanty.

**Mikuláš Matoušek**  
mikulas@fykos.cz

## Úloha V.5 . . . Rolling Stones

5 bodů; průměr 2,44; řešilo 27 studentů

Na nakloněné rovině stojí koule s nehomogenním rozložením hustoty. Známe úhel sklonu nakloněné roviny  $\alpha$ , poloměr koule  $R$  a vzdálenost  $t$  těžiště koule od jejího středu. Pokud si označíme střed koule  $S$ , bod dotyku koule s rovinou  $D$  a těžiště koule  $T$ , pak definujeme úhel  $\varphi_0 = \angle DST$  jako úhel před začátkem pohybu. Těžiště se navíc nachází v rovině určené úsečkou  $DS$  (normáloou k rovině) a směrem z kopce dolů. V závislosti na těchto parametrech podrobně rozeberte, jak se bude dál vyvíjet pohybový stav koule. Koule na rovině neprokluzuje.

*Tohle si chtěl Kuba spočítat už odmala.*

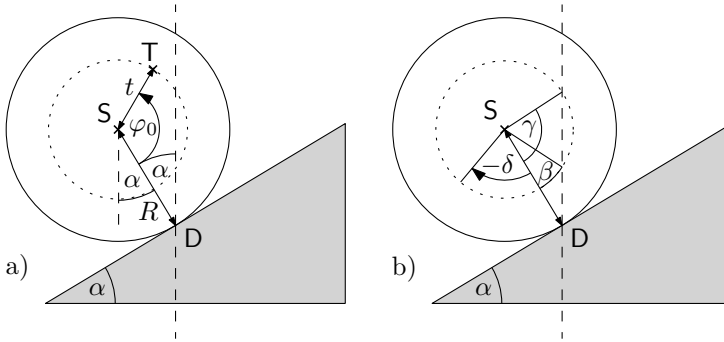
Přistupme k problému rozborem momentu sil působícího na kouli vzhledem k ose procházející bodem dotyku s rovinou (bod  $D$ ) a kolmé k obrázku 1. Ze znaménka tohoto momentu budeme soudit, jakým směrem se začne koule valit. Protože na kouli působí pouze její tíha a podložka, volíme jako vztahný bod (resp. osu) takový, kde do momentu mluví pouze tíhová síla. V bodě  $D$  na něj totiž působí ještě normálová reakční síla od podložky a tečná třecí síla. Vzhledem ke středu koule bychom tedy museli do celkového působícího momentu sil započítat ještě vliv třecí síly. Třecí sílu *nelze* zanedbat – bez ní by se koule nemohla otáčet, ale pouze klouzat.

Nejprve si rozeberme, kde je jaký úhel na obrázku 1. Spojnice  $SD$  se od svislého směru odklání o  $\alpha$ , a tedy od vodorovného směru o  $\pi/2 - \alpha$ .

Nyní si zadefinujme pomocnou veličinu  $r$  jako vodorovnou složku polohy těžiště  $T$  vzhledem k bodu dotyku  $D$  (kladná směrem do kopce). Tu si můžeme vyjádřit jako

$$r := -R \sin \alpha + t \sin(\varphi + \alpha).$$





Obr. 1: Náčrt situace. Část a) ukazuje počáteční parametry, část b) dopočtené významné úhly. Velikosti úhlů jsou pouze orientační.

Pokud bude pro všechny  $\varphi$  platit  $r \leq 0$ , bude se koule určitě už jen valit dolů. Pokud neplatí ostrá nerovnost, může rovnost nastat pouze v izolovaných bodech (konkrétně pouze v jednom, a to ve  $\varphi = \pi/2 - \alpha$ ). V tomto bodě je koule ve vratké rovnováze - při sebemenší výchylce na libovolnou stranu bude platit  $r < 0$  a koule se rozjede dolů.

Hledejme, jakým nastavením parametrů dosáhneme toho, aby alespoň na nějakém intervalu  $\varphi$  bylo  $r > 0$ . Do výrazu pro  $r$  přispívá kladnou hodnotou pouze druhý člen, který bude maximální pro  $\sin(\varphi + \alpha) = 1$ . Odtud dostáváme první výsledek, že zajímavé věci se mohou dít pouze, pokud platí

$$t > R \sin \alpha .$$

Dále tedy rozebírejme jen tento případ, protože jinak koule prostě sjede dolů.

Nyní najdeme hodnoty  $\varphi$ , ve kterých nastává rovnováha, jinak řečeno  $r = 0$ . Řešením této rovnice dostáváme dvě řešení (otočení o  $2\pi$  nás nezajímá), které si označíme jako  $\beta$  a  $\gamma$ ,

$$\beta := \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{R}{t} \sin \alpha\right) - \alpha ,$$

$$\gamma := \varphi_2 = \pi - \alpha - \arcsin\left(\frac{R}{t} \sin \alpha\right) .$$

Z oboru hodnot funkce  $\arcsin$  je vidět  $\beta < \gamma$  a z obrázku je zřejmé, že  $\beta \in (0, \pi/2 - \alpha)$ , a tedy platí také  $\gamma \in (\pi/2 - \alpha, \pi - 2\alpha)$ . Nyní můžeme říci, že pro  $\varphi \in (\beta, \gamma)$  je  $r$  kladné, jinak je záporné (pohybujeme se pouze na intervalu  $(-\delta, 2\pi - \delta)$ , kde úhel  $\delta \in (0, \pi)$  později šikovně zvolíme, abychom mohli říkat, co je děje pro  $\varphi$  na intervalech, nikoli jejich sjednoceních).

Pro  $\varphi \in (0, \pi/2 - \alpha)$  se při valení dolů zvyšuje  $r$  a pro  $\varphi \in (\pi/2 - \alpha, \pi - 2\alpha)$  se při valení dolů snižuje  $r$ . Rozmyslete si, že proto platí, že v  $\beta$  je stabilní rovnováha a v  $\gamma$  vratká.

Pokud  $\varphi_0 \in (\beta, \gamma)$ , pojedou koule nahoru, bude zrychlovat, po překročení hranice  $r = 0$  bude zpomalovat, až zastaví. Následně se rozjede dolů, bude zrychlovat, zpomalovat a nakonec zastaví opět ve  $\varphi_0$  (ZZE). Proto pro všechny  $\varphi_0$  mezi  $\beta$  a  $\gamma$  bude koule kmitat. Také pro nějaký interval záporných  $\varphi_0$  bude koule kmitat (právě zde poprvé zastavila koule v předchozím myšleném pokusu).

Nalezněme záporný mezní úhel  $-\delta$ , do kterého bude ještě koule kmitat. Určitě platí  $-\delta \in (-\pi, 0)$ , protože pro  $\varphi = -\pi \equiv \pi$  bude těžiště ve výšce (ve smyslu úhlů)  $\pi - \alpha$ , což je výše než pro  $\varphi = \gamma$ , kdy je těžiště ve výšce  $\pi - \arcsin((R/t) \sin \alpha)$ , protože pro  $\alpha \in (0, \pi/2)$  platí

$$\begin{aligned} \sin \alpha &< \frac{R}{t} \sin \alpha, \\ \alpha &< \arcsin\left(\frac{R}{t} \sin \alpha\right). \end{aligned}$$

A tedy, když sjede koule níže, bude mít energii dostatečnou, aby se těžiště dostalo nad hranici  $\varphi = \gamma$  a dále pokračovalo ve sjezdu dolů.

Pokud se koule rozjede z  $-\delta$ , bude zrychlovat z kopce dolů, pak zpomalovat, až zastaví mezi  $\beta$  a  $\gamma$ . Protože pro všechny úhly mezi  $\beta$  a  $\gamma$  včetně, existuje nějaký úhel  $\varphi \in (-\pi, 0)$ , kde se koule zastaví a obrátí, musí  $-\delta$  odpovídat právě  $\gamma$ . Nyní kouli vypustíme z bodu  $\varphi_0 = -\delta$  a ona zastaví v  $\gamma$ , mezi oběma stavy se tedy zachovává potenciální energie (kinetická je nulová). To také znamená, že těžiště je ve stejné výšce. Při přechodu od  $-\delta$  ke  $\gamma$  sjede koule dolů o  $R(\gamma + \delta) \sin \alpha$  a těžiště se otočí nahoru o  $-t \cos(\alpha + \gamma) + t \cos(\delta - \alpha)$ . Dostáváme tedy rovnici pro  $\delta$

$$R(\gamma + \delta) \sin \alpha - t(\cos(\delta - \alpha) - \cos(\alpha + \gamma)) = 0.$$

Levou stranu rovnice označme jako  $h(\delta)$ . Kvůli lineárnímu členu platí, že pro vysoká kladná čísla  $h(\delta)$  roste do nekonečna a pro vysoká záporná čísla (v absolutní hodnotě) klesá  $h(\delta)$  do minus nekonečna. Pro derivaci  $h(\delta)$  platí

$$h'(\delta) = R \sin \alpha + t \sin(\delta - \alpha) > R \sin \alpha(1 + \sin(\delta - \alpha)) \geq 0.$$

Tedy  $h(\delta)$  je rostoucí na  $(0, \pi)$  a rovnice  $h(\delta) = 0$  má právě jedno řešení. Protože při vypuštění koule z  $\gamma$  se koule někde zastaví a obrátí (a to někde je přesně  $-\delta$ ), musí to řešení být z přípustného intervalu. Rovnici sice nelze vyřešit obecně, ale pro libovolné konkrétní hodnoty  $t, \alpha, \varphi_0$  z ní numericky dostaneme požadovanou dolní mez  $-\delta$  (resp. dostaneme  $\delta$ ).

Při rozjezdu z úhlu  $-\delta$  se koule zastaví v úhlu  $\gamma$ , který představuje vratkou rovnováhu mezi kmitáním a sjezdem z kopce dolů. Proto je i  $-\delta$  vratkou pozicí, nicméně ne pozicí rovnovážnou.

Ted už máme všechny údaje potřebné k finálnímu rozboru.

1.  $t \leq R \sin \alpha$       koule pojede dolů
2.  $t > R \sin \alpha$ 
  - $\varphi_0 \in (-\delta, \gamma)$       koule bude kmitat okolo  $\varphi = \beta$
  - $\varphi_0 = -\delta$       vratká pozice mezi kmitáním okolo  $\beta$  a sjezdem dolů
  - $\varphi_0 = \gamma$       vratká rovnováha mezi kmitáním okolo  $\beta$  a sjezdem dolů
  - $\varphi_0 \in (\gamma, 2\pi - \delta)$       koule pojede dolů

Nezapomeňte však, že  $\beta, \gamma, \delta$  jsou parametry závislé na  $t, \alpha, R$ .

Nyní si ještě rozeberme limitní případy z našeho rozboru. Pro  $\alpha = 0$  bude koule kmitat na místě (zkuste si vypočítat hodnoty  $\delta$  a  $\gamma$ ). Pro  $\alpha = \pi/2$  sjede koule dolů pro libovolné  $t$ , protože musí být nutně menší než  $R$ . Pro  $t = 0$  pojede koule dolů a pro  $t = R$  bude koule kmitat nezávisle na sklonu kopce.

Zvlášť musíme vzít případy, kdy mají oba dva parametry svou limitní hodnotu. V případě  $t = 0, \alpha = 0$  se nic dít nebude a pro  $t = R, \alpha = \pi/2$  koule sjede dolů. Zbylé dva případy už odpovídají předchozímu rozboru, a sice pro  $t = R, \alpha = 0$  bude koule kmitat a pro  $t = 0, \alpha = \pi/2$  sjede koule dolů.

### Komentáře k došlým řešením

Chtěli bychom upozornit na takovou klasickou chybu, že na kouli nepůsobí tření. Je tomu však naopak, tření hraje v pohybu koule velmi *zásadní roli*. Bez tření by se koule vůbec neotáčela a pouze klouzala dolů. Tření působí v bodě dotyku s nakloněnou rovinou směrem proti pohybu koule (podél kopce) takovým způsobem, že mění hybnost a moment hybnosti koule, ale zachovává její energii. Zanedbání valivého tření a odporu prostředí už je na místě.

Toto je důvod, proč je výhodné počítat rotaci kolem bodu dotyku, protože vůči němu má třecí síla nulový moment. Pokud počítáte moment sil působící na kouli vůči jejímu středu, těžišti nebo jakémukoli bodu uznáte za vhodné, musíte započítat i třecí sílu (jejíž velikost musíte vyjádřit z dalších pohybových rovnic).

Dalším „nešvarem“ v došlých řešeních bylo, že jste pouze okomentovali situace, které mohou nastat. V úloze 5 se však očekává počítání při jejím řešení (na rozdíl od úloh P, popř. některých jednoduchých). Z toho důvodu nešlo udělit za slovní rozbor více než jeden bod.

*Jakub Dolejší*

krasnykuba@fykos.cz

### Úloha V.P ... metrová

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 40 studentů

*Jak všichni víme, v jeskyních střední Evropy je docela zima, okolo 4 °C. Proč je v metru docela teplo celý rok? Uvolňuje se více tepla z přítomných lidí, nebo spíše z technického zázemí?*

*Napadla Lukáše při čekání na metro.*

Nejprve se zamysleme, jak je to s těmi jeskyněmi. Když dohledáme teploty<sup>2</sup> v českých jeskyních, zjistíme, že se pohybují zhruba od 6 °C do 14 °C. V jeskynních systémech tedy zřejmě může být i poměrně vysoká teplota. Důvod, proč jsou jedny chladnější a jedny teplejší, je celkem prostý. Je to dáno propojením s venkovním prostředím. Pokud se v jeskyni nachází podzemní část toku řeky, budou v jeskyni velké teplotní výkyvy v průběhu roku, neboť v zimě se teplota vody nachází v intervalu od 0 °C do 4 °C, zatímco v létě může bezpečně přesahovat 20 °C. Bez podobných vnějších vlivů se teplota v jeskyních udržuje na dlouhodobém teplotním průměru venkovního vzduchu<sup>3</sup>, který v České republice činí 7,5 °C<sup>4</sup>. Geotermální energie v rozumných hloubkách ještě nehraje roli, neboť její nárůst v zemské kůře činí přibližně 0,025 °C·m<sup>-1</sup><sup>5</sup>.

Nyní se podívejme na situaci v pražském metru. Čím se liší? V prvé řadě si musíme uvědomit, o jakých částech metra se bavíme. V povrchových či mělce hloubených stanicích se nebude teplota příliš lišit od venkovního prostředí. Jde tedy především stanice metra ve větší hloubce, jaké nacházíme např. na lince B (nejhlubší je stanice Náměstí Míru, jejíž nejnižší bod je v hloubce<sup>6</sup> 51 m). Pro fyzika to může být trochu zklamání, ale zdůvodnění vyšších teplot v metru je poměrně prosté – zajišťuje ho vzduchotechnika. V metru jsou jednak větrány služební

<sup>2</sup>Převzato z rešerše [https://is.muni.cz/th/327651/prif\\_b/Novakova\\_reserse.pdf](https://is.muni.cz/th/327651/prif_b/Novakova_reserse.pdf).

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Volumetric\\_heat\\_capacity#Thermal\\_inertia](https://en.wikipedia.org/wiki/Volumetric_heat_capacity#Thermal_inertia)

<sup>4</sup><http://portal.chmi.cz/historicka-data/pocasi/uzemni-teploty>

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Geothermal\\_gradient](https://en.wikipedia.org/wiki/Geothermal_gradient)

<sup>6</sup><https://www.metroweb.cz/metro/TECH/vzduchotechnika.htm>

a technologické místnosti kvůli komfortu zaměstnanců (to není pro naše účely příliš zajímavé) a jednak je tam zřízeno tzv. hlavní větrání. Funguje v letním a zimním režimu. V chladných obdobích je vzduch z mezistaničních prostorů odváděn do stanic, zatímco v létě se směr větrání obrátí. Z toho nijak nelyne, že se v létě v metru zchladíme. Skutečně, v metru může být i větší horko než na povrchu. To by nás nemělo překvapovat, v hornických šachtách tomu není jinak. Ochladit nás může leda proudící vzduch tlačení blízkosti se vlakovou soupravou.

Zbývá však zjistit, odkud se bere teplo v mezistaničních úsecích. Geotermální energii jsme již zavrhlí – blíže k povrchu se sice můžeme dostat ohřátá spodní voda (znáte např. geotermální jezírka), ale z metra je veškerá průsaková voda odsávána.<sup>7</sup> Potřebujeme tedy odhadnout, kolik tepla se vytvoří při provozu metra. Celková roční spotřeba elektřiny metra je<sup>8</sup> 225 GWh. Jelikož metro v dlouhodobém průměru nepřekonává žádný výškový rozdíl, převede se veškerá energie v důsledku na teplo, ať už při překonávání třetího odporu, brzdění nebo při Jouleově ohřevu vodičů – budeme počítat s přibližnou hodnotou  $8 \cdot 10^{14}$  J za rok. Tunely v metru pojmu zhruba  $8 \cdot 10^5$  m<sup>3</sup> vzduchu,<sup>9</sup> který má tepelnou kapacitu  $C = 10^9$  J·K<sup>-1</sup>. Kdyby se ohřívával v metru pouze vzduch, zvedla by se jeho teplota za pouhý den o zhruba 200 °C. Je však zřejmé, že velké množství tepla pojmu stěny – jakou část, to nedokážeme dobře odhadnout. Spokojíme se tedy s tím, že energie k tvorbě tepla máme dostatek.

Proč není tedy teplo i ve stanicích? To můžeme zdůvodnit tím, že se metro pohybuje a tedy i spotřebovává energii především mimo stanici – to však není příliš silný argument. Protiargumentem nám jest prostě rozlehlost stanic. Jednoduše řečeno v nich je obsažen větší objem vzduchu, jehož ohřátí trvá i díky jeho špatné tepelné vodivosti déle.

Ještě musíme zmínit jeden aspekt, a tím jsou lidé. Člověk vyzařuje jako černé těleso s výkonem 100 W; tuto přibližnou hodnotu lze získat ze Stefanova-Boltzmannova zákona.<sup>10</sup> Pražské metro přepraví v průměru  $1,6 \cdot 10^6$  osob denně. Pokud odhadneme, že každý člověk stráví v metru zhruba 15 min  $\sim 1000$  s, zjistíme, že za rok vyzáří energii  $6 \cdot 10^{13}$  J. To je o řád méně než teplo vyprodukované metrem. Jako nezanedbatelný se vliv vyzařování lidských těl projeví až ve vozu metra, kde se stísněný prostor vyhřeje rychleji. Zde naopak dominuje před teplem z technického provozu.

Naše poznatky jsou tedy následující – zvýšená teplota v metru oproti jeskyním je dána odvodem teplého vzduchu z mezistaničních prostor, kde byl vzduch ohřát v důsledku disipace tepla při provozu metra. Teplo vyzařované lidmi nabývá významu pouze ve stísněných prostorech, jako je například vůz metra.

*Miroslav Hanzelka*  
mirek@fykos.cz

## Úloha V.E ... fotografická

7 bodů; průměr 4,38; řešilo 37 studentů

*Pomocí digitálního fotoaparátu změřte frekvenci střídavého proudu v síti. Postačí i chytrý telefon s vhodnou aplikací, která umožní nastavit přesnou hodnotu expozičního času.*

*Populární přednášky z fyziky na střední.*

<sup>7</sup><http://www.enviweb.cz/clanek/doprava/89645/odpadove-hospodarstvi-prazskeho-metra>

<sup>8</sup><http://www.dpp.cz/dopravni-podnik-mezirocne-usetril-na-energiich-167-mil-kc/>

<sup>9</sup> <http://fykos.cz/rocnik26/reseni/reseni5-5.pdf>

<sup>10</sup>Podle [https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body\\_radiation#Human\\_body\\_emission](https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body_radiation#Human_body_emission) zodpovídají další způsobem ztráty tepla (především konvekce) za méně než polovinu celkového ztrátového výkonu, náš odhad je tedy postačující.

## Teorie

Principem úlohy je vyfotografování nějakého zdroje světla, třeba pouliční lampy, se známým expozičním časem fotoaparátu a za současného pohybu fotoaparátu. Je-li vhodný zdroj připojen k síti, kde ho živí střídavý proud, na rozmazané fotografii uvidíme jeho blikání. Spočteme-li počet bliknutí a vydělíme ho expozičním časem, získáme buď přímo frekvenci v síti, nebo její dvojnásobek, podle použitého zdroje. Podívejme se, jaké zdroje a proč můžeme použít.

Obyčejná žárovka s wolframovým vláknem se při průchodu elektrického proudu rozžhaví a začne svítit. Použijeme-li střídavý proud z elektrické sítě, jeho frekvence je tak velká, že za dobu, kdy vláknem neprochází žádný (nebo jen velmi malý) proud, se vlákno nestihne zchladit, a bude tedy svítit nepřetržitě. Žárovka tedy není vhodným zdrojem pro tento experiment.

Lepší to bude se zářivkou. Ta je tvořena dlouhou skleněnou trubicí se dvěma elektrodami, která je naplněna rtuťovými parami a argonem. Při průchodu elektrického proudu nastává v trubici doutnavý výboj, který vyzařuje převážně v ultrafialové oblasti. Toto záření dopadá na stěny trubice, které jsou pokryty luminoforem, který záření přemění na viditelné světlo. Zářivka svítí pouze tehdy, když jí prochází proud – je-li připojena ke střídavému zdroji, nebude svítit nepřetržitě jako obyčejná žárovka, ale bude „blikat“. Toto blikání má vysokou frekvenci, je tedy pro lidské oko nepostřehnutelné, lidé vnímají zářivku jako kontinuální světelný zdroj (může však být skrytým nebezpečím pro epileptiky v nákupních centrech). Na rozmazané fotografii nicméně toto blikání zachytit lze. Protože svícení zářivky nezávisí na směru procházejícího proudu, jen na jeho velikosti, zaznamenaná frekvence je oproti té v síti dvojnásobná (během jedné periody proudu v síti zářivka dvakrát blikne).

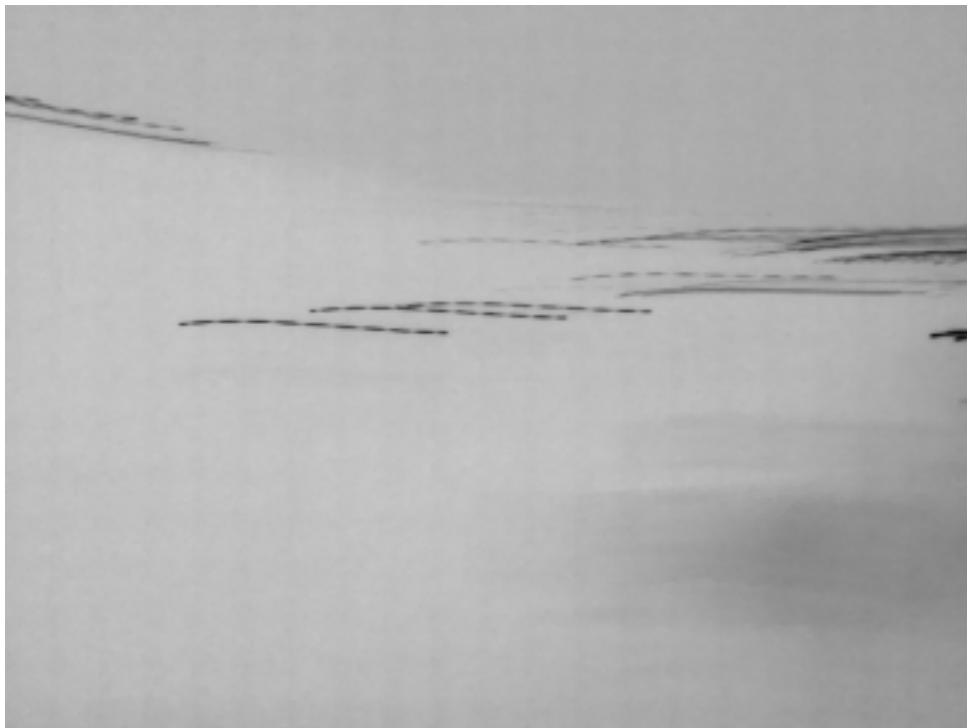
Trochu jiné to bude, je-li zdrojem obyčejná LED (*light-emitting diode*). Je to polovodičová součástka, která je tvořena P-N přechodem. Jeho typickou vlastností je rozdílné chování vůči procházejícímu proudu pro opačné směry průchodu. Je-li zapojena v propustném směru, protéká jí proud a dioda emituje světlo. Je-li zapojena v závěrném směru, proud jí neprochází (pokud ovšem do diody nepouštíme příliš velké napětí, abychom dosáhli průrazného napětí). Připojíme-li diodu ke zdroji střídavého proudu, propustí proud vždy jen v jednom směru, proud bude tedy diodou procházet vždy jen polovinu periody (jednocestný usměrňovač). Naměřená frekvence blikání LED bude přímo rovna frekvenci proudu v síti. Použijeme-li tzv. můstkové (Graetzovo) zapojení čtyř diod, bude proud propouštěn v obou směrech (dvoucestný usměrňovač). V takovém případě naměříme opět frekvenci blikání LED dvojnásobnou oproti frekvenci proudu v síti.

## Experiment

K experimentu byl použit mobilní telefon s fotoaparátem, kterým byly fotografovány lampy pouličního osvětlení v Praze. Snímky byly schválně pořizovány „rozmazané“, abychom mohli následně zjišťovat počet bliknutí lampy za dobu expozice snímku. Jelikož z výroby předinstalovaná aplikace na fotografování v telefonu neuměla zaznamenávat expoziční časy u jednotlivých fotek v člověkem čitelné podobě, bylo potřeba si stáhnout jinou aplikaci, která to umožňuje. Taková aplikace je například Camera FV-5 Lite, která je zdarma ke stažení pro mobilní telefony s OS Android na Google Play Store.

Příklad snímku, který byl pořízen, můžeme vidět na obrázku (2). Na obrázku (3) potom můžeme vidět výřez, na kterém je v detailu vidět blikání lampy. Z tohoto detailního obrázku můžeme určit počet bliknutí lampy během doby expozice snímku. Při fotografování je potřeba

fotoaparátém pohybovat správnou rychlostí, abychom získali snímky, ze kterých budeme schopni něco vyčíst.



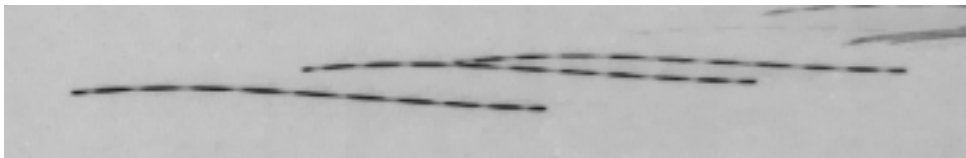
Obr. 2: Ukázka rozmazaného snímku pouliční lampy. Barvy snímku byly invertovány a následně byl převeden do škály šedé.

### *Měření a vyhodnocení*

Zachytili jsme 14 rozmazaných snímků pouliční lampy, u nichž známe expoziční čas (ten se u jednotlivých snímků liší). Z každého snímku jsme vybrali jednu lampu a u ní jsme určili počet bliknutí a zjistili jsme expoziční dobu snímku. Jelikož nebylo vždy možné přesně určit počet čárek na snímku (jedna čárka představuje jedno bliknutí), museli jsme občas počet čárek odhadovat (např. dvě půlčárky na začátku a konci celé přerušované čáry dají dohromady jednu celou čárku). Toto číslo jsme společně s expoziční dobou snímku zanesli do tabulky (1).

Při vyhodnocování naměřených dat nejprve u každého měření vydělíme počet bliknutí lampy expoziční dobou snímku, čímž získáme naměřenou frekvenci blikání lampy, a z těchto čísel následně spočteme výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku. Tímto postupem dostáváme, že frekvence blikání lampy je  $(98,4 \pm 1,8)$  Hz.

Jelikož jsme celou dobu chtěli určit frekvenci proudu v elektrické síti, musíme si uvědomit, že pouliční lampy blikají s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence proudu v síti (viz odstavec



Obr. 3: Detail rozmazaného snímku pouliční lampy.

Tab. 1: Naměřené hodnoty počtu bliknutí lampy.

expoziční čas s	počet bliknutí lampy
1/10	10
1/10	10
1/12	8
1/14	7
1/10	10
1/14	7
1/10	11
1/10	10
1/10	11
1/12	8
1/10	9
1/14	6
1/14	7
1/14	7

Teorie). Musíme tedy naměřenou frekvenci blikání lampy vydělit dvěma. Po aplikaci vzorců na práci s chybami dostáváme, že frekvence proudu v síti je tedy  $(49,2 \pm 0,9)$  Hz.

## Závěr

Změřili jsme frekvenci proudu v elektrické síti využitím faktu, že zářivky při průchodu střídavého proudu nesvíí spojitě, ale blikají s frekvencí závislou na frekvenci proudu, který jimi prochází. Ačkoliv má toto blikání frekvenci kolem 100 Hz, byli jsme schopni ho pomocí fotoaparátu zachytit. Je známý fakt, že střídavý proud v elektrické síti má frekvenci 50 Hz, což je v souladu s výsledkem našeho experimentu 49,2 Hz. V našem experimentu jsme pořídili celkem 14 fotografií, které jsme dále zpracovávali, což nám stačilo na to, abychom měli chybu měření 0,9 Hz. Pokud bychom požadovali výsledek s větší přesností stačilo by provést více měření, což už jsme ale na tomto místě nepovažovali za nutné.

*Michal Nožička*  
nozicka@fykos.cz

*Dominika Kalasová*  
dominika@fykos.cz

## Úloha V.S ... přirozeně proměnná

6 bodů; průměr 3,90; řešilo 20 studentů

a) Použijte vztah pro entropii ideálního plynu  $S(U, V, N)$  z řešení třetí seriálové úlohy

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^{\kappa}} \right) + nR s_0.$$

a vztah pro změnu entropie

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

a vypočítejte chemický potenciál jako funkci  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Upravte dále na funkci  $T$ ,  $p$  a  $N$ .

Pomůcka: Přečtěte si o derivacích a malých změnách v druhém díle seriálu. Nyní by už mělo být zřejmější, že koeficienty jako  $1/T$  před  $dU$  spočítáte jako parciální derivaci  $S(U, V, N)$  podle  $U$ . Nezapomeňte na užitečný vztah  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  a že  $n = N/N_A$ .

Bonus: Vyjádřete tímto způsobem i teplotu a tlak jako funkce  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Eliminujte závislost tlaku na  $U$ , abyste dostali stavovou rovnici.

- b) Je chemický potenciál ideálního plynu kladný, nebo záporný ( $s_0$  považujte za zanedbatelné)?  
 c) Co se bude dít s plynem v pístu, pokud je plyn napojený na rezervoár s teplotou  $T_r$ ? Píst se může volně pohybovat a z druhé strany na něj nic nepůsobí. Popište, co se bude dít, pokud dovolíme jen kvazistatické procesy. Kolik práce takto dokážeme extrahovat? Platí, že se takto minimalizuje volná energie?

Pomůcka: Na výpočet práce se vám může hodit vztah

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

- d) Entalpii jsme definovali jako  $H = U + pV$ , Gibbsovu energii jako  $G = U - TS + pV$ . Jaké jsou přirozené proměnné těchto potenciálů? Jaké termodynamické veličiny dostaneme derivacemi těchto potenciálů podle svých přirozených proměnných?  
 e) Vypočítejte změnu grandkanonického potenciálu  $d\Omega$  z jeho definičního vztahu  $\Omega = F - \mu N$ .  
*Jančí se snažil představit si chemický potenciál.*

1. Vypočítajme najprv bonus, pretože je jednoduchší! Chceme parciálne derivovať  $S$  podľa  $U$ , tak dostaneme  $1/T$ . Využijeme, že  $\ln(\dots)$  zo vztahu pre  $S(U, V, N)$  vieme napísať ako

$$\ln(U) + \text{členy, ktoré na } U \text{ nezávisia.}$$

Pred nimi stojí ešte faktor  $snR/2$ , ktorý na  $U$  tiež nezávisí, teda pri derivovaní všetky tieto ďalšie členy vypadnú. Ostáva teda len

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial U} = \frac{s}{2} nR \frac{\partial}{\partial U} \ln U = \frac{s}{2} nR \frac{1}{U}.$$

To je ale kalorická rovnica  $U = snRT/2$ .

Podobne pre  $V$ ,  $\ln(\dots)$  zo vztahu pre  $S(U, V, N)$  rozpišeme ako

$$\ln(V^{\kappa-1}) + \text{členy, ktoré na } V \text{ nezávisia.}$$



Znova, po derivovaní ostane len derivácia tohoto člena a ešte si spomenieme na  $\ln(V^{\kappa-1}) = (\kappa - 1) \ln V$  a počítame

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial V} = \frac{s}{2} n R (\kappa - 1) \frac{\partial}{\partial V} \ln V = \frac{s}{2} n R (\kappa - 1) \frac{1}{V}.$$

Pretože  $\kappa = 1 + 2/s$ ,  $\kappa - 1$  sa vykrátí s  $s/2$  a ani nemusíme odstraňovať  $U$  (týmto sa ospravedlňujem za zavádzanie v zadaní), dostávame rovno stavovú rovnicu

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}.$$

Nakoniec vypočítajme  $\mu$ . Derivovanie podľa  $N$  je trochu náročnejšie, pretože sa vyskytuje aj pred logaritmom. Najprv nahradíme všetky  $n$  za  $N/N_A$  a použijeme aj  $R = N_A k_B$

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} N k_B \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^{\kappa} N_A^{-\kappa}} \right) + N k_B s_0.$$

Pomocou pravidla o derivovaní súčinu môžeme počítať

$$\frac{\partial S(U, V, N)}{\partial N} = \frac{s}{2} k_B \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^{\kappa} N_A^{-\kappa}} \right) + \frac{s}{2} N k_B \frac{\partial}{\partial N} \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^{\kappa} N_A^{-\kappa}} \right) + k_B s_0,$$

kde už pri derivácii logaritmu môžeme použiť trik s rozdelením na  $\ln(N^{-\kappa})$  plus členy bez  $N$ . Takto dostávame

$$-\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial N} = \frac{s}{2} k_B \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^{\kappa} N_A^{-\kappa}} \right) - \frac{s}{2} \kappa k_B + k_B s_0,$$

teda

$$\mu = -\frac{s}{2} k_B T \left[ \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^{\kappa}} \right) - \kappa + \frac{2}{s} s_0 \right] = -\frac{U}{N} \left[ \ln \left( \frac{U V^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^{\kappa}} \right) - \kappa + \frac{2}{s} s_0 \right]$$

Už len dosadíme za  $U$  a  $V$  do prvého vyjadrenia. Po chvíli upravovania dostaneme

$$\mu = -\frac{s}{2} k_B T \left[ \ln \left( \frac{T^{\kappa}}{p^{\kappa-1}} \right) + s_1 \right],$$

kde sme do  $s_1$  zahrnuli konštanty  $2s_0/s$ ,  $-\kappa$  a aj konštantné členy z logaritmu. Takýto výraz ešte vieme upraviť

$$\mu = -k_B T \left[ \frac{s}{2} \kappa \ln T - \frac{s}{2} (\kappa - 1) \ln p + s_1 \right] = -k_B T \left[ \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \ln T - \ln p + s_1 \right].$$

2. To, že  $s_0$  je zanedbateľné, nie je úplne presná formulácia. Táto konštanta totiž v sebe musí obsahovať aj jednotky, a to dokonca ich logaritmus.<sup>11</sup> Dobrý spôsob, ako malosť  $s_0$  interpretovať, je jednoducho si povedať, že pre normálne podmienky je vnútorná energia aj tlak veľký a teda logaritmus  $\ln$  vo vzťahu

$$\mu = -\frac{U}{N} \left[ \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^{\kappa}} \right) - \kappa + \frac{2}{s} s_0 \right]$$

bude dosť veľký na to, aby bola hranatá zátvorka kladná. Keďže je násobená záporným číslom, celkový chemický potenciál je záporný. Ak vám to pripadá podozrivé, máte pravdu, veľkosť  $U$  a  $V$  voči  $nR$  totiž závisí na jednotkách. Vedzte, že chemický potenciál skutočne je záporný a prečítajte si komentár v seriáli.

To, že je chemický potenciál záporný, má fyzikálnu interpretáciu s pomocou štatistickej fyziky. Chemický potenciál je nárast vnútornej energie pri pridaní jednej častice, ak zachováme entropiu a objem. Entropiu v štatistickej fyzike počítame ako logaritmus počtu stavov s rovnakou energiou. Látka s väčším počtom častíc bude mať vo všeobecnosti väčšiu entropiu: Energiu rozdelujeme medzi viac častíc, máme teda viac možností ako ju rozdeliť.

Na druhú stranu, ak znížime energiu, entropia klesne (to vidíte i vo vzťahu  $S(U, V, N)$ ). Ak teda chceme pri pridaní častice zachovať entropiu, musíme znížiť energiu, a to práve pridaním  $\mu < 0$ .

3. Plyn sa bude samozrejme rozpínať do nekonečna. Ak povolíme len kvázistatické procesy, pohyb piestu bude veľmi pomalý, no keďže z vonka nič nepôsobí, plyn sa bude rozpínať stále. Energiu na to potrebnú bude odoberať z rezervoáru. Pri kvázistatickom procese bude teplota plynu konštantná, teda platí

$$p = \frac{nRT_r}{V}.$$

Prácu, ktorú vykoná plyn pri rozpínaní z  $V_0$  na  $V_1$ , ľahko spočítame ako

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p(V) dV = nRT_r \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = nRT_r \frac{V_1}{V_0}.$$

Pri rozpínaní do nekonečna teda práca rastie nad všetky medze, a to rýchlosťou logaritmu objemu. Čo robí voľná energia? Zaujímá nás iba člen s  $V$ , ktorý vieme izolovať ako

$$F(T_r, V, N) = -nRT_r \ln V + \text{členy bez } V.$$

Zo seriálu vieme, že práca získaná zo systému v kontakte s tepelným rezervoárom je rovná poklesu Helmholtzovej voľnej energie, platí  $dW = -dU_{\text{total}} = -dF$ . To ale súhlasí s našim výpočtom. Zmena pri rozpínaní je

$$\Delta F = F(T_r, V_1, N) - (T_r, V_0, N) = -nRT_r \ln \frac{V_1}{V_0},$$

čo je práve  $-W$ . Nakoniec, môžeme povedať, že sa voľná energia minimalizuje: Keďže systém nie je nikdy v rovnováhe, stále klesá do  $-\infty$ , práve kvôli členu  $-nRT_r \ln V$ .

<sup>11</sup>Ku tomuto problému sa vrátíme v 6. dieli seriálu.

4. Prirodzené premenné ľahko nájdeme z  $dH$ , čo sme počítali už v seriáli

$$dH = TdS + \mu dN + Vdp.$$

Prirodzené premenné sú teda  $S, N, p$  a parciálne derivácie  $H(S, N, p)$  podľa nich nám postupne dajú  $T(S, N, p)$ ,  $V(S, N, p)$  a  $\mu(S, N, p)$ .

Podobne, pre  $G$  je

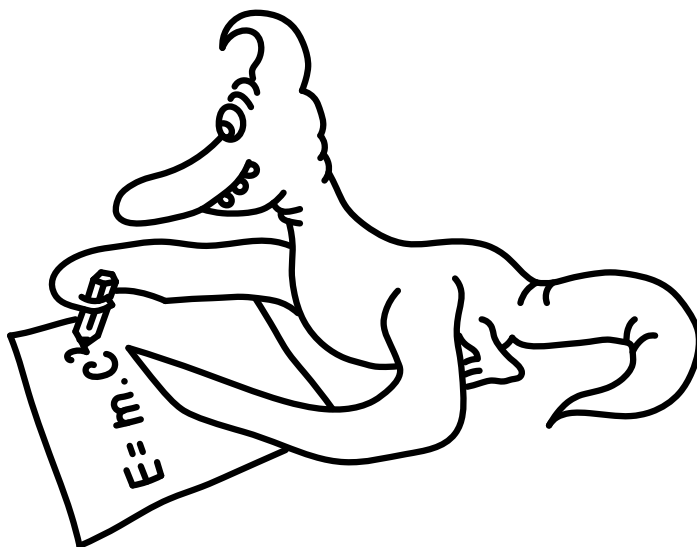
$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN,$$

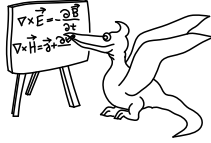
vyjadrením  $G$  v premenných  $T, p, N$ , ktoré sú prirodzené, vieme dopočítať ostatné premenné ako derivácie  $G(T, p, N)$ . Derivácia podľa  $T$  dá  $-S(T, p, N)$ , derivácia podľa  $p$  dá  $V(T, p, N)$  a derivácia podľa  $N$  dá  $\mu(T, p, N)$ .

5. Výpočet je obdobný ako pre  $dG$  či  $dH$

$$d\Omega = dF - d(\mu N) = -SdT - pdV + \mu dN - \mu dN - Nd\mu = -SdT - pdV - Nd\mu.$$

*Ján Pulmann*  
janci@fykos.cz





## Seriál: Termodynamické potenciály a fotónový plyn

V minulom diele seriálu sme sa venovali náročnej téme, termodynamickým potenciálom. Videli sme, že ak chceme zakódovať všetku informáciu o systéme do jednej funkcie, musíme povedať, aké premenné používame. Pre vnútornú energiu  $U$  sú tieto *prírodné premenné*  $S, V, N$ . Ak chceme použiť iné premenné, musíme prejsť ku iným funkciám. Výsledky si zosumarizujeme:

- *Vnútorná energia*  $U$  má prírodné premenné  $S, V, N$ . V týchto premenných platí

$$dU = TdS - pdV + \mu dN.$$

- *Helmholtzova voľná energia*  $F$  je definovaná ako  $F = U - TS$  a má prírodné premenné  $T, V, N$ . V týchto premenných platí

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN.$$

- *Entalpia*  $H$  je definovaná ako  $H = U + pV$  a má prírodné premenné  $S, p, N$ . V týchto premenných platí

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN.$$

- *Gibbsova energia*  $G$  je definovaná ako  $G = U - TS + pV$  a má prírodné premenné  $T, p, N$ . V týchto premenných platí

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

- *Grandkanonický potenciál*  $\Omega$  je definovaný ako  $\Omega = U - TS - \mu N$  a má prírodné premenné  $T, V, \mu$ . V týchto premenných platí

$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu.$$

- Za zmienku stojí aj *entropia*, hoci sa nenazýva termodynamický potenciál (nemá jednotky energie). Má prírodné premenné  $U, V, N$  a platí pre ňu

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN.$$

Používanie termodynamických potenciálov ale nemusí byť také zložité, ako bolo ich odvodenie. Pokúsime sa to ukázať na viacerých jednoduchých príkladoch, ako aj na popise úplne nového systému: *fotónového plynu*.

Pretože je tento diel seriálu posledný, vrátíme sa ku niektorým bodom, ktoré vám mohli byť nejasné. Začnime ale so spomínanou aplikáciou termodynamických potenciálov, najprv s entalpiou a fázovými prechodmi.

## Skupenské teplo

Pri úvahách s potenciálmi je veľmi dôležité pamätať na podmienky, pri ktorých prebiehajú procesy: podľa toho, aké premenné držíme konštantné, si musíme vybrať i termodynamický potenciál.

Budeme študovať fázové prechody, pre konkrétnosť hovoríme o vyparovaní. Fázové prechody prebiehajú pri konkrétnej teplote a väčšinou nie sú uzavreté do konštantného objemu, ale majú stále konštantný tlak. Pozrieme sa tiež na fázovú premenu, ktorá prebieha kvázistaticky, teda je blízko rovnováhy. Ak umiestnime pohár vody do vákua, bude búrlivo vriet. My sa chceme pozrieť na situáciu, keď máme nad hladinou takmer nasýtené pary.

Iný spôsob, ako popísať túto rovnováhu, je pomocou Gibbsovej energie. Spomeňme si, že systém s konštantným tlakom a teplotou sa snaží minimalizovať svoju Gibbsovu energiu. Preto, ak by bola Gibbsova energia (na jednu časticu) nižšia napríklad v pare, tak by systém nebol v rovnováhe, kvapalina by sa vyparovala.

Rovnako by sme mohli rozprávať aj o chemickom potenciáli, ako môžeme vidieť aj vo vzťahu

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

Pri vyparení časti kvapaliny sa nezmení tlak ani teplota, teda celková zmena je priamo úmerná počtu častíc a chemickému potenciálu. V rovnováhe teda musia byť aj chemické potenciály oboch fáz rovnaké.

Pozrieme sa teraz na zmenu *entalpie* pri fázovej zmene. Na to sa bude hodiť vyjadrenie  $H = G + TS$ . Ak sa vyparí napríklad jeden mol kvapaliny, pričom sme takmer v rovnováhe, tak sa jeho Gibbsova energia takmer nezmení, alebo  $G_0 = G_1$ . Teplota je konštantná, takže platí

$$\Delta H = H_1 - H_0 = G_1 + TS_1 - G_0 - TS_0 = T(S_1 - S_0) = T\Delta S.$$

Výraz  $T\Delta S$  je ale pri konštantnej teplote a kvázistatickom procese rovný prijatému teplu: Zmena entalpie pri fázovom prechode je práve skupenské teplo tohoto prechodu. Ak vypočítame napríklad zmenu entalpie na jeden mol, dostávame molárne skupenské teplo.

Ak je toto teplo kladné, teda pri fázovom prechode látka prijme teplo, nazýva sa tento prechod *endotermický*. Každý má skúsenosť s tým, že vyparovanie vody z pokožky chladí, čo je práve kvôli tomu, že ide o endotermický proces. Ak je naopak  $\Delta H < 0$ , proces sa nazve *exotermický* a látka pri fázovom prechode odovzdá teplo.

Vzťah  $\Delta H = T\Delta S$  súhlasí s predstavou o entropii ako o číse vyjadrujúcom neusporiadanosť. Napríklad pri topení alebo vyparovaní sa výrazne zvyšuje neusporiadanosť systému,  $\Delta S$  je kladné a ide o endotermický dej.

## Gibbsova energia a spontánnosť procesov

Predstavte si teraz podchladenú vodu, teda vodu s teplotou pod teplotou tuhnutia. Na rozdiel od predchádzajúcej časti, voda nie je v rovnováhe s ľadom, ale sama začne rýchlo mrznúť. To môžeme charakterizovať tým, že ľad má nižší chemický potenciál, alebo Gibbsovu energiu. Takýto proces, pri ktorom klesne Gibbsova energia, sa nazve *exergonický* a prebehne *spontánne*. Opačne, ak by pri nejakom procese mala narásť Gibbsova energia, tak sám od seba neprebehne. Vtedy sa proces nazýva *endergonický*.

Nemusíme ale rozprávať len o fázových prechodoch. Často sa napríklad uvádza Gibbsova energia pre rôzne chemické látky a porovnaním celkovej Gibbsovej energie reaktantov a produktov určíme, či reakcia bude prebiehať. Chemické reakcie totiž tiež často prebiehajú v otvorených nádobách, teda s (približne) konštantným tlakom a teplotou.

Treba ešte poznamenať, že spontánnosť reakcie ešte nehovorí nič o jej rýchlosti. Napriek tomu, že reakcia je energeticky výhodná, môže na ňu byť potrebná taká aktivačná energia, že bude prebiehať zanedbateľnou rýchlosťou. Vtedy sa používajú katalyzátory alebo sa napríklad zvýši teplota. Zvýšením teploty totiž zvýšime energiu častíc, ktoré tak ľahšie prekonajú energetickú bariéru.

Všimnime si, že exotermický proces (teda  $\Delta H < 0$ ) nemusí byť automaticky aj exergonický. Zo vzťahu

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

vidíme, že ak pri procese klesá aj entropia, závisí jeho spontánnosť na teplote (ak zanedbáme závislosť  $G$  a  $H$  na teplote). Podľa rôznych znamienok  $\Delta H$  a  $\Delta S$  môžu nastať 4 rôzne situácie

- Pri exotermickom procese  $\Delta S > 0$  bude  $\Delta G$  vždy záporné, teda proces bude exergonický a prebehne spontánne. To je napríklad výbuch alebo horenie: určite ide o exotermický proces a navyše pri ňom rastie entropia: z usporiadanej látky dostaneme menej usporiadaný plyn.
- Ak je pri exotermickom procese  $\Delta S < 0$ , závisí znamienko  $\Delta G$  od teploty. Pre malú teplotu preváži záporné  $\Delta H$ . Ak je ale teplota väčšia ako  $\Delta H/\Delta S$ , proces už samovoľne neprebehne.

Samozrejme, tuhnutie je pekný príklad, kritická teplota je tu proste teplota tuhnutia. Oplatí sa spomenúť aj polymerizáciu, ktorá je exotermická, ale dostávame sa do usporiadanejšieho stavu. Od istej teploty  $T_c$  (z anglického *ceiling temperature*) už tiež nebude prebiehať.

- Naopak, pri endotermickom procese s  $\Delta S > 0$  bude  $\Delta G$  záporné pri dosť vysokých teplotách. Opak tuhnutia, topenie, je príklad takéhoto procesu. Pekná aplikácia je krakovanie ropy, kde potrebujeme rozbiť reťazce uhľovodíkov, čo je proces pri ktorom rastie entropia, no je endotermický. Preto krakovanie nastane až pri zvýšenej teplote.
- Nakoniec proces, pri ktorom by sa zvýšila energia a znížila entropia. Takýto proces je vždy endergonický a spontánne nikdy nenastane, ale nastane jeho opak. Napríklad fotosyntéza potrebuje energiu a znižuje entropiu. To, že prebieha, je vďaka schopnosti rastlín šikovne využívať snečnú energiu.

Skutočnosť je o trochu zložitejšia. Hoci by aj bola nejaká reakcia veľmi entalpicky nevýhodná, napriek tomu vo veľmi malej miere nastane. Takéto správanie je ale schované aj v rovnici  $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ . Napriek tomu, že ak je napríklad chemická reakcia entalpicky nevýhodná v zmysle  $\Delta H > 0$ , pre dostatočne malý počet zreagovaných častíc bude  $T\Delta S$  vždy väčšie ako  $\Delta H$ .

Je to kvôli takzvanej *zmiešavacej entropii*: pri vzniku novej fázy totiž entropia vždy narastie kvôli miešaniu s pôvodnou fázou. Tento nárast entropie spôsobí, že pre ľubovoľnú teplotu bude aspoň na začiatku  $\Delta G$  záporné. Reakcia teda vždy aspoň začne.

O čom sme teda doteraz rozprávali? Väčšinou sa porovnávajú Gibbsove energie reaktantov a produktov v takzvaných štandardných podmienkach: teda pri atmosférickom tlaku a izbovej teplote. Ak majú napríklad reaktanty nižšiu Gibbsovu energiu ako produkty pri štandardných podmienkach, očakávame, že v rovnováhe (pri štandardných podmienkach) bude viac reaktantov. Pri začiatku reakcie ale produkty určite nie sú v štandardných podmienkach, vôbec ani neexistujú! Špeciálne majú nulový tlak.

Kompletná predstava o termodynamickom procese je takáto: na začiatku reakcia začne, pretože tak vieme zvýšiť entropiu. Postupne, ako pribúda produktov, sa ale začína Gibbsova energia blížiť svojej hodnote v štandardných podmienkach. Ak je hodnota v štandardných podmienkach oveľa menšia u reaktantov, tak vznikne len malé množstvo produktov a chemické potenciály sa vyrovnajú veľmi rýchlo. Naopak, ak je Gibbsova energia nižšia u produktov, tak zreaguje väčšina reaktantov a produktov ostane málo.

Najlepšie je všetko ilustrovat' na príklade, ktorý všetci poznáte: na vzniku pH vody. Napriek tomu, že voda je oveľa stabilnejšia v molekule  $\text{H}_2\text{O}$ , táto molekula sa vo vode rozpadá na  $\text{H}^+$  a  $\text{OH}^-$ . V rovnováhe je potom jedna takáto rozpadnutá molekula na  $10^7$  nerozpadnutých molekúl. Toto číslo 7 je práve pH vody – tak je pH definované.

Vidíme, prečo väčšinou nemusíme uvažovať takéto energeticky nevýhodné reakcie: prebiehajú len vo veľmi malom množstve. Rovnaké úvahy samozrejme platia napríklad aj o vyparovaní. Aj pri izbovej teplote sa totiž z vody niečo vyparuje. Pri zvyšovaní teploty sa potom posúva rovnováha ku vyparenej vode, pretože klesá člen  $-T\Delta S$ , a tak klesá aj rozdiel  $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ .

### Fotónový plyn

Skočíme teraz na úplne inú tému, a to na popis nového systému, *fotónového plynu*. Predstava množstva fotónov zavretých do krabice nie je úplne presná: fotóny totiž musia byť v rovnováhe so stenou krabice, aby do nej mohli naraziť, byť absorbované a späť vyžiarené. To okrem iného znamená, že ich počet sa mení, lebo počet vyžiarených fotónov nemusí byť rovný počtu tých absorbovaných. Preto sa ani nedá hovoriť o počte fotónov, ten sa stále mení. Na popis fotónového plynu teda stačí len teplota a objem.

V takýchto premenných je najlepšie popísať plyn pomocou Helmholtzovej voľnej energie. Pomocou štatistickej fyziky sa dá odvodiť, že platí

$$F(T, V) = -\alpha VT^4,$$

kde  $\alpha$  je odstrašujúco vyzerajúca konštanta

$$\alpha = \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3}.$$

Tu je  $c$  je rýchlosť svetla a  $\hbar$  je redukovaná Planckova konštanta  $\hbar = h/(2\pi)$ . Pozrieme sa na prvú stranu tohoto dielu seriálu a ľahko si vypočítame napríklad tlak

$$p = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial V} = \alpha T^4$$

a entropiu

$$S = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} = 4\alpha VT^3.$$

Ak vám pripadá mocnina teploty povedomá, pripadá vám správne: fotónový plyn úzko súvisí s čiernym telesom a jeho vyžarovaním. Fotón s hybnosťou  $\mathbf{p}$  nesie energiu  $|\mathbf{p}|c$  a vieme, že tlak  $p$  na stenu krabice je kvôli odovzdávaniu hybnosti fotónov. Výkon žiarenia dopadajúci na stenu by mal teda byť niečo ako  $pc$ . V skutočnosti musíme uvažovať rôzne smery dopadajúcich fotónov, takže nakoniec by sme dostali pre výkon dopadajúci na štvorcový meter, ktorý označíme  $j$ , vzťah

$$j = \frac{3}{4}pc.$$

Po dosadení čísel skutočne dostaneme Stefanov-Boltzmannov zákon pre vyžarovanie čierneho telesa.

Fotónový plyn je takzvaný *ultrarelativistický kvantový plyn*. To znamená, že jeho častice musíme popisovať s pomocou relativity (to používame vo vyjadrení energie ako  $|\mathbf{p}|c$ , nie  $\mathbf{p}^2/(2m)$ ) a že je tvorený bozónmi, kvantovými časticami.

Celý vesmír je vyplnený takýmto fotónovým plynom a jeho teplota je s veľmi vysokou presnosťou rovná 2,73 K. Takto nízka teplota je spôsobená práve rozpínaním fotónového plynu, ktorý sa adiabaticky rozpínal spolu s vesmírom. Ďalej sa s fotónovým plynom zoznámite v seriálovej úlohe.

## Poznámky na záver

### Jednotky entropie

Pozrime sa opäť na vzťah

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} Rn^{\kappa}} \right) + nRs_0.$$

V logaritme máme niečo s jednotkou  $\text{m}^{3(\kappa-1)} \cdot \text{mol}^{1-\kappa} \cdot \text{K}$ , čo je prinajmenšom podozrivé!

V skutočnosti to je kvôli tomu, že sme konštantu  $s_0$  napísali mimo logaritmus: ak vezmeme  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ , dostaneme vo všeobecnosti rozdiel logaritmov čísel s jednotkou. Poriadne je teda lepšie písať vzťah pre entropiu ako

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{n^{\kappa} \Phi} \right),$$

kde konštanta  $\Phi$  má rovnaké jednotky ako  $UV^{\kappa-1}n^{-\kappa}$ .

Hodnota tejto konštanty sa dá určiť s použitím štatistickej fyziky. Pre monoatómový plyn ju udáva tzv. Sackurova-Tetrodeho rovnica ako

$$\Phi = \frac{3\pi\hbar^2 N_A^{\frac{5}{3}}}{me^{\frac{5}{3}}},$$

kde  $m$  je hmotnosť jedného atómu plynu.

V minulej seriálovej úlohe ste mali určiť znamienko chemického potenciálu. Po dosadení čísel (v jednotkách SI je rovná približne 1/100) zistíme, že je pri bežných podmienkach oveľa menšia ako súčin  $UV^{\kappa-1}n^{-\kappa}$ , teda skutočne vyjde chemický potenciál záporný.

### Prečo píšeme $\delta Q$

Mohli ste sa zaujímať, prečo stále píšeme  $\delta Q$  a nie  $dQ$ , hoci používame  $dS$ ,  $dU$  a tak ďalej. Rozdiel medzi  $Q$  a napríklad  $S$  je, že entropia  $S$  je dobre definovaná funkcia od termodynamického stavu: v každom rovnovážnom stave vieme určiť entropiu, napríklad podľa predchádzajúceho vzťahu. Preto píšeme  $dS$ , ide skutočne o zmenu funkcie  $S$ .

Funkcia  $Q$ , ktorá by bola dobre definovaná pre každý stav a jej zmena by bola rovná  $\delta Q$ , ale *neexistuje*! Je to kvôli tomu, že pri rôznych cestách medzi dvoma stavmi môžeme prijať rôzne



teplá: například cyklus v Carnotovom stroji končí v rovnakom stave ako začínal, ale medzi tým prijme teplo  $Q_H - Q_C$ .

To, že takáto funkcia  $Q$  neexistuje, sa dá ľahko dokázať. Podržieme pre jednoduchosť konštantný počet častíc. Potom napríklad vo vyjadrení pre nejakú funkciu  $X(T, V)$  dostaneme

$$dX = \frac{\partial X(T, V)}{\partial T} dT + \frac{\partial X(T, V)}{\partial V} dV.$$

Tieto dva koeficienty  $\partial X(T, V)/\partial T$  a  $\partial X(T, V)/\partial V$  sú spolu ale úzko zviazané: ak ich označíme  $X_{,T}$  a  $X_{,V}$  platí

$$\frac{\partial X_{,T}}{\partial V} = \frac{\partial^2 X}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 X}{\partial T \partial V} = \frac{\partial X_{,V}}{\partial T}. \quad (5)$$

Nie každé dve funkcie, ktoré pridáme pred  $dT$  a  $dV$ , teda môžu byť získané ako parciálne derivácie jednej funkcie! Pozrime sa ako to bude pre teplo  $\delta Q$ . Z prvého termodynamického zákona vieme, že pre ideálny plyn platí

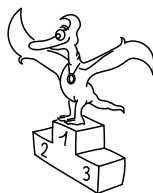
$$\delta Q = dU - \delta W = dU + pdV = \frac{s}{2} nRdT + \frac{nRT}{V} dV.$$

Spĺňajú koeficienty  $Q_{,T} = snR/2$  a  $Q_{,V} = nRT/V$  podmienku (5)? Nie! Platí totiž

$$\frac{\partial Q_{,T}}{\partial V} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial Q_{,V}}{\partial T} = \frac{nR}{V}.$$

Preto nemôže existovať funkcia  $Q(V, T)$ , ktorej zmena je rovná  $\delta Q$ . Platí ale, že existuje funkcia, ktorej zmena je rovná  $\delta Q/T$  – vyskúšajte si! Samozrejme, táto funkcia je práve entropia.

To je všetko! Ďakujem, že ste sa dočítali až sem. Okrem riešiteľom a čitateľom seriálu patrí vďaka aj korektorom za pozorné čítanie a Dorotke za pomoc s chémiou.



## Pořadí řešitelů po V. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
		4	4	3	4	5	5	7	6	<b>38</b>	<i>100</i>	<b>194</b>
1. Kateřina Rosická	G J. Ortena, Kutná Hora	4	4	3	2	5	5	8	–	<b>31</b>	<i>88</i>	<b>159</b>
2. Josef Minařík	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	3	3	2	2	4	–	<b>22</b>	<i>73</i>	<b>131</b>
3. Ladislav Trnka	G, Havlíčkův Brod	4	0	1	1	–	3	5	4	<b>18</b>	<i>67</i>	<b>127</b>
4. Lucie Kundratová	G, nám. TGM, Zlín	4	4	2	–	–	2	–	–	<b>12</b>	<i>67</i>	<b>110</b>
5. Jindřich Dušek	G Jana Keplera, Praha	4	2	1	3	1	3	2	2	<b>18</b>	<i>57</i>	<b>101</b>
6. Jiří Blaha	G, Uherské Hradiště	4	6	3	–	–	–	–	–	<b>13</b>	<i>76</i>	<b>88</b>
7. Vojtěch Laitl	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>57</i>	<b>82</b>
8. Jakub Smolka	Slezské G, Opava	2	4	2	4	–	1	–	–	<b>13</b>	<i>60</i>	<b>76</b>
9. Ivan Hudák	ESS, Lip. Mikuláš	2	2	3	–	1	3	2	–	<b>13</b>	<i>45</i>	<b>70</b>
10. Tereza Pavlišová	G, Olomouc-Hejčín	4	4	3	4	–	1	6	–	<b>22</b>	<i>55</i>	<b>68</b>
11. Martin Vavřík	G, Šumperk	4	–	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<i>64</i>	<b>54</b>
12. Jakub Růžička	G, Nymburk	–	–	3	–	–	1	7	–	<b>11</b>	<i>57</i>	<b>49</b>
13. Ondřej Bursa	G, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>67</i>	<b>36</b>
14. Anna Jandová	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>41</i>	<b>29</b>
15.–17. Vratislav Blažek	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>55</i>	<b>26</b>
15.–17. Kristian Matuščík	G, Benešov	0	–	3	1	–	1	–	–	<b>5</b>	<i>36</i>	<b>26</b>
15.–17. David Otta	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>60</i>	<b>26</b>
18. Klára Grohmannová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>58</i>	<b>23</b>
19. Dominik Stejskal	G, Krnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>49</i>	<b>21</b>
20. Jakub Zemek	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>68</i>	<b>19</b>
21. Pavlína Kružíková	Biskupské G, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>69</i>	<b>18</b>
22. Kateřina Neubergerová	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>49</i>	<b>17</b>
23. Kateřina Bartošová	SPŠ Ostrov n. Ohří	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>42</i>	<b>16</b>
24.–25. Michal Jůza	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>52</i>	<b>15</b>
24.–25. Adam Karas	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>32</i>	<b>15</b>
26.–27. Matej Martaus	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>58</i>	<b>14</b>
26.–27. Štěpán Stryja	G, Třinec	–	–	3	–	–	–	–	–	<b>3</b>	<i>40</i>	<b>14</b>

## Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
		4	4	3	4	5	5	7	6	<b>38</b>	<i>100</i>	<b>194</b>
1. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	6	2	4	2	4	6	5	<b>33</b>	<i>90</i>	<b>174</b>
2. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	4	3	4	5	4	2	5	<b>31</b>	<i>84</i>	<b>154</b>
3. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	4	2	3	4	2	–	5	2	<b>22</b>	<i>75</i>	<b>138</b>
4. Alexandr Jankov	Matiční G, Ostrava	4	4	2	–	–	4	3	6	<b>23</b>	<i>77</i>	<b>137</b>
5. Jan Lindauer	První české G, Karlovy Vary	2	4	3	1	2	3	5	1	<b>21</b>	<i>65</i>	<b>127</b>
6. Tomáš Dulava	Matiční G, Ostrava	4	4	3	1	2	4	3	0	<b>21</b>	<i>70</i>	<b>117</b>

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	5	7	6	38	100	194
7. Zuzana RichtEROVÁ	G, Pelhřimov	4	2	3	4	2	1	4	2	22	55	107
8.–9. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE, Vyškov	2	4	3	2	1	2	5	–	19	55	103
8.–9. Jan Šenk	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	4	4	3	3	4	2	–	7	27	75	103
10. David Němec	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	97
11. Dominik Starý	G, Benešov	4	2	3	–	–	–	–	–	9	84	83
12. Martin Crhán	G, Studentská, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	76
13. Mikuláš Mikula	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	–	3	–	–	1	1	–	9	64	68
14. Šimon Karch	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	58
15. Martina Kopecká	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	5	–	5	76	56
16. Matúš Kopunec	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	–	3	–	–	–	–	–	7	80	53
17. Pavla Trembulaková	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	3	–	–	–	3	53	46
18. Marek Kadlečík	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	–	–	1	–	3	2	–	10	51	44
19. Tomáš Faigl	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	41
20.–21. Ondřej Hajnýš	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	37
20.–21. Václav Kubíček	Arcibisk. G, Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	37
22. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	32
23. Matej Parada	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	29
24. Štěpán Kohl	Klasické a španělské G, Brno	4	–	–	–	–	–	–	–	4	80	28
25.–26. Filip Nácovský	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	25
25.–26. Veronika Sedláková	G Masarykovo nám., Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	25

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	5	5	7	6	34	100	174
1. Matěj Mezera	G, Havlíčkův Brod	2	4	3	4	5	4	8	7	37	98	171
2. Jáchym Bárták	G, Havlíčkův Brod	2	3	3	4	5	4	6	7	34	96	167
3. Pavol Šimko	G V. Nedožerského, SR	2	2	3	4	–	5	3	6	25	83	140
4. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	2	3	3	4	2	4	5	3	26	80	139
5. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	2	4	3	3	5	–	6	–	23	88	134
6. Štěpán Stenclák	G, Třinec	2	2	3	4	4	3	7	–	25	82	133
7. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Horice	2	1	3	4	2	2	6	1	21	73	124
8. Kateřina Stodolová	G Dašická, Pardubice	2	3	3	–	–	4	6	–	18	82	99
9. Andrej Kancko	G B. S. Timravy, Lučenec	3	–	1	–	–	5	2	–	11	68	97
10. Veronika Úlovcová	Církevní G, Plzeň	2	2	3	4	–	1	5	–	17	64	89
11. Matěj Rzehulka	Wichterlovo G, Ostrava	2	3	3	4	2	5	1	5	25	70	83
12. Klára Ševčíková	G, Uherské Hradiště	2	–	3	–	–	–	3	5	13	66	82
13. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	3	1	2	1	2	–	14	47	76
14. Veronika Rajnářková	G, Nové Zámky	2	–	3	–	–	–	–	–	5	74	73
15. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	70
16. Jonáš Fuksa	PORG, Praha	2	2	3	4	–	–	–	–	11	87	69
17. Jakub Kožušník	Wichterlovo G, Ostrava	2	–	1	2	1	2	–	–	8	55	68
18. Alžběta Andrášková	G, Olomouc-Hejčín	2	–	–	–	–	2	5	–	9	68	67
19. Branislav Belko	G Milana Růfusa	2	1	1	1	0	3	1	–	9	44	66
20. Marek Raja	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	59
21. Matěj Vitouch	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	56
22. Přemysl Štastný	G, Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	54
23. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	2	1	–	–	–	–	6	–	9	76	53
24. Igor Bajo	G, Hodonín	2	0	2	1	0	3	6	–	14	51	50
25. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	48
26. Václav Mikeska	G F. Palackého, Val. Mez.	2	2	3	4	–	1	–	–	12	80	43

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student</i>	MFF UK	2	2	3	4	5	5	7	6	34	100	174
1. Šimon Knoška	G A. Kmeta, B. Štiavnica	2	4	3	4	–	4	7	3	27	83	132
2. Peter Kubaščik	G, Kysucké Nové Mesto	2	–	2	3	2	3	–	–	12	74	118
3. Petr Hrubý	G, Polička	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	96
4. Lukáš Supík	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	93	93
5. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	82
6. Andrej Uhliarik	G A. Bernoláka, Námestovo	2	–	3	2	–	–	–	–	7	70	73
7. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	57
8. Andrea Tóthova	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	55
9. Patrik Procházka	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	53
10. Jakub Pilař	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	46
11. Štěpán Malec	SPŠ a VOŠ Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	39
12. Jakub Marták	G Golianova, Nitra	1	1	2	1	–	1	–	–	6	37	32
13. Pavel Souček	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	31
14. Jozef Mišt	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	–	3	–	–	–	–	–	5	67	26
15. Jakub Jambrich	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	25
16. Martin Gažo	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	16
17. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	15
18. Anna Linhartová	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10
19.–21. Daniel Adamkovič	G Šrobárova, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	8
19.–21. Juraj Májek	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	8
19.–21. Júlia Matulová	G K. Sladkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	8
22. Kristína Mrázová	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	7
23. Marek Otýpka	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6
24. Kryštof Kolář	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	5
25. Muhammad Rahman	Arifur Bogra Cant. Pub. S. and C., BD	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	4
26. Jiří Tuháček	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	2




## FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.