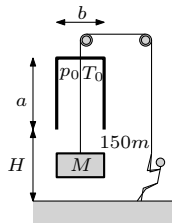


Úloha V.3 ... egyptská brána

3 body; průměr 2,65; řešilo 51 studentů

Ve starověkém Egyptu uměli vyrobit bránu, ale ještě neznali mříže, tak brány zavírali nilany (vápencovými kameny). Na obrázku vidíte 150 otroků o hmotnosti $m = 60$ kg, kteří právě velmi pomalu otevírají bránu zavřenou nilanem o hmotnosti $M = 8$ t. Nilan přesně (vzduchotěsně) pasuje do konstrukce nad bránou ve tvaru kvádra, která má vnitřní rozměry $a = 3$ m, $b = 0,5$ m a $c = 3$ m. Uvnitř konstrukce je na počátku tlak $p_0 = 100$ kPa a teplota $T_0 = 300$ K a je umístěna ve výšce $H = 3$ m. Určete, jak vysoko jsou otroci schopni vlastní vahou nilan zdvihnout, jestliže se teplota vzduchu nemění.

Mírek rád předává otrockou práci jiným.



Nilan je zvedán na kladce, tedy silou stejné velikosti, jakou jsou otroci přitahováni k Zemi. Otroci váží $150m = 9$ t. Budou proto svojí vahou zvedat kámen silou

$$F_1 = F_{\text{otroci}} - F_{\text{nilan}} = (m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g, \quad (1)$$

kde g je gravitační zrychlení, do té doby, než se vrchní plocha dotkne konstrukce.

Jakmile se tak stane, uzavře nilan v konstrukci plyn. Pro výpočet budeme uvažovat ideální chování plynu. Kámen se bude chovat jako píst, který stlačuje plyn v konstrukci. Teplota vzduchu se dle zadání nemění. Jedná se tedy o izotermický děj. Teplota se v každém okamžiku vyrovnává s teplotou okolí, pracujeme tedy se sledem rovnovážných stavů. Také platí Boyleův-Mariottův zákon $pV = \text{konst.}$ Protože objem plynu se bude snižovat, musí se tlak plynu zvyšovat. Na píst působí síla

$$F_2 = S\Delta p = bc\Delta p, \quad (2)$$

kde S je povrch vrchní stěny nilanu, b a c jsou délky vrchních hran a Δp je změna tlaku v důsledku změny objemu (na nilan působí tlak plynu shora i atmosférický tlak zdola, proto je síla úměrná jejich rozdílu Δp).

Označme stav, kdy se nilan začne dotýkat konstrukce, jako stav 0. Stav 1 nastane ve chvíli, kdy bude kladka v rovnováze. Nutně platí rovnice $p_1V_1 = p_0V_0$. Tlak p_0 známe, objem V_0 spočítáme jako součin délek hran abc . p_1 je větší než p_0 , označme si ho proto jako $p_0 + \Delta p$. V_1 můžeme také vypočítat jako součin délek hran. Délky b a c se nezmění, ale „výška“ plynu v konstrukci ano. Označme si tento nový rozměr jako a' . Po dosazení do Boyleova–Mariottova zákona máme

$$p_0abc = (p_0 + \Delta p)bc a',$$

$$\Delta p = p_0 \frac{a - a'}{a'}. \quad (3)$$

Z rovnováhy na kladce (nilan se zvedá pomalu) víme, že kámen se zastaví, právě když $F_1 = F_2$. Porovnáním rovnic (1) a (2) zjistíme, že

$$(m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})bcg = \Delta p.$$

Dosazením změny tlaku z rovnice (3) a vyjádřením a' máme téměř hotovo.

$$p_0bc \frac{a - a'}{a'} = (m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g,$$

$$a' = \frac{p_0abc}{(m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g + p_0bc}.$$

Číselně $a' \doteq 2,8$ m. My ale máme určit, jak vysoko jsou otroci schopni nilan zdvihnout, to je vzdálenost $((H - x) + (a - a'))$, kde H je výška konstrukce nad zemí, x výška nilanu, a výška samotné konstrukce a a' konečná „výška“ plynu v konstrukci. Výšku nilanu zjistíme z hustoty vápence, kterou můžeme najít na internetu¹. Vezmeme střední hodnotu $2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Z toho lze vypočítat výšku nilanu jako

$$x \doteq \frac{m_{\text{nilan}}}{\rho_{\text{nilan}}bc}.$$

Číselně $x \doteq 1,9$ m.

Vzdálenost R , o kterou otroci zvednou kámen, je $R = H - x + a - a'$. Po číselném dosazení máme $R \doteq 1,3$ m.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹ <https://sk.wikipedia.org/wiki/Vápenec>