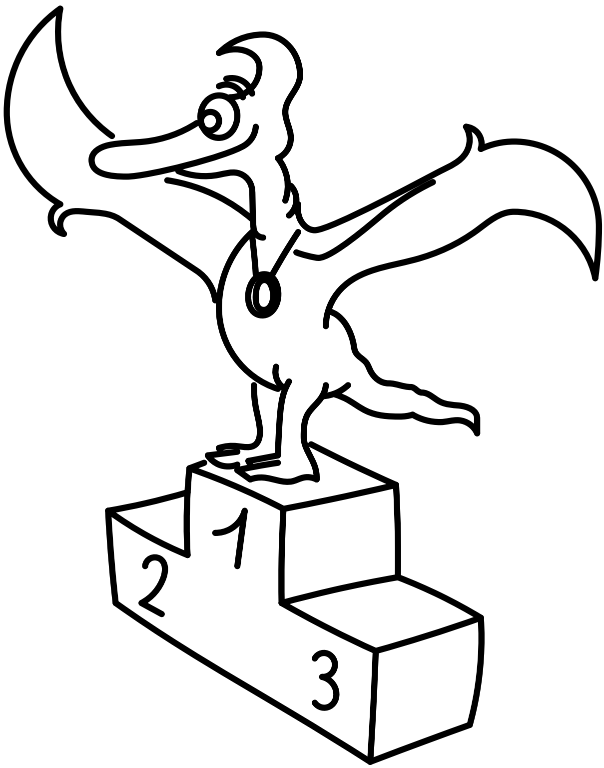
Řešení úloh 11. ročníku FYKOSího Fyziklání



Úloha AA ... na rozehřátí

Mějme válcovou sklenici o podstavě $S = 9\pi\,\mathrm{cm^2}$, v ní vodu o teplotě $t_\mathrm{v} = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^3}$. Dále do sklenice vhodíme kouli ledu o poloměru $r = 2\,\mathrm{cm}$, teplotě $t_\mathrm{l} = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a hustotě $\varrho_\mathrm{l} = 0{,}9\,\mathrm{g{\cdot}cm^3}$. Nyní je hladina vody ve sklenici $h = 10\,\mathrm{cm}$ vysoko. O kolik se změní výška hladiny, pokud necháme led zcela roztát na vodu o teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$?

Lukáš Timko chtěl, aby se účastníci museli zamyslet, což se ukázalo jako problém.

Protože led roztaje na vodu o stejné hustotě, jakou má okolní voda a zároveň je na začátku ve sklenici dost vody, aby plaval, tak díky Archimedovu zákonu zůstane výška hladiny stejná.

Důkaz: objem ledu pod hladinou je z Archimedova zákona $V\varrho_\mathrm{l}/\varrho_\mathrm{v}$, kde V je objem ledu. Hmotnost ledu je $V\varrho_\mathrm{l}$ a po roztání zabere voda téže hmotnosti stejný objem $V\varrho_\mathrm{l}/\varrho_\mathrm{v}$.

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

Úloha AB ... nelineární kondenzátor 1

Uvažujme nelineární kondenzátor, tedy takový, jehož kapacita závisí na napětí na něm. Jaká musí být tato závislost, aby byl náboj na kondenzátoru vždy konstantní?

Xellos upravil úlohu a nestydí se za to.

Náboj kondenzátoru je $Q_0 = CU$. Kapacita tedy musí být přímo úměrná U^{-1}, tedy $C = Q_0/U$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha AC ... vzdálená komunikace

Jak dlouho může trvat, než dojde optický signál vyslaný ze Země na Mars? Uvažujte, že Země i Mars obíhají po kruhových drahách kolem Slunce o poloměrech $r_\mathrm{Z} = 1{,}50\cdot 10^8\,\mathrm{km}$ a $r_\mathrm{M} = 2{,}30\cdot 10^8\,\mathrm{km}$. Uvažujte, že signál jde přímo. (Odpovědí je interval.)

Karel šel do kina na Pasažéry.

Předně si musíme uvědomit, že vzdálenost mezi Zemí a Marsem není konstantní. Budeme určovat tedy jak nejkratší, tak nejdelší dobu, kterou může světlu trvat cesta mezi planetami. Obě dvě doby budou nastávat, když Země, Slunce a Mars budou v jedné přímce. Pokud bude Slunce s Marsem v opozici, jde o nejkratší dobu, jejich vzdálenost bude $r_\mathrm{max} = r_\mathrm{M} - r_\mathrm{Z}$. Naopak když bude Slunce mezi Zemí a Marsem, půjde o nejdelší dobu a vzdálenost $r_\mathrm{min} = r_\mathrm{M} + r_\mathrm{Z}$. Světlo bude putovat rychlostí světla $c \doteq 3{,}00\cdot 10^5\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Tedy doby, které to světlu bude trvat, budou

$$t_\mathrm{min} = \frac{r_\mathrm{min}}{c} = \frac{r_\mathrm{M} - r_\mathrm{Z}}{c} \doteq 270\,\mathrm{s} \doteq 4{,}4\,\mathrm{min}\,,$$
$$t_\mathrm{max} = \frac{r_\mathrm{max}}{c} = \frac{r_\mathrm{M} + r_\mathrm{Z}}{c} \doteq 1\,270\,\mathrm{s} \doteq 21{,}1\,\mathrm{min}\,.$$

Signálu bude tedy trvat minimálně 4,4 minuty, než dosáhne druhé planety a maximálně 21,1 minut. Pokud tedy budete chtít nějak rychle poradit v nějaké krizi na Marsu a zavoláte o tom na Zem, tak musíte čekat minimálně 10 minut na odpověď, ale spíše raději počítejte s hodinou...

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AD ... dietní chyba

Sklenice pomerančového džusu o objemu 0,2 l *má energetickou hodnotu* 374 kJ. *O kolik více* kJ *má stejná sklenice, ve které je vodka s džusem v poměru 1:1? Vodka má* 42 % *alkoholu a* 1 g *čistého alkoholu má energetickou hodnotu* 29 kJ. *Pro potřeby této úlohy považujme vodku za směs alkoholu a vody, kde voda nemá žádnou energetickou hodnotu a objem směsi rovná se součtu objemů složek. Hustota alkoholu je* $\varrho_{\mathrm{alkohol}} = 790\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Meggy tvrdí: „Ani se neptejte...“

Podle předpokladu obsahuje 0,1 l vodky 0,042 l alkoholu, tedy veškerý alkohol ve směsi váží 33,2 g, tedy má energetickou hodnotu 962 kJ. Džus má energetickou hodnotu 187 kJ, tedy vodka s džusem obsahuje o 775 kJ energie víc než samotný džus.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`

Úloha AE ... dva roky jezdím bez nehod

Určete, jakou nejvyšší rychlostí může motorkář projíždět nejostřejší zatáčku na brněnském okruhu, která má poloměr $R = 50\,\mathrm{m}$, *aby mu nepodjela kola a nerozplácl se o zem. Koeficient tření mezi pneumatikou a asfaltem je* $f = 0{,}55$, *motorka s jezdcem má hmotnost* $m = 300\,\mathrm{kg}$ *a tíhové zrychlení je* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Lukáš T. sledoval Velkou cenu.

Aby motorka nepodklouzla, nesmí být odstředivá síla působící na motorku větší než třecí síla mezi pneumatikou a asfaltem, tedy

$$m\frac{v^2}{R} \leq fmg\,, \qquad \Rightarrow \qquad v \;\leq \sqrt{fgR}\,.$$

Rychlost motorkáře tedy může být maximálně $16{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což je přibližně $59\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Lukáš Timko
`lukast@fykos.cz`

Úloha AF ... hapalo

Upustíme těleso z výšky $h_1 = 100{,}0\,\mathrm{m}$ *a pak z výšky* $h_2 = 120{,}0\,\mathrm{m}$. *O kolik větší rychlost bude mít v druhém případě ve chvíli, kdy bude mít polovinu své původní potenciální energie, oproti prvnímu případu (znovu při polovině původní potenciální energie). Odporové síly vzduchu zanedbejte. Potenciální energie má nulovou hladinu na úrovni země.*

Kiki si říkala: „Proč počítat praktické věci...“

Ve chvíli, kdy má těleso polovinu původní potenciální energie, je tato energie rovna kinetické. Dostáváme tedy velmi jednoduchou rovnici $\frac{1}{2}mgh_i = \frac{1}{2}mv_i^2$, obě rychlosti tedy lze dopočíst jako $v_i = \sqrt{gh_i}$ s dosazením příslušné výšky h_i. Pro zadané hodnoty dostáváme rozdíl rychlostí asi $\Delta v = \sqrt{g}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right) \doteq 2{,}99\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha AG ... jedu!

Meggy scházela svah (nakloněnou rovinu) po udusaném sněhu, koeficient smykového tření mezi podrážkou její boty a sněhem byl $f = 0{,}25$. Jako správná dáma nechce prozradit svoji hmotnost. Spočítejte, jaký byl maximální sklon kopce (úhel), kdy mohla Meggy rovně stát, aniž by se rozjela. *Meggy se klouzala z kopce.*

Meggy má hmotnost m, kopec je od roviny odchýlený o úhel α. Tíhová síla, která na ni působí, je tedy gm a rozkládá se na složku kolmou ke svahu $gm\cos\alpha$ a složku ve směru svahu $gm\sin\alpha$. Proti složce ve směru svahu působí třecí síla o velikosti $fgm\cos\alpha$, až se obě síly vyrovnají, Meggy se rozjede. Tedy nás zajímá úhel, kdy $gm\sin\alpha = fgm\cos\alpha$, tedy kdy $\operatorname{tg}\alpha = f$, tedy $\alpha = \operatorname{arctg} f \doteq 0{,}245\,\mathrm{rad} \doteq 14{,}04\,^\circ$.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Úloha AH ... kulička na pružince

Máme lehkou pružinku, která stojí kolmo na vodorovné desce stolu. Dále máme přichystané závaží o hmotnosti m, které na ni chceme položit. Pružinka má tuhost k. Pokud byla pružinka v klidové délce a závaží jsme položili z klidu, o kolik se maximálně zkrátí její délka? *Karel si prohlížel kuličkové pero a propisku.*

K úloze lze přistupovat různě. Můžeme vyjít z rovnosti energie. Na počátku je nulová jak kinetická energie, tak polohová energie pružinky. Zkrácení měříme od původní pozice konce pružinky směrem dolů, pak dostáváme

$$E = 0 + 0 = \frac{1}{2}k\,\Delta l^2 - mg\Delta l\,,$$

kde g je tíhové zrychlení a Δl je prodloužení pružinky. Vyjde nám

$$\Delta l = \frac{2mg}{k}\,.$$

Mohli bychom také uvážit, kam se nám posune klidová délka pružinky se závažím. To je dáno rovností sil. Ale pak nesmíme zapomenout uvážit, že pružinka o stejnou délku překmitne.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BA ... mlsná

Na obalu Milka Triolade se uvádí: „mléčná čokoláda 33 %, bílá čokoláda 42 %, tmavá mléčná čokoláda 25 %“ a na spodu složení je, že obsah kakaové sušiny v mléčné čokoládě je nejméně 30 % a v tmavé mléčné čokoládě nejméně 45 %, bílá čokoláda žádnou neobsahuje. Tabulka váží $M = 300\,\mathrm{g}$. Kdybychom ji roztavili, kolik kakaa bychom do hmoty museli přidat, aby s jistotou obsahovala alespoň 25 % kakaové sušiny? *Meggy je mlsná.*

Spočítáme si, kolik kakaové sušiny je v čokoládě na začátku: $0{,}33 \cdot 30\,\% + 0{,}25 \cdot 45\,\% = 21{,}15\,\%$. Tedy čokoláda už obsahuje $m = 63{,}45\,\mathrm{g}$ kakaové sušiny. Čokoláda váží $300\,\mathrm{g}$, kakaa do ní přisypeme k, chceme, aby $\frac{m+k}{M+k} = 0{,}25$. Roznásobme si zlomek a řešme rovnici s neznámou k, vyjde nám $k = 15{,}4\,\mathrm{g}$.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`

Úloha BB ... neprůstřelná

Mikuláš nemá rád „pytel brambor“ a proto, když seděli (leželi) proti sobě na nehmotných bezodporových kolečkových židlích, vystřelil na něj z brokovnice broky o zanedbatelné celkové hmotnosti rychlostí $1\,\mathrm{km/s}$*: Kdo z nich má na konci vyšší rychlost a o kolik, pokud na konci Mikuláš váží i s brokovnicí* $80\,\mathrm{kg}$*, „pytel brambor“ váží* $60\,\mathrm{kg}$ *a trefí ho tři čtvrtiny broků, které Mikuláš vystřelil?* *Mikuláš prokrastinoval od studia Matematické analýzy.*

„Pytel brambor“ bude mít tři čtvrtiny hybnosti Mikuláše, což odpovídá stejné rychlosti, protože má i tři čtvrtiny jeho hmotnosti.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Úloha BC ... aby si z vás nevystřelila Hepnarová...

Máme vzduchovku, která dokáže vystřelit náboj o hmotnosti m s rychlostí v. Střílet budeme do válce o poloměru R a hmotnosti M. Válec se může volně otáčet kolem své svisle umístěné osy, ale nemůže se jinak pohybovat. Do válce střelíme zboku a střela v něm uvízne ve vzdálenosti x od osy válce. Shodou okolností je x minimální vzdálenost od osy válce, kterou by střela měla v průběhu svého letu, když by pokračovala dále. Jakou úhlovou rychlostí bude rotovat válec po vstřelu? Zanedbejte odpor vzduchu a tření. Na počátku válec nerotoval a zanedbejte taky jeho rotaci po čas nárazu střely. *Karel přemýšlel, co by se dalo zkoušet se vzduchovkou.*

Ze zadání je jasné, že nepůjde o pružnou srážku, protože střela ve válci uvízla. Z toho je jasné, že nemůžeme využít zákon zachování energie. Dále je zřejmé, že se nebude zachovávat hybnost. To je způsobeno pevným připojením osy válce a tedy nějakou externí silou, která jej bude držet na místě. Zákon zachování, který se uplatní, bude zákon zachování momentu hybnosti. Ten můžeme napsat jako

$$mvx = \omega\left(J_{\mathrm{kolo}} + J_{\mathrm{kulka}}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}MR^2 + mx^2\right)\,, \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{R^2}{x^2}}\,.$$

Máme výsledek, radujeme se, běžíme s výsledkem a po cestě nezakopneme.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BD ... Lada na ledě

Ivan jede krajinou ve své Ladě, když tu vjede do strmého kopce o sklonu $\alpha = 8^\circ$ a kola mu začnou prokluzovat (naštěstí není v kopci zatáčka). Jakou minimální rychlostí musí být Lada rozjetá, aby dojela až na vrchol stoupání, které je dlouhé $l = 300\,\mathrm{m}$. Koeficient (dynamického) smykového tření mezi kolem a náledím je $f = 0{,}05$. *Michal zažil v Praze sníh.*

V kopci bude auto mít auto zrychlení

$$a = g\sin\alpha - gf\cos\alpha\,.$$

Aby auto dojelo na konec kopce musí platit

$$0 = v_0 - at$$

kde v_0 je hledaná počáteční rychlost. Dohromady se vztahem pro rovnoměrně zpomalený pohyb

$$l = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

dostáváme soustavu dvou rovnic pro neznámé v_0 a t. Řešení, které nás zajímá, je

$$v_0 = \sqrt{2lg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}\,,$$

po dosazení číselných hodnot vyjde $v_0 \approx 83\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Úloha BE ... letadlo

V jaké zeměpisné šířce letí letadlo, jehož pasažéři vidí slunce stále na stejném místě? Letadlo letí po rovnoběžce proti směru rotace Země (kolem osy) rychlostí $900\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Uvažujte, že Země je koule a den trvá 24 hodin. Pohyb Země okolo Slunce neuvažujte. *Verča chtěla zastavit čas.*

Letadlo musí mít stejnou rychlost s obvodovou rychlostí rotující Země pod ním, aby výsledný pohyb vzhledem ke Slunci byl nulový. Letadlo musí letět na takové rovnoběžce, jejíž délka o je rovna dráze letadla, kterou by uletělo za 24 hodin

$$o = vt\,.$$

Poloměr takové rovnoběžky je pak

$$r = \frac{o}{2\pi} = \frac{vt}{2\pi}\,.$$

Zeměpisná šířka je úhel α, který svírá rovina rovníku s rovinou kolmou na tečnou rovinu v daném bodě na povrchu Země. Ve 2D si ji můžeme představit jako úhel, který svírá rovník s úsečkou spojující daný bod na povrchu Země a střed Země, přičemž platí

$$\cos\alpha = \frac{r}{r_\mathrm{z}}\,,$$

kde $r_\mathrm{z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ je poloměr Země. Po vyjádření úhlu α a dosazení číselných hodnot dostáváme zeměpisnou šířku

$$\alpha = \arccos\frac{vt}{2\pi r_\mathrm{z}} = 57{,}4^\circ\,.$$

Veronika Dočkalová
`verca@fykos.cz`

Úloha BF ... (ne)ustálená nádrž

Máme nádrž, do které přitéká objemový tok Q_0 vody. Hladina v nádrži má ustálenou výšku h_0 a to tak, že v jejím dně je otvor. Změníme objemový tok tak, že začneme nalévat do nádrže $Q = 3Q_0$. Po určité době se, v případě že bude nádrž dost vysoká, vodní hladina ustálí v jiné výšce. ***O kolik výše*** *se hladina ustálí v závislosti na Q, Q_0 a h_0? Uvažujte, že otvor zůstane stejně velký.*

Karel napouštěl vanu, až začala přetékat…

Voda vytéká z důvodu tlaku vodního sloupce. Původně vytékala rychlostí, kterou můžeme určit jako

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0\,, \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}\,.$$

Pro objemový tok, který vytéká z nádrže, platí rovnice kontinuty, konstantní zůstává S

$$Q_0 = v_0 S\,, \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{Q_0}{v_0}\,,$$

což vztáhneme k rovnici kontinuity po ustálení nové výšky $h_0 + \Delta h$.

$$\frac{Q_0}{v_0} = \frac{Q}{v}\,,$$

kde $v = \sqrt{2g\left(h_0 + \Delta h\right)}$. Dostáváme

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2gh_0}} = \frac{Q}{\sqrt{2g\left(h_0 + \Delta h\right)}}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h = \left(\left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 - 1\right) h_0 = 8h_0\,.$$

Hladina vody v nádrži se ustálí ve výši o $8h_0$ výše.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BG ... procházka s autobusy

Daniel se rozhodl procházet po Praze podél trasy autobusové linky 177. V průběhu svojí cesty potkával protijedoucí autobusy této linky jednou za $t_1 = 6\,\mathrm{min}$, přitom ho předjížděly autobusy v jeho směru jednou za $t_2 = 9\,\mathrm{min}$. Uvažujte, že se on i autobusy pohybují konstantní rychlostí. Jaký byl v průběhu jeho procházky ***interval autobusu****? Kolikrát vyšší* ***rychlost*** *měl autobus oproti Danielovi?*

Karel se procházel po městě.

Vyjdeme z toho, že autobus má nějaký interval t. Označme si rychlost, kterou se pohybuje autobus v a Daniel u. To, že má autobus nějaký časový interval, odpovídá tomu, že musí urazit nějakou vzdálenost s, než ho znovu uvidíme. Pokud Dan jde proti autobusu, rychlosti se sčítají. Pokud jde ve stejném směru, rychlosti se odečtou.

$$s = vt = (v + u)\,t_1 = (v - u)\,t_2\,.$$

Z poslední rovnosti si vyjádříme $u(v)$

$$u = \frac{t_2 - t_1}{t_1 + t_2} v\,.$$

Tím získáváme první výsledek, resp. odpověď na druhou otázku, a to

$$\frac{v}{u} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1} = 5\,.$$

Nyní dosadíme zpět do jednoho z předchozích vztahů, např.

$$vt = (v + u)\,t_1 = \left(v + \frac{t_2 - t_1}{t_1 + t_2} v\right) t_1\,,$$

$$t = \frac{2t_2 t_1}{t_1 + t_2} = 7{,}2\,\mathrm{min}\,.$$

Autobus se pohyboval pětkrát rychleji než Daniel a interval autobusu byl 7,2 min.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BH ... sedm a dost

Máme obdélníkový kus papíru, jehož gramáž je $\sigma = 100\,\mathrm{g\cdot m^{-2}}$. Také známe hustotu papíru $\varrho = 600\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Kolikrát musíme tento papír přeložit napůl, aby byla jeho tloušťka větší než průměr Země $d = 12\,800\,\mathrm{km}$? *Mirek překládal obaly od vánoční čokolády.*

Papír má původně tloušťku

$$c_0 = \frac{\sigma}{\varrho}\,.$$

S každým přeložením se jeho tloušťka zdvojnásobí, tj. po n překladech bude mít tloušťku

$$c_n = 2^n c_0\,.$$

Z nerovnosti $c_n \geq d$ vyjádříme

$$n = \left\lceil \log_2\left(\frac{d}{c_0}\right)\right\rceil = \left\lceil \log_2\left(\frac{d\varrho}{\sigma}\right)\right\rceil\,.$$

Číselně vychází $n = 37$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha CA ... sněhové radovánky Dana

Dan se rád válí ve sněhu. V rámci zjednodušení úlohy předpokládejme, že nahý. Dále se tvrdí, že člověk má tepelný výkon řádově $P = 100\,\mathrm{W}$. Jaký objem vody za jednotku času může Dan maximálně rozehřát svým tělem? Pro jednoduchost uvažujme, že sníh je prakticky na teplotě tání. Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,200\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l = 330\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. Hustota Dana je $\varrho_{\mathrm{Dan}} = 1\,030\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Tak nějak pro výpočet doufejte, že Dan má konstantní teplotu.

Karel málem umrzl v průběhu cesty na autobus.

Vyjděme ze základní rovnice pro teplo Q, které je nutné na odtání hmotnosti m látky o měrném skupenském teplu tání l

$$Q = ml\,.$$

Výkon je energie za čas, tedy v našem případě teplo, které ze sebe Dan uvolňuje za jednotku času

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{ml}{t}\,.$$

Vztah mezi hmotností vody a jejím objemem je $m = \varrho V$. Zajímá nás objem roztálého sněhu za čas, tedy

$$P = \frac{\varrho V l}{t}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V}{t} = \frac{P}{\varrho l} = 3{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}} = 0{,}30\,\mathrm{cm^{-3}{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Dan bude tedy schopný roztávat sníh rychlostí $0{,}30\,\mathrm{cm^{-3}{\cdot}s^{-1}}$, tedy zhruba dvoudecovou skleničku za 11 minut.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CB ... termodynamická rozcvička

Ideální plyn jsme adiabaticky převedli ze stavu A *do stavu* B *a potom izotermicky ze stavu* B *do stavu* C*. Při prvním ději plyn vykonal práci* $W_1 = 4\,\mathrm{J}$*, při druhém práci* $W_2 = 5\,\mathrm{J}$*. Jak se změnila jeho vnitřní energie při přechodu ze stavu* A *do* C*?* *Xellos a písemka z Fyziky I.*

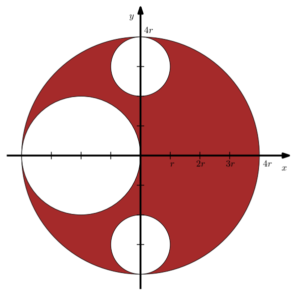
Při izotermickém ději se vnitřní energie nemění, zajímá nás proto jen její změna při prvním ději. Z 1. termodynamického zákona $U_\mathsf{B} - U_\mathsf{A} = Q - W_1$ a jelikož při adiabatickém ději platí $Q = 0$, bude změna energie $\Delta U = U_\mathsf{B} - U_\mathsf{A} = -W_1 = -4\,\mathrm{J}$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha CC ... umělecký stůl

Kdybychom vyrobili desku stolu, jako je na obrázku, kde by bylo ideální umístit jeho nohu, resp. na jakých souřadnicích se nalézá její těžiště? Souřadnicovou soustavu máme naznačenou na obrázku a měříme v ní v r*, což je poloměr nejmenšího kruhového výřezu, poloměr desky je* $4r$*. Deska je ze dřeva s konstantní plošnou hustotou* σ*.*

Karel si říkal, jestli by se neměl věnovat modernímu umění.



Začněme s tím jednodušším, což je určení souřadnice těžiště y. Vzhledem k tomu, že je deska symetrická podle osy x a má konstantní plošnou hustotu, je zřejmé, že souřadnice těžiště bude $y_\mathrm{T} = 0$.

Souřadnici v ose x pak již budeme muset spočítat, protože otvory v desce nejsou podle osy y symetrické. Vyjdeme z toho, že celkový moment síly vůči ose procházející těžištěm musí být nulový, tedy deska nezačne sama od sebe rotovat. Moment síly je síla krát vzdálenost od nějaké osy a uvažujeme, že silou působí homogenní tíhové pole a desku máme vodorovně (jiný náklon by vyšel stejně, ale chceme psát g místo nějakého obecného a). Celkový moment síly vůči ose procházející počátkem souřadnicové soustavy je

$$M = M_{4r} - M_{2r} - 2M_r = \pi\,(4r)^2\,\sigma g \cdot 0 - \pi\,(2r)^2\,\sigma g \cdot (-2r) - 2\pi r^2 \sigma g \cdot 0 = 8\pi r^3 \sigma g\,.$$

Ten se bude rovnat tedy momentu síly těžiště desky

$$M = m_{\mathrm{celk}} x_{\mathrm{T}} = \left((4r)^2 - (2r)^2 - 2r^2\right) \pi\sigma g x_{\mathrm{T}} = (16 - 4 - 2)\,\pi r^2 \sigma g x_{\mathrm{T}} = 10\pi r^2 \sigma g x_{\mathrm{T}}\,.$$

Momenty dáme do rovnosti a vyjádříme si x_{T}

$$8\pi r^3 \sigma g = 10\pi r^2 \sigma g x_{\mathrm{T}} \qquad \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{T}} = 0{,}8\,r\,.$$

Těžiště desky bude tedy na souřadnicích $[x_{\mathrm{T}}; y_{\mathrm{T}}] = [0{,}8\,r; 0]$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CD ... blížení elektronu

Kolikrát by se musela zvýšit gravitační konstanta G (z Newtonova vztahu pro gravitační sílu), abychom mohli pohyb elektronu ve vodíku $^1\mathrm{H}$ *(Bohrův model) považovat za pohyb po kruhové dráze s poloměrem o 10 % menším než ve skutečnosti? Uvažujte, že konstanta k v elektromagnetické síle se nezmění.* *Karel uvažoval, jak zkombinovat astrofyziku a jadernou fyziku.*

Pre atóm vodíka používame Bohrov model. Podľa neho sa elektrón s hmotnosťou m_{e} pohybuje okolo protónu s hmotnosťou m_{p} po kruhovej dráhe s polomerom r a rýchlosťou v. Moment hybnosti elektrónu potom môže nadobúdať len hodnoty

$$L = m_{\mathrm{e}} v r = n\hbar \tag{1}$$

pre $n \in \mathbb{N}$. Elektrón a protón majú náboje $-e$ a e.

Na elektrón pôsobí odstredivá, elektrická (Coulombova) a gravitačná sila. Pri pohybe po kružnici nastáva rovnováha síl

$$\frac{m_{\mathrm{e}} v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} + \frac{G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}}}{r^2}\,, \tag{2}$$

dosadením za v z (1) potom dostaneme

$$\frac{n^2\hbar^2}{m_{\mathrm{e}} r^3} = \frac{ke^2}{r^2} + \frac{G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}}}{r^2}\,,$$

z čoho vyjadríme

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{m_{\mathrm{e}}(ke^2 + G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}})}\,. \tag{3}$$

Nás ale zaujíma G', pre ktorú by (pre ten istý elektrón, teda pri rovnakom n) bol polomer $r' = 9r/10$. Na to, aby sme ju zistili, stačí použiť rovnicu (3), raz pre G, druhý krát pre G', a upraviť

$$\frac{9}{10}\frac{n^2\hbar^2}{m_{\mathrm{e}}(ke^2 + G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}})} = \frac{n^2\hbar^2}{m_{\mathrm{e}}(ke^2 + G' m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}})}$$

$$9(ke^2 + G' m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}}) = 10(ke^2 + G m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}})$$

$$G' = \frac{ke^2}{9 m_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{p}}} + \frac{10}{9} G\,,$$

čo po dosadení tabuľkových hodnôt dá výsledok $G'/G = 2{,}52 \cdot 10^{38}$. Vidíme, že ide o strašne veľké číslo. Dôvodom je to, že gravitačná sila je (pre G) oveľa menšia ako elektrická, a konštantu G musíme zväčšiť tak, aby vôbec začala byť podstatná.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha CE ... dračí chřtán

Zelený drak Mrak požírá dřevěné uhlí, aby mohl podle potřeby šlehat plameny. Spalování probíhá podle rovnice $\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2}$, *kterou charakterizuje* $\Delta H = -393{,}51\,\mathrm{kJ{\cdot}mol^{-1}}$. *Jakou teplotu ve stupních celsia mají jeho plameny, pokud je uhlí spalováno adiabaticky ve vzduchu složeném z 80 % dusíku a 20 % kyslíku, molekulárního kyslíku a uhlíku je ekvimolární množství. Dále jsou známé tepelné kapacity za konstantního tlaku následujících látek:* $c_{\mathrm{N_2}} = 29{,}125\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, $c_{\mathrm{O_2}} = 29{,}355\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ *a* $c_{\mathrm{CO_2}} = 37{,}110\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. *Považujte je za teplotně nezávislé. Drak je plaz, a proto teplota jeho těla je srovnatelná s teplotou okolí, která činí* $t_1 = 25\,{}^\circ\mathrm{C}$. *Výsledek uveďte ve °C.* *Katka byla fascinována draky*

Při adiabatickém ději se neuvolňuje ani nespotřebovává teplo, proto víme, že veškerá uvolněná energie ze spalování se využije na ohřev vzduchu z teploty t_1 na neznámou teplotu t_2. Použijeme úvahu, že každá molekula uhlí ohřívá produkty vzniklé jejím spálením. Navíc k tomuto produktu (což je pouze jedna molekula oxidu uhličitého) musíme připočítat správný počet molekul dusíku. Víme, že jich je čtyřikrát více než molekul kyslíku. A protože na spálení jedné molekuly uhlí je potřeba jedna molekula kyslíku, připočítáme čtyři molekuly kyslíku. Výsledná energetická bilance vypadá

$$-\Delta H = \left(4c_{\mathrm{N_2}} + c_{\mathrm{CO_2}}\right)(t_2 - t_1)\ ,$$

odkud můžeme vyjádřit

$$t_2 = \frac{-\Delta H + \left(4c_{\mathrm{N_2}} + c_{\mathrm{CO_2}}\right) t_1}{4c_{\mathrm{N_2}} + c_{\mathrm{CO_2}}}\ .$$

Protože v kelvinech jsou udané jen rozdíly teplot, které jsou shodné pro celsiovu i kelvinovu stupnici, nemusíme se převody jednotek zabývat a rovnou můžeme dosazovat vše ve stupních celsiových. Teplota t_2 číselně vychází $2\,590\,{}^\circ\mathrm{C}$.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha CF ... jak se nechat ozářit

Máme dva vzorky radioaktivního materiálu (A a B). Vzorek A má třikrát delší poločas rozpadu než B. Ve vzorku A je čtyřikrát vyšší hmotnostní zastoupení radioaktivního prvku než v B. Poměr atomových hmotností radioaktivních prvků A ku B je 3 ku 2. Jaký musí být poměr vzdáleností od zářičů $r_\mathrm{A}/r_\mathrm{B}$, *aby přístroj zaznamenával stejnou aktivitu vzorků (počet částic za čas)? Uvažujte dokonalý všesměrový detektor. Záření není ničím stíněno mezi vzorky a detektorem. Vzorky považujte za bodové a vyzařující záření izotropně. Zajímáme se o krátký časový úsek, za který aktivita vzorku měřitelně nepoklesne. Rozpad, kterému podléhají oba vzorky, je stejného typu.* *Karel přemýšlel na radiologii.*

Aktivita zářiče je přímo úměrná tomu, jaký počet částic zářiče máme. Tento počet je přímo úměrný hmotnosti zářiče a nepřímo úměrný relativní atomové hmotnosti zářiče. Tedy pokud bychom uvážili zatím pouze hmotnost a atomovou hmotnost, pak bude poměr $\tilde{a}_\mathrm{A} : \tilde{a}_\mathrm{B} = 8 : 3$.

Dalším vlivem na počet radioaktivních rozpadů ve vzorku má to, jaký má látka, z níž je tvořen, poločas rozpadu. Čím delší poločas rozpadu má, tím nižší aktivita a naopak. Vzhledem k tomu, že se zajímáme o krátký časový úsek, za který aktivita nepoklesne, nemusíme toto uvažovat a jde nám pouze o to, jak rychle se nám vzorky rozpadají. Tedy pokud A má třikrát delší poločas rozpadu, B bude třikrát aktivnější.

Pokud dáme předchozí úvahy dohromady, dostáváme $a_\mathrm{A} : a_\mathrm{B} = 8 : 9$. Počet detekovaných částic na detektoru závisí nepřímo úměrně na druhé mocnině vzdálenosti od detektoru. Tedy aby počet detekovaných částic byl identický, musí platit

$$\frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0{,}943\,.$$

Vzorek A tedy musíme umístit o cca 5,7 % blíže k detektoru, abychom od obou zdrojů záření naměřili stejnou aktivitu. Nicméně jak již předznamenalo zadání, ve skutečné situaci by to ještě komplikovala citlivost detektoru, stínění mezi detektorem a zářičem atd.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CG ... králova koruna

Král si chce nechat vyrobit novou zlatou korunu. Bohužel si vybral ke zhotovení podvodníka, který mu chce vyrobit korunu z pozlaceného kovu. Jak dlouho bude podvodník pozlacovat královu korunu, když použije roztok se zlatitými ionty při proudu $I = 5\,\mathrm{A}$ a chce udělat vrstvu zlata silnou $d = 1\,\mathrm{mm}$? Koruna má povrch $S = 12\,\mathrm{dm}^2$. Uvažujte rovnoměrné zlacení. Faradayova konstanta je $F = 9{,}65 \cdot 10^4\,\mathrm{C{\cdot}mol^{-1}}$. Měrná tepelná kapacita zlata je $25{,}4\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Molární objem zlata je $V_\mathrm{m} = 1{,}02 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}}$. Výsledek uveďte ve dnech.

Katka občas přemýšlí nad nekalými věcmi.

Měrná tepelná kapacita byla zadána jako bonus navíc, který nevyužijete. K řešení stačí využít Faradayovy zákony, podle kterých

$$m = \frac{MIt}{Fz}\,,$$

kde m je hmotnost zlata, M je molární hmotnost zlata, I je použitý proud, t je čas, po který se koruna zlatí, F je Faradayova konstanta a $z = 3$ je číslo, určující oxidační stav zlata v roztoku. Hmotnost lze vyjádřit ze vzorce $m = \varrho V \approx \varrho S d$. Máme zadaný molární objem zlata, pro který platí $V_\mathrm{m} = M/\varrho$. Dosazení těchto skutečností a vyjádření času máme výsledný vzoreček

$$t = \frac{FSdz}{V_\mathrm{m} I}\,.$$

Po dosazení číselně vychází $t \doteq 7{,}9\,\mathrm{dne}$.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CH ... napařovací

Ve vyčerpané vakuové aparatuře na tlak $p = 10^{-3}$ Pa chceme napařit stříbrem malou destičku vzdálenou $l = 125$ mm od žíravé nádoby. Na povrch destičky chceme napařit vrstvu tlustou $h = 10$ nm. Jak dlouhý stříbrný drát s průměrem $d = 0{,}5$ mm budeme potřebovat k napaření? Předpokládejte, že napařování probíhá jen v poloprostoru nad žhavící nádobou.

Mišo „si hrál“ s vakuovou aparaturou.

Môžeme si predstaviť, že budeme potrebovať napariť celú pologuľu nad nádobou danou vrstvou. Platí zákon zachovania hmotnosti, teda ak sa nemení hustota, zachováva sa aj objem. Takže

$$V_b = x\pi \frac{d^2}{4}\,,$$

kde V_b je objem drôtu na začiatku, d je priemer, a x je hľadaná dlžka. Vzťah pre objem už naparených je

$$V_a = \frac{4\pi l^2}{2} h\,,$$

kde h je hrúbka vrstvy. Z rovnosti objemov dostávame

$$x\pi \frac{d^2}{4} = \frac{4\pi l^2}{2} h\,,$$

$$x = \frac{8l^2 h}{d^2}\,,$$

$$x = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m},\,.$$

Potrebujeme teda drôt dlhý 5 mm.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Úloha DA ... písek, písek, písek

Jsme na poušti a kopeme jámu. Od jaké hloubky (v kilometrech) se vyplatí písek nevynášet nahoru, ale místo toho jej vypařovat? Měrná tepelná kapacita písku je $0{,}74\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, jeho měrné skupenské teplo tání je $128\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ a jeho měrné skupenské teplo varu je $4\,715\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. Písek se vaří při teplotě 3 223 K. Předpokládejte konstantní teplotu v jámě o velikosti 50 °C, a gravitační zrychlení nezávislé na hloubce.Předpokládejte, že vypařený písek stoupá samovolně ven z jámy. (Pokud se budete nudit, můžete si spočítat hustotu plynného písku při této teplotě, a ignorovat fakt, že písek bude chladnout, kondenzovat, a pršet vám roztavený na hlavu)

Mikuláš rád vaří písek.

Ze středoškolské termodynamiky víme, že k vypaření písku je třeba teplo o velikosti $m(c\Delta T + l_\mathrm{t} + l_\mathrm{v})$. Naopak k vynesení písku z jámy je třeba práce mgh. Položíme-li tyto dvě veličiny v rovnost, můžeme vyjádřit výšku

$$h = \frac{(c\Delta T + l_\mathrm{t} + l_\mathrm{v})}{g}$$

Dosazením získáme výšku 712 km.

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz

Úloha DB ... Planckova frekvence

Určete Planckovu frekvenci. Tedy takovou frekvenci, kterou získáte rozměrovou analýzou zkombinovanáním vhodných mocnin tří fundamentálních konstant, a to Planckovy konstanty $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$, gravitační konstanty $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$ a rychlosti světla $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Multiplikační konstantu, kterou nelze určit pomocí rozměrové analýzy, považujte za 1.

Karel má rád Planckovy jednotky.

Pokud bychom chtěli být rychlí a měli bychom v tabulkách či jiné literatuře Planckův čas a vzhledem k tomu, že platí

$$f_\mathrm{P} = \frac{1}{t_\mathrm{P}}\,,$$

pak bychom měli prakticky rovnou výsledek

$$f_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} \doteq 1{,}86 \cdot 10^{43}\,\mathrm{Hz}\,.$$

To by bylo ale hodně jednoduché (docela by nás zajímalo, jestli to někdo využil). Nicméně korektnější postup je předpokládat, že tři uvedené fundamentální konstanty budou vystupovat v našem výsledku v nějaké mocnině, můžeme psát

$$f_\mathrm{P} = \hbar^A G^B c^C\,.$$

Nyní se podívejme, co to by to znamenalo pro jednotky, které v rovnici vystupují

$$\mathrm{s^{-1}} = \mathrm{kg^A{\cdot}m^{2A}{\cdot}s^{-A}{\cdot}kg^{-B}{\cdot}m^{3B}{\cdot}s^{-2B}{\cdot}m^C{\cdot}s^{-C}}\,.$$

Rovnost musí platit pro všechny základní jednotky, jak kilogramy, metry, tak sekundy. Dostáváme z této rovnice po řadě tři rovnice pro mocniny A, B, C

$$\begin{aligned} 0 &= A - B\,,\\ 0 &= 2A + 3B + C\,,\\ -1 &= -A - 2B - C\,. \end{aligned}$$

Soustavu rovnic vyřešíme, získáme $A = B = -1/2$, $C = 5/2$. Dostali jsme tedy očekávaný výsledek $f_\mathrm{P} \doteq 1{,}86 \cdot 10^{43}\,\mathrm{Hz}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha DC ... spočetná

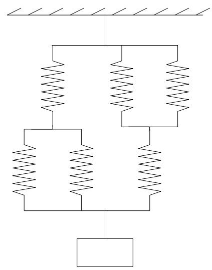
Kolik zrnek písku s průměrem $d = 1\,\mathrm{mm}$ bychom vyrobili z $m = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ skla s hustotou $\varrho = 2{,}5\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Udejte počet cifer *výsledného čísla.*

Janči má rád logaritmy.

Hmotnosť jedného zrnka piesku je $\mu = \frac{1}{6}\pi d^3 \varrho \approx 1{,}31\,\mathrm{mg}$. Spolu je zrniek piesku $m/\mu \approx 4{,}6{\cdot}10^{30}$, teda výsledok má 31 cifier.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha DD ... tuhý a tužší



Jaká je celková tuhost soustavy pružin na obrázku? Všechny pružiny mají stejnou tuhost k? *Karel si říkal, jak je kdo asi tuhý.*

Pokud zapojíme pružiny k_1 a k_2 paralelně, tuhost soustavy se bude sčítat, tedy $k_{\mathrm{pa}} = k_1 + k_2$. Pokud ovšem zapojíme pružiny sériově, bude se sčítat převrácená hodnota jejich tuhostí a celková tuhost bude nižší, konkrétně

$$k_{\mathrm{se}} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Tedy pokud aplikujeme tyto poučky, velmi analogické řešení složitějších elektrických obvodů obsahující kondenzátory, získáme výsledek. Pokud si všimneme, že vlevo je v zásadě to samé zapojení, co vpravo, stačí určit jednu stranu a vynásobit ji dvěma.

$$k_{\mathrm{celk}} = \left(\frac{k \cdot 2k}{k + 2k}\right) \cdot 2 = \frac{4}{3} k\,.$$

Celková tuhost zapojení pružin je $4k/3$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha DE ... aby jim výtah dobře Shell

Přes pevnou kladku s poloměrem $R = 30\,\mathrm{cm}$ je v pokoji přehozené homogenní lano hmotnosti $m = 300\,\mathrm{g}$ a délky $L = 4\,\mathrm{m}$. Jeden z visících konců lana je o $L/2$ výše než druhý. Na nižším konci je mimo toho zavěšené závaží vážící $m_1 = 250\,\mathrm{g}$ a na vyšším konci závaží vážící $m_2 = 50\,\mathrm{g}$. Vypočítejte zrychlení této soustavy lana a závaží v násobcích tíhového zrychlení g. Tření neuvažujte. *Xellose irituje chodit do schodů*

Je jasné, jak bude pohyb vypadat – nižší konec s těžším závažím se hýbe dolů (na zamyšlení: pro jaké hmotnosti závaží a lana to tak je?). Hledané zrychlení si označme a.

Ideální přístup je přes energie. Ve směru pohybu působí na soustavu výsledná síla $F = (m + m_1 + m_2)a$; při posunutí o Δx vykoná tato síla práci $W = F\Delta x$.

Při tom se změní potenciální energie soustavy. Závaží 1 se totiž posune o Δx dolů, závaží 2 se posune o Δx nahoru a ještě se kousek lana délky Δx „přesune“ z vyššího konce na nižší. Celková změna potenciální energie je tedy

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = -m_1 g \Delta x + m_2 g \Delta x - \tau \Delta x g \frac{L}{2} = -\left(m_1 - m_2 + \frac{\tau L}{2}\right) g \Delta x\,,$$

kde $\tau = m/L$ je délková hustota lana.

Pro práci a potenciální energii platí z definice $W = -\Delta E_{\mathrm{p}}$, práci totiž koná pouze tíhová síla. Nyní už umíme vyjádřit

$$a = \frac{-\Delta E_{\mathrm{p}}}{(m + m_1 + m_2)\Delta x} = \frac{\left(m_1 - m_2 + \frac{\tau L}{2}\right)}{m + m_1 + m_2} g = \frac{2\,(m_1 - m_2) + m}{2\,(m + m_1 + m_2)} g = \frac{7}{12} g \doteq 0{,}58 g\,.$$

Zrychlení této soustavy bude $0{,}58g$.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha DF ... bolometr říká, že...

Pomocí bolometrů umístěných na družicích Země byla změřena hodnota solární konstanty K, tedy tepelný výkon na jednotkovou plochu přicházející ze Slunce. Určete efektivní povrchovou teplotu Slunce T, známe-li poloměr Slunce R_S a střední vzdálenost středů Země a Slunce r.

Karel se zadíval do Slunce.

Připomeňme si Stefanův-Boltzmannův zákon záření černého tělesa

$$P = \sigma T^4\,,$$

tedy že tepelný výkon vydávaný tělesem na jednotku plochy P závisí na čtvrté mocnině teploty a je úměrný Stefanově-Boltzmannově konstantě. Proč nepíšeme místo P rovnou K? Protože nás zajímá teplota na povrchu Slunce. Na povrchu Slunce by byla naměřená solární konstanta výrazně vyšší. Tedy už bychom tomu právě neměli říkat ani solární konstanta. Zářivý výkon klesá s druhou mocninou vzdálenosti od středu zdroje záření. Proto v našem případě bude platit

$$P = K\frac{r^2}{R_\mathrm{S}^2} = \sigma T^4\,, \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{K}{\sigma}}\sqrt{\frac{r}{R_\mathrm{S}}}\,.$$

Získali jsme tedy efektivní teplotu povrchu Slunce na základě naměřené solární konstanty.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha DG ... je tu volno?

V autobusu je řada dvojsedaček. Lidé si vždy sednou tam, kde je volná celá dvojsedačka, a teprv když už žádná není zcela volná, tak obsazují i zpola zaplněné. Sedaček je g (nutně sudé číslo), lidí $N \leq g$. Kolik celkem existuje možností obsazení autobusu pro N lidí? Nerozlišujeme levou a pravou část sedačky, lidé jsou pro účely výpočtu obsazení identičtí. Jako výsledek uveďte hodnoty pro $g = 40$ a $N = 17$, $N = 22$. *Mirek pravidelně jezdí kvantovými autobusy.*

Řešme nejprve situaci, kdy $N \leq g/2$, tj. dvojsedačka je vnímána lidmi jako jedna sedačka. Jelikož nerozlišujeme, kdo na jaké sedačce sedí, je naším úkolem najít N-prvkové kombinace obsazených sedaček bez opakování. Těchto kombinací je

$$\binom{g/2}{N} = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)!}{\left(\frac{g}{2} - N\right)!N!}\,.$$

Dále si stačí uvědomit, že pro $N > g/2$ se celá situace opakuje. Jelikož totiž nerozlišujeme, zda si první cestující sedne k oknu nebo do uličky, je pro $N = g/2 + 1$ situace stejná jako pro $N = 1$. Pro libovolný počet lidí $N \leq g$ tedy zapíšeme možnosti obsazení šikovně pomocí absolutních hodnot ve tvaru

$$\frac{\left(\frac{g}{2}\right)!}{\left(\left|\frac{g}{2} - N\right|\right)!\left(\frac{g}{2} - \left|\frac{g}{2} - N\right|\right)!}\,.$$

Pro zadané hodnoty g a N dostáváme výsledky 1 140 a 190.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha DH ... nehoda v LEPu

Dříve fungoval v CERNu urychlovač LEP. Jaký výkon předával svazek elektronů z tohoto urychlovače materiálu, pokud byl celý na tento materiál naveden či se vychýlil kvůli poruše magnetů? Průměrný proud je $I = 2\,\mathrm{mA}$, energie elektronů $E_\mathrm{e} = 50\,\mathrm{GeV}$, obvod urychlovače je $o = 27\,\mathrm{km}$. Výkon chceme ve wattech. *Karel si zavzpomínal na Fyziku V.*

Výkon je definovaný jako energie za čas $P = E/t$. Potřebujeme znát ale celkovou energii elektronů $E = NE_\mathrm{e}$, která je dána počtem elektronů N a energií každého z nich. Proto si nejdříve uvědomíme, jak můžeme přepsat elektrický proud

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{Ne}{t}\,,$$

kde Q je náboj, který prochází obvodem, tedy v našem případě urychlovačem. Celkový náboj je dán počtem částic a elementárním nábojem e. Vyjádříme si vhodně poměr N/t a dosadíme do výkonu

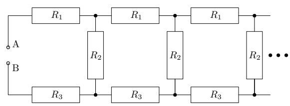
$$\frac{N}{t} = \frac{I}{e}\,, \quad \Rightarrow \quad P = \frac{NE_\mathrm{e}}{t} = \frac{IE_\mathrm{e}}{e} = 100\,\mathrm{MW} = 1{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{W}\,.$$

Výkon částic dopadajících na materiál by byl $1{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{W}$. Mimochodem pokud si uvědomíte, že máme energii jednoho elektronu udanou v elektronvoltech a dělíme nábojem elektronu, není třeba vlastně převádět jednotky, ale vynásobit hodnotu proudu a energie elektronu.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EA ... nekonečná trivka

Jaký bude procházet celkový proud obvodem, zapojíme-li na svorky A a B napětí $U_\mathrm{AB} = 4{,}50\,\mathrm{V}$? Odpory rezistorů jsou $R_1 = 1{,}00\,\Omega$, $R_2 = 2{,}00\,\Omega$ a $R_3 = 3{,}00\,\Omega$. Obvod je nekonečný - opakují se v něm stále opory R_1, R_2 a R_3, jak je naznačeno, dále. *Karel chtěl, aby si účastníci zopakovali nekonečné obvody.*



Chceme znát celkový proud I, který poteče obvodem, tedy

$$I = \frac{U}{R}\,,$$

kde R je celkový odpor nekonečného obvodu. Jak určíme ten? Relativně jednoduše. Stačí předpokládat, že když přidáme ještě jednou skupinu odporů, která se v obvodu opakuje, tak se odpor nesmí změnit. Mohli bychom přidat ty skupiny i dvě či více, ale musíme si dávat pozor na to, abychom přidali přesně to, co se opakuje. Přidání více skupin by pak ale vedlo na složitější rovnici a proto úlohu ponecháme co nejjednodušší. Rovnost si můžeme zapsat jako

$$R = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R} + R_3\,,$$

z níž si budeme chtít vyjádřit R. Dostáváme postupně kvadratickou rovnici.

$$R\,(R_2 + R) = (R_1 + R_3)\,(R_2 + R) + R_2 R\,,$$

$$R^2 - (R_1 + R_3)\,R - (R_1 + R_3)\,R_2 = 0\,.$$

Řešením této rovnice dostáváme dvě řešení, z nichž jedno je záporné, což nám nevyhovuje (odpor má být kladný), takže dostáváme odpor

$$R = \frac{R_1 + R_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_3}{2}\right)^2 + (R_1 + R_3)\, R_2} = 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\ \Omega \doteq 5{,}46\,\Omega\,.$$

Nyní již máme vše potřebné, stačí nám tedy určit proud, který poteče obvodem

$$I = \frac{U}{\frac{R_1+R_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_1+R_3}{2}\right)^2 + (R_1 + R_3)\, R_2}} \doteq 0{,}82\,\mathrm{A}\,.$$

Obvodem poteče celkový proud 0,82 A.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EB ... poslední příhoda pana Kuličky

Mějme například pana Kuličku. Tedy přesněji homogenní kouli o poloměru $r = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Pan Kulička je dobře aproximovatelný dokonale černým tělesem. Okolní teplota prostředí je $t_\mathrm{p} = 5{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Teplota pana Kuličky je zatím $t_\mathrm{K} = 36{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Pan Kulička by ale mohl takhle brzy vychladnout, a proto přišel s masochistickým řešením - zahřeje se na teplotu silné a akutní horečky $t_\mathrm{h} = 42\,^\circ\mathrm{C}$. Jaký bude poměr nového tepelného výkonu záření pana Kuličky P_h vůči původnímu P_K, tedy $\kappa = P_\mathrm{h}/P_\mathrm{K}$? *Karel si říkal, že na TMOU by se hodilo mít topení.*

Organizátoři by rádi věděli, jestli úlohám opravdu rozumíte a proto někteří z nich dávají do zadání zbytečné údaje jako například poloměr pana Kuličky či okolní teplotu. Nicméně nejsou zase až příliš zákeřní. Již v zadání máte informaci, že můžeme pana Kuličku považovat za dokonale černé těleso, pro které, jak víme, platí, že intenzita záření na jeho povrchu je $M = \sigma T^4$, kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a T je termodynamická teplota (tj. v kelvinech). Teploty, které budeme potřebovat, si proto nezapomeneme převést $T_\mathrm{K} \doteq 309\,\mathrm{K}$ a $T_\mathrm{h} \doteq 315\,\mathrm{K}$. Pro celkový výkon koule pak platí $P = S\ M = 4\pi r^2 \sigma T^4$. Zajímá nás poměr dvou výkonů

$$\kappa = \frac{P_\mathrm{h}}{P_\mathrm{K}} = \frac{4\pi r^2 \sigma T_\mathrm{h}^4}{4\pi r^2 \sigma T_\mathrm{K}^4} = \frac{T_\mathrm{h}^4}{T_\mathrm{K}^4} \doteq 1{,}080$$

Okolní teplota nás nezajímá, protože nás zajímá, jak září pan Kulička a ne to, jak on opět záření absorbuje. Samozřejmě, že časem by chladl a blížil by se okolní teplotě, ale možná se opět vrátí zase příští rok. U něj nikdy nevíte.
Odpověď na otázku je tedy, že poměr tepelných výkonů záření pana Kuličky je $\kappa \doteq 1{,}08$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EC ... proton bumbác

Jakou kinetickou energii v eV *získá proton pádem z nekonečné výšky na Zem? Poloměr Země je $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$, hmotnost Země je $M_\mathrm{Z} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ a klidová energie protonu je $m_\mathrm{p}c^2 = 938{,}3\,\mathrm{MeV}$.* *Karel se díval na testy z Fyziky V.*

Potenciální energie protonu je v závislosti na vzdálenosti od středu Země

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{m_\mathrm{p} M_\mathrm{Z}}{r}\,.$$

V nekonečnu bude tedy nulová jak kinetická, tak potenciální energie. Uvažujeme, že se bude zachovávat celková mechanická energie, tedy platí

$$0 = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}\,, \qquad \Rightarrow \qquad E_\mathrm{k} = G\frac{m_\mathrm{p} M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}} \doteq 0{,}65\,\mathrm{eV}\,.$$

Proton by na povrch Země dopadl s kinetickou energií 0,65 eV.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha ED ... přetopeno

Faleš má v doktorandské místnosti počítač s procesorem, který má tepelný výkon při plné zátěži 90 W*. Mezi procesorem a chladícím systémem je měděná destička, která má tloušťku* 3 mm *a průřez* 400 mm^2*. Spočítejte jaký rozdíl teploty u procesoru a teploty u chladícího systému. Tepelná rezistivita mědi je* $\varrho = 2{,}6\,\mathrm{mm{\cdot}K{\cdot}W^{-1}}$. *Falešovi je v doktorandské místnosti horko.*

Chladící systém musí v rovnováze odnést celý výkon procesoru, takže teplený tok $\Phi = 90\,\mathrm{W}$ a je dán jako

$$\Phi = \frac{\Delta T s}{\varrho d}\,,$$

kde s je plocha vodiče tepla a d je jeho tloušťka. Hledaný rozdíl teplot ΔT tedy je

$$\Delta T = \frac{P\varrho d}{s}\,.$$

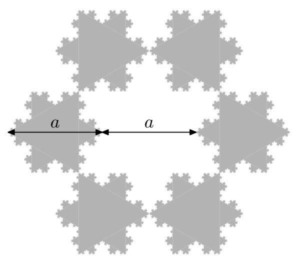
Rozdíl teplot tedy číselně je $\Delta T = 1{,}755\,\mathrm{K}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha EE ... dlážděná

Na ÚTF se pokládala nová dlažba sestávající z Kochových vloček o dvou velikostech a *a* $a\sqrt{3}$*, viz obrázek. Po položení celé podlahy dlaždičům zbyla jedna malá dlaždice, tak si s ní začali házet. Spočítejte moment setrvačnosti této dlaždice, pokud víte, že má hmotnost* m*.*

Lukášovi vadilo, že je Sierpinského trojúhelník nehmotný.



Z obrázku vidíme, že z jedné vločky o velikosti $a\sqrt{3}$ a šesti vloček o velikosti a lze složit vločku o velikosti $3a$. Protože $m \propto a^2$, platí pro moment setrvačnosti malé vločky

$$J = kma^2 = k\bar{\sigma}a^4\,,$$

kde k a $\bar{\sigma}$ jsou konstanty pro Kochovu vločku dané plošné hustoty.

Ze Steinerovy věty, skládání momentů setrvačnosti a výše uvedeného máme

$$k\bar{\sigma}(3a)^4 = k\bar{\sigma}(a\sqrt{3})^4 + 6k\bar{\sigma}a^4 + 6\bar{\sigma}a^2r^2 \,,$$

kde $r = a$ je vzdálenost středů malé a velké vločky, v čehož lze vyjádřit $k = 1/11$, tedy moment setrvačnosti malé vločky je $1/11ma^2$.

Lukáš Timko
`lukast@fykos.cz`

Úloha EF ... konflikt datových formátů

Jak jistě víte, počítače ukládají datum jako nějaké číslo a to nám pak mohou ukázat v nějakém hezčím formátu. Například Excel za den číslo 1 považuje 1. 1. 1900. Přesněji uvažujme, že 1,0 *je 1. 1. 1900 v 0:00. Jaký den máme podle Excelu dnes? Chceme výsledek s přesností na jedno desetinné místo. Nápověda: Excel považuje za přestupný rok i rok 1900, který správně být přestupný nemá. Rok 2000 považuje pak správně za přestupný.*

Karel se nechal inspirovat formátem data v Excelu.

Soutěží se 17. 2. 2017, což znamená, že uběhlo celých 117 let, celý leden a část února od začátku počítání tohoto formátu. Nepřestupný rok má 365 dnů, takže 42 705 získáme za roky, kdy neuvažujeme přestupné. Přestupný rok je jednou za 4 roky. Správněji by měla platit výjimka, že letopočty končící 00 budou přestupné pouze, pokud jsou dělitelné 400. Nicméně Excel to bere každý 4. rok. Takže první přestupný je 1900. Když vydělíme 117 čtyřmi, dostáváme po zaokrouhlení dolů 29, což je počet dalších přestupných roků po 1900, které proběhly. Dohromady máme již den 42 735, což by bylo 1. ledna tohoto roku. Přičteme 31 dnů za leden a 17 za únor. Dostáváme 42 783, což je dnešní den. Vzhledem k tomu, že odpověď chceme na jedno desetinné místo, záleží správná odpověď na tom v kolik hodin chcete úlohu odevzdat. Soutěž má probíhat od 10:20 do 13:20. Pokud chcete odevzdat úlohu před 10:48, pak je správná odpověď 42 783,4, pokud od 10:48 do 13:12, pak máte odpovědět 42 783,5 a později do konce soutěže 42 783,6.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EG ... Milikanův experiment

Pomocí Milikanova experimentu byla určena velmi přesná hodnota elementárního náboje. V experimentálním nastavení se měří rychlosti nabitých kapiček oleje o hmotnosti m a hustotě ϱ_k, které se pohybují vertikálně mezi dvěma elektrodami. Tyto elektrody vytváří elektrické pole E, které střídavě míří směrem nahoru a dolů; kapičky se pak pohybují ve směru elektrického pole. Za předpokladu, že znáte rychlosti v_1, v_2 kapiček pro oba směry elektrického pole, spočítejte náboj q na jedné kapičce. Uvažujte, že hustota vzduchu je ϱ_{vz}, jeho vztlak není zanedbatelný a odporová síla je $F_{\mathrm{t}} = 6\pi\eta rv$, kde η je dynamická viskozita vzduchu a r poloměr kapičky, který ovšem neznáte.

Verča vzpomínala na praktika.

Na kapičku působí několik sil – směrem dolů tíhová síla $F_g = 4/3\pi r^3\varrho g$, směrem vzhůru vztlaková síla $F_{\mathrm{vz}} = 4/3\pi r^3\varrho_{vz}g$, proti směru pohybu kapičky odporová síla pro $F_{\mathrm{t}} = 6\pi\eta rv$, a směrem k aktuální anodě působí elektrická síla $F_{\mathrm{e}} = |q|E$. Je-li kapka přitahována k dolní elektrodě, získá rovnovážnou rychlost v_1 splňující rovnici

$$\frac{4}{3}\pi r^3\varrho g + |q|E = \frac{4}{3}\pi r^3\varrho_{\mathrm{vz}}g + 6\pi\eta rv_1 \,.$$

Pokud obrátíme polaritu elektrod, bude se pohybovat směrem vzhůru s rychlostí v_2 splňující

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g + 6\pi\eta r v_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\mathrm{vz}} g + |q|E\,.$$

Sečtením, resp. odečtením, obou rovnic dostaneme vztah pro poloměr, resp. náboj, kapičky

$$r^2 = \frac{9\eta\left(v_1 - v_2\right)}{4g\left(\varrho - \varrho_{\mathrm{vz}}\right)}\,,$$
$$|q| = 3\pi\eta r\frac{v_1 + v_2}{E}\,,$$

ze kterých můžeme určit náboj kapičky

$$|q| = 3\pi\eta\frac{v_1 + v_2}{E}\sqrt{\frac{9\eta\left(v_1 - v_2\right)}{4g\left(\varrho - \varrho_{\mathrm{vz}}\right)}}\,.$$

Veronika Dočkalová
verca@fykos.cz

Úloha EH ... nehoda v LEPu podruhé

Dříve fungoval v CERNu urychlovač LEP. Jaká byla celková energie jeho svazku? Průměrný proud byl $I = 2\,\mathrm{mA}$, *energie elektronů* $E = 50\,\mathrm{GeV}$, *obvod urychlovače byl* $o = 27\,\mathrm{km}$. *Energii chceme v kilokaloriích* $1\,\mathrm{kcal} = 1\,\mathrm{Cal} = 4\,200\,\mathrm{J}$. *Karel si zavzpomínal na Fyziku V.*

Věříme, že jste potkali úlohu „nehoda v LEPu“ a tak již víte, že výkon urychlovače je

$$P = \frac{NE_{\mathrm{e}}}{t} = \frac{IE_{\mathrm{e}}}{e} = 100\,\mathrm{MW} = 1{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{W}\,.$$

Kinetická energie elektronů je výrazně vyšší než energie odpovídající jejich klidové hmotnosti, a tak můžeme předpokládat, že se pohybují prakticky rychlostí světla $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. To znamená, že pokud se svazek vychýlí a začne dopadat s uvedeným výkonem na nějaký terč, pak doba, po kterou bude dopadat bude $T = o/c$, tedy celková energie svazku bude

$$E_{\mathrm{s}} = PT = \frac{IE_{\mathrm{e}}o}{ec} = 9\,000\,\mathrm{J} = 9{,}0\,\mathrm{kJ} \doteq 2{,}1\,\mathrm{kcal}\,.$$

Celková energie ve svazku byla zhruba 2,1 kcal.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FA ... nelineární kondenzátor 2

V obvodě je zapojený nelineární kondenzátor, jehož kapacita závisí na napětí na něm přivedeném podle vztahu $C(U) = \frac{k}{U_0 - U}$. *Kondenzátor je zapojený do sériového obvodu s rezistorem o odporu* R *a zdrojem stejnosměrného proudu. Napětí zdroje je* U_0. *Vypočítejte čas* t *po zapnutí zdroje, za které naroste napětí na kondenzátoru na hodnotu* $U_0/2$.

Xellos upravil úlohu a nestydí se za to ani podruhé.

Náboj na kondenzátoru je $Q = CU_\mathrm{C}$. Proud procházející obvodem je jeho časová derivace $I = \dot{Q}$. Na rezistoru je napětí $U_\mathrm{R} = IR$. Z 2. Kirchoffova zákonu dostáváme diferenciální rovnici

$$U_0 = U_\mathrm{C} + \dot{Q}R = U_\mathrm{C} + \frac{\mathrm{d}(CU_\mathrm{C})}{\mathrm{d}U_\mathrm{C}}\dot{U}_\mathrm{C}R$$
$$= U_\mathrm{C} + \frac{kU_0}{(U_0 - U_\mathrm{C})^2}\dot{U}_\mathrm{C}R\,,$$

respektive pomocí rozdílu napětí $u = U_0 - U_\mathrm{C}$

$$u^3 = -kU_0R\dot{u}\,.$$

Integrováním dostaneme

$$t = -\int_{U_0}^{U_0/2} \frac{kU_0R}{u^3}\mathrm{d}u = \frac{3kR}{2U_0}\,.$$

Všimněte si z integrálu, že napětí U_0 nebude dosažené v konečném čase.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha FB ... pružná voda z vesmírné stanice

Koule vody v klidu ve vzduchu ve stavu beztíže (například na Mezinárodní vesmírné stanici) je vyrušena šťouchnutím. Šťouchnutí rozpohybuje těžiště vodního útvaru rychlostí $2\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ a způsobí v něm objem zachovávající oscilace mezi tvarem zploštělého a protáhlého elipsoidu. Oscilace jsou takové, že oproti svému původnímu poloměru se vodní útvar protáhne nejvíc o 10 %.

Jakou celkovou kinetickou energii předalo šťouchnutí kouli vody? Plocha protáhlého elipsoidu o hlavních poloosách $a = b$ (kratší) a c (delší) je pro malé protažení přibližně $S = 4\pi a^2(1 + 2c/a)/3$. Objem vody je $V_0 = 500\,\mathrm{ml}$, její hustota $\varrho = 0{,}998\,\mathrm{kg\cdot l^{-1}}$ a její povrchové napětí při daných podmínkách $\sigma = 72{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. *Vojta sledoval videa ISS na jůtůb.*

Kinetická energie translačního pohybu těžiště útvaru je $T_\mathrm{tr} = \varrho V_0 v^2/2 = 99{,}8\,\mathrm{\mu J}$.

Když si uvědomíme, že při maximálním protažení se kmit zastaví a elipsoid se pak zase začne zplošťovat, zjistíme, že všechna energie oscilace musí být v okamžik maximálního protažení v povrchovém napětí, tj. $T_\mathrm{osc} = E_\mathrm{max} = \sigma\Delta S_\mathrm{max}$, kde ovšem musíme odečítat původní povrchové napětí koule před šťouchnutím. Lze snadno ověřit, že v případě koule je $S_0 = \sqrt[3]{36\pi V_0^2}$. Ze zachování objemu víme, že

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi a^2 c = \frac{4}{3}\pi r_0^3\,,$$

kde r_0 je původní poloměr vodní koule. Pro maximálně prodloužený elipsoid také platí $c_{\,\mathrm{max}} = 1{,}1 r_0$ a ze zachování objemu tedy získáme $a = r_0/\sqrt{1{,}1}$.

Aplikací přibližného vztahu pro povrch elipsoidu získáváme

$$S_\mathrm{max} = \frac{4}{3\cdot 1{,}1}\pi r_0^2\left(1 + 2(1,1)^{3/2}\right) = \frac{S_0}{3{,}3}\left(1 + 2(1{,}1)^{3/2}\right)\,.$$

Pro změnu povrchu tedy po úpravě dostáváme

$$\Delta S = \frac{\sqrt[3]{36\pi V_0^2}}{3{,}3}\left(1 + 2(1{,}1)^{3/2} - 3{,}3\right)\,.$$

Po dosazení V_0 ve správných jednotkách a vynásobením σ dostáváme $T_{\mathrm{osc}} \doteq 4{,}97\,\mathrm{\mu J}$ a po sečtení s energií translačního pohybu dostáváme po zaokrouhlení na správný počet cifer celkovou kinetickou energii $T \doteq 105\,\mathrm{\mu J}$.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Úloha FC ... asteroidové pole

Představme si, že máme pole asteroidů takové, že se v něm vyskytují asteroidy rovnoměrně, co se týče jejich poloměrů od nulového až do nějakého maximálního poloměru $r_{\max}$. Jaký podíl hmotnosti z celkové hmotnosti asteroidového pole bude v $\delta = 10\,\%$ největších asteroidech? Všechny mají stejnou hustotu a je jich velice mnoho.

Karel se zamýšlel nad asteroidy a pravděpodobností.

Vzhledem k tomu, že nemáme zadané, kolik je v asteroidovém poli kusů asteroidů, předpokládáme, že jich je velice mnoho a budeme využívat integrální přístup. Kdybychom znali konečný počet asteroidů, tak bychom mohli počítat sumy, ale pro velký počet by byl výsledek prakticky stejný. Jak jsme zmínili, budeme integrovat, i když nakonec uvidíte, že výsledek by měl být zjistitelný i logickou úvahou.

Dále chceme určit hmotnost části pole. Pro tu platí $m = \varrho V$. Hustota je v celém poli stejná, takže stačí určit poměr objemů δ nejtěžších asteroidů. Objem jednoho asteroidu v závislosti na jeho poloměru je

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Uvažujme nyní nad tím, jaký bude celkový objem asteroidů v poli. Pokud bychom se zajímali o celkovou délku jejich poloměrů, při rovnoměrně rozloženém poloměru, integrovali bychom

$$r_{\mathrm{celk}} = \int_0^{r_{\max}} kr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}kr^2\,,$$

kde k je nějaká konstanta úměrnosti. Pokud bychom se zajímali jenom o nějakou část poloměrů, budeme integrovat od nějakého $r_{\min}$. Totéž tedy můžeme analogicky provést pro objem v našem případě, tedy $\delta = 10\,\%$ nejtěžších a největších bude mít objem

$$V_\delta = K\ 4\pi \int_{(1-\delta)r_{\max}}^{r_{\max}} r^3\mathrm{d}r = K\pi\left[r^4\right]_{r=(1-\delta)r_{\max}}^{r_{\max}} = K\pi\left(1-(1-\delta)^4\right)r_{\max}^4\,.$$

Podíl hmotnosti, který bude mít δ nejtěžších asteroidů v pásu, bude

$$\Delta = \frac{m_\delta}{m} = \frac{V_\delta}{V} = 1-(1-\delta)^4 \doteq 34{,}4\,\%\,.$$

$10\,\%$ nejtěžších asteroidů v pásu, kde je rovnoměrné rozdělení jejich poloměrů od nulového po nějaký konečný maximální, bude mít hmotnost $34{,}4\,\%$ z celkové hmotnosti pásu.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FD ... dutoplaneta

Představme si, že bychom měli planetu, která by byla tvořena pouze tenkou velice hustou ale homogenní krustou. Jaké by bylo gravitační zrychlení a_g v blízkosti nad jejím povrchem? Planeta má poloměr R. Plošná hustota krusty je σ. Gravitační konstantu značíme G.

Karel měl přednášku o gravitaci.

Buď začneme nějak zuřivě integrovat, nebo si spíš vzpomeneme na poučku, že nad povrchem sféricky symetricky rozložené hmoty bude gravitační interakce fungovat stejně jako u hmotného bodu, který by byl umístěný ve středu takového sféricky symetricky rozloženého objektu a který by měl stejnou hmotnost. Gravitační zrychlení ve vzdálenosti R od hmotného bodu hmotnosti M je

$$a_g = \frac{GM}{R^2}\,.$$

Hmotnost krusty bude její plocha krát plošná hustota, tedy

$$M = S\sigma = 4\pi R^2\sigma\,.$$

Gravitační zrychlení těsně nad povrchem bude tedy

$$a_g = \frac{G4\pi R^2\sigma}{R^2} = 4\pi\sigma G\,.$$

Zjistili jsme tedy, že gravitační zrychlení nebude záviset na poloměru naší planety, pokud se zajímáme o zrychlení těsně nad jejím povrchem, a že závisí jenom na konstantách G a σ. Stejný výsledek bychom dostali i kdybychom počítali přes Gaussův zákon.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FE ... chyba drátu

Chceme stanovit elektrický odpor drátu o délce $l = 1\,\mathrm{m}$, kterou jsme schopni změřit s maximální chybou $\Delta l = 1\,\mathrm{mm}$. Drát má kruhový průřez a maximální chyba měření tloušťky drátu je $\Delta d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$. Jaká musí být tloušťka drátu, abychom byli schopni detekovat relativní změnu odporu drátu o $5\,\%$?

Karel si zavzpomínal na Úvod do praktické fyziky.

Odpor drátu délky l, kruhového průřezu $S = \pi d^2/4$ a rezistivity ϱ je

$$R = \varrho\frac{l}{S} = \frac{4\varrho}{\pi}\frac{l}{d^2}\,.$$

Vidíme, že máme veličiny v součinu a proto se nám pro určení maximální chyby budou sčítat relativní chyby jednotlivých veličin, tedy relativní chyba odporu bude

$$\delta R = \delta l + 2\delta d\,,$$

kde $\delta l = \Delta l/l = 0{,}1\,\%$ a $\delta d = \Delta d/d$. Chceme aby maximální relativní chyba byla menší než $\eta = 5\,\%$, tedy počítáme

$$\eta > \delta R = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d}\,,$$

$$2\frac{\Delta d}{d} < \eta - \frac{\Delta l}{l}\,,$$

$$d > 2\frac{\Delta d}{\eta - \frac{\Delta l}{l}} \doteq 4{,}1\,\mathrm{mm}\,.$$

Tloušťka drátu musí být větší než 4,1 mm, aby byla změna odporu detekovatelná.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FF ... korigované kyvadlo

Mějme kyvadlo délky $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$. Závěs můžeme aproximovat jako nehmotný. Na konci vlákna je upevněná dřevěná kulička s poloměrem $r = 1{,}00\,\mathrm{cm}$. Uvažujme, že uvedená délka závěsu je od místa otáčení do těžiště připevněné kuličky. Hustota dřeva je $\varrho = 720\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jakou chybu v době malých kmitů kyvadla způsobíme tím, že nebudeme uvažovat rozměry kuličky a to, že je ve vzduchu o hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}30\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$? Přesněji řečeno, zajímá nás $\frac{|T_\mathrm{k}-T|}{T_\mathrm{k}}$, kde T_k je korigovaná doba kmitu fyzického kyvadla na hustotu vzduchu a rozměry kuličky a T je nekorigovaná doba kmitu matematického kyvadla délky l. Kmit fyzického kyvadla má dobu $T_\mathrm{f} = 2\pi\sqrt{J/D}$, kde J je moment setrvačnosti a D je direkční moment – moment síly působící na kyvadlo.

Karel si vzpomněl na zábavné časy strávené v praktiku.

Doba kmitu matematického kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

kde l je délka matematického kyvadla a g je tíhové zrychlení v místě provádění experimentu. g ani nebudeme potřebovat, protože se nám ve výsledku zkrátí, protože se zajímáme pouze o poměr dvou dob kmitu.

Moment setrvačnosti fyzického kyvadla s použitím Steinerovy věty a známého momentu setrvačnosti koule $2mr^2/5$ je

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2\,,$$

kde hmotnost je $m = \varrho V$. Tedy v tomto členu se neuplatňuje vztlak způsobený ponořením kyvadla do tekutiny, v našem případě vzduchu.

Direkční moment bude $D = \bar{m}lg$, kde se tentokrát ale již uplatní to, že nerealizujeme experiment ve vakuu a že působí vztlak tekutiny. (Odpor vzduchu můžeme pro malé kmity zanedbat.) Půjde tedy místo hmotnosti o redukovanou hmotnost $\bar{m} = (\varrho - \varrho_\mathrm{v})\,V$.

Celkově dostáváme pro dobu kmitu našeho fyzického kyvadla

$$T_\mathrm{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\varrho V r^2 + \varrho V l^2}{(\varrho - \varrho_\mathrm{v})\,Vlg}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}}}\sqrt{\frac{2}{5}\frac{r^2}{lg} + \frac{l}{g}}\,.$$

Z vyjádření vidíme, že korigovaná doba kmitu kyvadla bude o něco větší než u matematického kyvadla. Nyní tedy nezbývá než vyjádřit požadovaný poměr, který nazvěme δT

$$\delta T = \frac{T_\mathrm{k} - T}{T_\mathrm{k}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}}}\sqrt{\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + \frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{1}{1-\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}}}\sqrt{\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + \frac{l}{g}}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}}\sqrt{\frac{l^2}{\frac{2}{5}r^2 + l^2}}\,,$$

což je hodně dlouhé vyjádření, do kterého by se mělo dosadit. Takže možná pro zadávání na kalkulačkách by bylo vhodné provést Taylorův rozvoj, vzhledem k tomu, že obě korekce budou relativně malé. Využijeme vztahů $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ a $\sqrt{1/(1+x)} \approx 1 - x/2$

$$\delta T = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}}} \approx 1 - \left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{2\varrho}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\frac{r^2}{l^2}\right) \approx \frac{\varrho_\mathrm{v}}{2\varrho} + \frac{1}{5}\frac{r^2}{l^2} \doteq 0{,}092\,\% \,.$$

Vyšlo nám tedy, že dobu kmitu použitím jednoduchého vzorce pro matematické kyvadlo změníme méně než o jednu desetinu procenta. Pokud bychom dosadili do složitějšího vyjádření před provedení Taylorova rozvoje, tak bychom dostali na dvě platné cifry shodný výsledek. Mimochodem šlo o hustotu dřeva kanadského javoru, ale potřebovali jsme zkrátit zadání kvůli QR kódu, tak si to přečtou jenom ti, co si čtou pak řešení až do konce.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha FG ... magnetické škrtidlo

Mějme v jedné rovině dva vodiče. Jednak smyčku, která je ve tvaru obdélníku o stranách $a = 1\,\mathrm{m}$ *a* $b = 3\,\mathrm{m}$. *Podél delší z obou stran pak ve vzdálenosti* $l = 1\,\mathrm{cm}$ *rovnoběžně s ní běží další vodič, kterým probíhá proud* $I = 1\,\mathrm{kA}$. *Rezistance smyčky je* $R = 1\,\Omega$, *induktance je zanedbatelná. Spočtěte magnetický tok* Φ *skrz smyčku. Permeabilita je* $\mu = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$.

Falešovi přeskočilo – elektrické pole.

Magnetický tok spočítáme vyintegrováním magnetické indukce B přes celou smyčku, symbolicky

$$\Phi = \int_l^{l+a} Bb\,\mathrm{d}x \,.$$

Abychom mohli provést tento výpočet, potřebujeme znát indukované magnetické pole. To je dáno jako

$$B = \frac{\mu I}{2\pi x} \,,$$

kde x je vzdálenost od vodiče s proudem a μ je permeabilita.

Po dosazení již můžeme integrovat, dostaneme

$$\Phi = \frac{b\mu I}{2\pi} \ln \frac{l+a}{l} \,.$$

Číselně pak máme $\Phi = 2{,}78\,\mathrm{mWb}$.

Aleš Flandera
flandera.ales@fykos.cz

Úloha FH ... nepříjemná propast

Máme nekonečnou tenkou desku s plošnou hustotou $\sigma = 1{,}17 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ *a v ní velmi malou dírku. Do dírky svisle hodíme kámen rychlostí* $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Vrátí se kámen v konečném čase zpátky? Pokud ano, za jaký čas se to stane?*

Xellos hrál Fish Fillets.

Deska je nekonečná, proto bude intenzita gravitačního pole v každém bodě záviset pouze na vzdálenosti tohoto bodu od desky a bude směřovat kolmo na desku. Aplikujme Gaussův zákon pro válec, jehož středem prochází deska rovnoběžně s podstavami; plocha každé podstavy je S. Tok intenzity gravitačního pole pláštěm válce je nulový, intenzita E na podstavách je na ně kolmá a konstantní, proto platí

$$2SE = 4\pi GS\sigma \quad \Rightarrow \quad E = 2\pi G\sigma\,,$$

čili kámen bude přitahovaný k desce konstantním zrychlením $a = E = 2\pi G\sigma$ a je jasné, že se vrátí. Celkový čas letu je potom

$$T = \frac{2v}{a} = \frac{v}{\pi G\sigma} \doteq 4{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Kámen se vrátí za 4,1 s.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha GA ... rovný děj

S ideálním dvouatomovým plynem probíhá děj po přímce v T-V diagramu mezi body $(T_0, 0)$ a $(0, V_0)$. Jaká bude molární tepelná kapacita plynu při tomto ději v bodě $(T_0/4, 3V_0/4)$?

Xellos rád vykrádá úlohy.

Tepelná kapacita plynu s látkovým množstvom n je definovaná ako $Q/\Delta T$, kde ΔT je zmena teploty pri dodaní malého tepla Q. Z 1. termodynamického zákona vieme $Q = W + \Delta U$; $W = p\Delta V$ je práca vykonaná plynom pri dodaní tepla a expanzií o objem ΔV, ΔU je zmena vnútornej energie. Pre dvojatómový plyn vieme zmenu vnútornej energie vyjadriť pomocou mernej tepelnej kapacity pri konštantnom objeme $c_\mathrm{V} = 5R/2$: $\Delta U = 5/2nR\Delta T$. Vieme tiež vyjadriť zmenu objemu, rovnica rovného deja je totiž $V = V_0(1 - T/T_0)$, a teda $\Delta V = -\frac{V_0}{T_0}\Delta T$. Ostáva vyjadrit tlak plynu zo stavovej rovnice: $pV = nRT$, teda v danom bode $p = nRT_0/3V_0$. Tepelná kapacita výjde $-pV_0/T_0 + 5/2nR = \frac{13}{6}nR$, molárna tepelná kapacita je teda $\frac{13}{6}R = 2{,}167\,R = 18{,}0\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha GB ... uhlíkové stáří

Vzorek, ve kterém je $m = 12\,\mathrm{g}$ uhlíku, původně ze živého organismu, vykazuje aktivitu 36 rozpadů za minutu $A = 36\,\mathrm{min^{-1}}$. Jak je starý? Experimentálně určené relativní zastoupení uhlíku $^{12}\mathrm{C}$ a $^{14}\mathrm{C}$ v živých organizmech je $k = \frac{N_{^{14}\mathrm{C}}}{N_{^{12}\mathrm{C}}} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-12}$. Poločas rozpadu izotopu $^{14}\mathrm{C}$ je $T = 5\,730\,\mathrm{let}$. Uhlík $^{12}\mathrm{C}$ je stabilní. Úbytek hmotnosti vzorku vlivem radioaktivního rozpadu neuvažujte.

Karel si četl Jádra a částice od Noska.

Měrná aktivita vzorku uhlíku v živém organismu je

$$a_0 \approx \frac{\ln 2}{T} k \frac{N_\mathrm{A}}{M_{^{12}\mathrm{C}}} \approx 250\,\mathrm{Bq\cdot kg^{-1}}\,,$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a $M_{^{12}\mathrm{C}}$ molární hmotnost uhlíku $^{12}\mathrm{C}$.

Vzhledem k tomu, že náš vzorek je mrtvý, a tak se prostřednictvím dýchání do něj nedostává další uhlík $^{14}\mathrm{C}$, tak jeho aktivita klesla. Jeho současná měrná aktivita je

$$a = \frac{A}{m} = 50\,\mathrm{Bq{\cdot}kg^{-1}}\,.$$

Měrná aktivita s časem t klesá jako

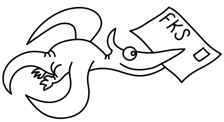
$$a = a_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

z čehož si vyjádříme t a dosadíme za λ

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a_0}{a} = \frac{T}{\ln 2} \ln \left(\frac{\ln 2}{T} k \frac{N_\mathrm{A}}{M_{^{12}\mathrm{C}}} \frac{1}{a} \right) \doteq 1{,}33 \cdot 10^4\,\mathrm{let}\,.$$

Vzorek je starý zhruba 13 300 let.

Karel Kolář
karel@fykos.cz



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.