Úloha II.S ... odhadnutelná

10 bodů; průměr 7,17; řešilo 35 studentů

a) *Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu slouží intervalový odhad střední hodnoty v normálním rozdělení a uveďte jeho fyzikální interpretaci (postačí vlastními slovy popsat následující: fyzikální interpretace odhadu střední hodnoty, rozdíl mezi (bodovým) odhadem a intervalovým odhadem, nejdůležitější vlastnost intervalového odhadu, metoda zkráceného zápisu intervalového odhadu, nejistota měření). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.*

b) *V přiloženém datovém souboru* mereni1.csv *najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny (uvažujte nejistotu typu B $s_{\mathrm{B}} = 0{,}1$). Zkonstruujte z těchto dat bodový i intervalový odhad měřené fyzikální veličiny a krátce interpretujte jejich význam.*

c) *Předpokládejme, že měříme určitou fyzikální veličinu a víme, že vlivem použité metody měření budou mít naměřená data rozptyl rovný konstantě c (nejistotu typu B neuvažujte). Kolik musíme přibližně provést měření, abychom dosáhli nejistoty měření menší než s?*

d) *V přiloženém datovém souboru* mereni2.csv *najdete data měření stejné fyzikální veličiny dvěma různými způsoby (nejistotu typu B neuvažujte). U které metody byla použitá měřicí aparatura přesnější? Který způsob měření dal přesnější výsledek měření? U obou otázek své závěry i stručně zdůvodněte.*

Bonus *Zkuste odvodit, že v normálním rozdělení je výběrový rozptyl nestranným odhadem skutečného rozptylu (tj. střední hodnota výběrového rozptylu je rovna skutečnému rozptylu). Pro řešení tohoto úkolu můžete použít libovolné zdroje (pokud je budete řádně citovat).*

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. *Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka* R. *Michal se snažil odhadnout nejoptimálnější zadání, snad se mu to povedlo.*

a) Detailní odpověď na tuto otázku dostanete přečtením 2. dílu seriálu, na tomto místě si vysvětlíme jen ty opravdu nejdůležitější pojmy. V nejjednodušším matematickém modelu se výsledek jednoho měření určité fyzikální veličiny považuje za náhodnou veličinu, která má normální rozdělení a jejíž střední hodnota je rovna skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny. Znamená to, že předpokládáme, že neexistuje žádný systematický posun měřených hodnot oproti skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny (případně se s takovýmto systematickým posunem vypořádáváme jinak). Odhadování střední hodnoty z realizací náhodné veličiny (tedy z naměřených dat) je vlastně odhadování skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny.

Hodnotu měřené fyzikální veličiny nejsme nikdy schopni odhadnout přesně. Proto si definujeme dva typy odhadů: bodový odhad a intervalový odhad. Bodový odhad střední hodnoty je číslo, které na základě naměřených dat nejlépe odhaduje skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny (v případě normálně rozdělené náhodné veličiny je to výběrový průměr). Protože je bodový odhad nepřesný, ve většině případů si s ním nevystačíme a musíme zkonstruovat ještě intervalový odhad. Intervalový odhad je interval, který s nějakou předem zvolenou pravděpodobností pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny. Intervalový odhad nám navíc oproti bodovému odhadu dává i jistou informaci o tom, jak přesně jsme měřenou veličinu změřili.

V případě normálního rozdělení má intervalový odhad tvar

$$\left(\overline{x_n} - t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_{\mathrm{K}}, \overline{x_n} + t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_{\mathrm{K}}\right),$$

kde $\overline{x_n}$ je výběrová střední hodnota (výběrový průměr), s_K je kombinovaná nejistota měření a $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil Studentova rozdělení. Jeho nejdůležitější vlastnost je ta, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny.
Takovýto intervalový odhad se velmi často zkráceně zapisuje jen jako

$$(\overline{x_n} \pm s_\mathrm{K})\,.$$

Tuto zkrácenou formu zápisu můžeme vnímat tak, že pokud zvolíme hladinu spolehlivosti rovnou 0,68 (tedy $\alpha = 0{,}32$) a máme dostatečný počet měření (alespoň 30), potom se intervalový odhad zkrátí právě na tento zápis (díky tomu, že pro tyto hodnoty α a n platí $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \doteq 1$). Případně z této zkrácené formy zápisu lze jednoduše přidáním příslušného kvantilu vyrobit intervalový odhad o jiné hladině spolehlivosti.
Nejistota měření (kombinovaná) je právě člen s_K. Vznikne jako kvadratický součet nejistoty typu A a nejistoty typu B

$$s_\mathrm{K} = \sqrt{s_A^2 + s_B^2}\,,$$

kde nejistota typu A je nejistota vyplývající z náhodnosti měřených dat (je přesně rovna výběrové směrodatné odchylce průměru) a nejistota typu B je nejistota plynoucí z ostatních příčin (hlavně nepřesnosti měřidla). Kombinovaná nejistota vyjadřuje jak přesně jsme měřenou fyzikální veličinu změřili. Při fyzikálních experimentech je cílem mít co možná nejmenší kombinovanou nejistotu měření (tj. mít fyzikální veličinu změřenu co možná nejpřesněji).

b) V přiloženém datovém souboru se nachází 42 měření určité fyzikální veličiny. Jako první spočteme výběrovou střední hodnotu (výběrový průměr) podle vzorce

$$\overline{x_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

V našem konkrétním příkladě po dosazení dostáváme

$$\overline{x_n} = \frac{1}{42}\sum_{i=1}^{42} x_i \doteq 42{,}1\,.$$

Toto je náš bodový odhad měřené fyzikální veličiny.
Pro konstrukci intervalového odhadu nejprve spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku podle vzorce

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_n})^2}\,.$$

V našem konkrétním případě dostáváme

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{41}\sum_{i=1}^{42}(x_i - 41{,}1)^2} = 1{,}7\,.$$

Následně spočteme výběrovou směrodatnou odchylku průměru (tedy nejistotu typu A) podle vzorce

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,.$$

V našem konkrétním případě dostáváme

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{42}} \doteq 0{,}27\,.$$

Nyní musíme vyjádřit kombinovanou nejistotu měření podle vzorce

$$s_\mathrm{K} = \sqrt{s_\mathrm{A}^2 + s_\mathrm{B}^2}\,,$$

kde s_A, s_B jsou nejistoty měření typu A a typu B. V našem konkrétním případě dostáváme

$$s_\mathrm{K} = \sqrt{0{,}27^2 + 0{,}1^2} \doteq 0{,}29\,.$$

Na tomto místě už můžeme zkonstruovat intervalový odhad, který bude mít tvar

$$\left(42{,}1 - t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} 0{,}29, 42{,}1 + t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} 0{,}29\right), \tag{1}$$

kde za α můžeme dosadit podle požadované hladiny spolehlivosti. Intervalový odhad zapíšeme standardním zkráceným zápisem jako

$$(42{,}1 \pm 0{,}3)\,.$$

Interpretace bodového odhadu měřené fyzikální veličiny je, že je to na základě naměřených dat nejlepší odhad skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny. Interpretace intervalového odhadu (1) je, že pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny tímto intervalem je 68 %.

c) Pokud neuvažujeme nejistotu měření typu B, potom kombinovaná nejistota měření bude rovna pouze nejistotě typu A. Nejistota měření typu A je rovna výběrové směrodatné odchylce průměru, která je vyjádřena vztahem

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,.$$

Na tomto místě si musíme uvědomit, že výběrová směrodatná odchylka S_n je odhadem skutečné směrodatné odchylky a pro velký počet měření bude její hodnota velmi blízká právě skutečné směrodatné odchylce. Skutečná směrodatná odchylka je ale rovna odmocnině skutečného rozptylu. Proto bude platit

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{c}{n}}\,.$$

Podmínka v úloze je, aby byla tato nejistota měření menší než nějaká konstanta s, řešíme tedy nerovnici

$$\sqrt{\frac{c}{n}} < s\,.$$

Tuto nerovnici můžeme pomocí jednoduchých algebraických úprav (s využitím znalosti toho, že obě strany nerovnice mají nezápornou hodnotu) vyřešit. Získáme podmínku

$$\frac{c}{s^2} < n\,.$$

Vidíme tedy, že musíme provést alespoň přibližně $\frac{c}{s^2}$ měření.

Tab. 1: Základní popisné statistiky pro data pocházející z obou metod měření

	n	S_n^2	S_n	s_n	$\overline{x_n}$
metoda 1	100	6,46	2,54	0,25	9,97
metoda 2	10	3,62	1,90	0,60	10,03

d) S využitím výpočetního prostředí *R* můžeme stejným postupem, jaký jsme využili v bodu *b)*, vypočítat výběrovou střední hodnotu, výběrový průměr, výběrovou směrodatnou odchylku a výběrovou směrodatnou odchylku průměru (tj. nejistotu měření typu A) pro data pocházející z obou metod měření. Nebudeme už jednotlivě ukazovat dosazování do vzorců, jen uvedeme, že výsledky můžeme vidět v tabulce 1.

Jak je vidět z tabulky, obě metody měření vedou na velmi podobný bodový odhad skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny. Výběrový rozptyl pro první metodu měření je výrazně větší než pro druhou metodu měření. Toto ukazuje, že měřicí aparatura a postup měření, který byl použit u první metody měření, byl méně přesný. Na druhou stranu je ale vidět, že výběrová směrodatná odchylka průměru (která v tomto případě vyjadřuje kombinovanou nejistotu měření neboť nejistotu typu B neuvažujeme) je výrazně větší pro data pocházející z druhé metody měření. Přesněji jsme tedy měřenou fyzikální veličinu naměřili první metodou měření. Na tomto místě je důležité uvědomit si rozdíl mezi přesností měřicí aparatury a výslednou kombinovanou nejistotou měření, ta je totiž (jako v tomto případě) výrazně ovlivněna počtem provedených měření. Tedy i s méně přesnou měřicí aparaturou lze změřit přesnější výsledek, pokud provedeme více měření.

Jako poznámku na závěr by se slušelo zmínit, že pro co nejpřesnější určení měřené fyzikální veličiny by bylo v tomto případě optimální zkombinovat data naměřená pomocí obou metod. To ale zatím neumíme, dozvíme se to až v příštím díle seriálu.

Bonus: Tato úloha je v podstatě jednoduchá, jen je potřeba nezaleknout se poněkud ošklivějších výrazů a neztratit se v algebraických operacích. Budeme v podstatě jen počítat střední hodnotu náhodné veličiny.

V rámci algebrainckých úprav vzniklého výrazu budeme využívat několik vztahů, které nebyly uvedeny v textu seriálu neboť se tam nevešly. Vaším úkolem bylo nastudovat si je. My je zde pro jistotu všechny uvedeme.

Pro dvě nezávislé[1] náhodné veličiny X a Y platí

$$\mathrm{E}[X \cdot Y] = \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]\,.$$

Střední hodnota se chová lineárně, tedy pro náhodnou veličinu X a dvě konstanty a, b platí

$$\mathrm{E}[aX + b] = a \cdot \mathrm{E}[X] + b\,.$$

Pro náhodnou veličinu X s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mathrm{E}[X^2] = \mu^2 + \sigma^2\,.$$

Toto vychází z alternativního vzorce na rozptyl

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}X)^2\,,$$

[1] Nezávislost je zde důležitá, bez ní by tento vzorec neplatil.

kde víme, že $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$ a $\mathrm{E}X = \mu$, z čehož už jen vyjádřením dostaneme požadovanou rovnost.
Dále je potřeba upozornit na to, že nelze nijak jednoduše spočítat výraz

$$\mathrm{E}[(\overline{X_n})^2]\,.$$

Jedinou možností je rozepsat si ho jako součin dvou závorek a dále algebraicky upravovat.
Jako poslední uvedeme, že jsme používali následující zápis

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i^2] = \mathrm{E}[X_1^2] + \cdots + \mathrm{E}[X_n^2] = n \cdot \mathrm{E}[X_1^2]\,.$$

Tento zápis lze použít neboť náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ mají všechny stejné rozdělení.
Toto je vše, co potřebujeme k úpravě našeho výrazu (kromě práce se sumami a závorkami). Nyní stačí jen upravovat výraz pro střední hodnotu výběrového rozptylu a nakonec dostaneme požadovaný výsledek.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\widehat{\sigma_n^2}\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathrm{E}[X_i^2] - 2\mathrm{E}[X_i\overline{X_n}] + \mathrm{E}[(\overline{X_n})^2]\right\} = \\
&= \frac{n}{n-1}\mathrm{E}[X_1^2] - \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i\overline{X_n}] + \frac{n}{n-1}\mathrm{E}[(\overline{X_n})^2] = \\
&= \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{2n}{n-1}\mathrm{E}[(\overline{X_n})^2] + \frac{n}{n-1}\mathrm{E}[(\overline{X_n})^2] = \\
&= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \mathrm{E}[(\overline{X_n})^2]\right] = \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}[X_iX_j]\right] = \\
&= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, i\neq j}^{n}\mathrm{E}[X_iX_j]\right] = \\
&= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{n}{n^2}\mathrm{E}[X_1^2] - \frac{n(n-1)}{n^2}\mu^2\right] = \\
&= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \mu^2\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\right)\right] = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2\,.
\end{aligned}$$

Michal Nožička
`nozicka@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.