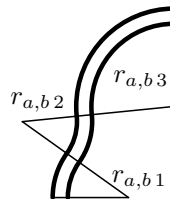


Úloha III.2 ... pekelná

3 body; průměr 2,65; řešilo 55 studentů

Do pekla vede cesta a silnice po opačných březích řeky. Jdeme po směru řeky, který je vyznačen na obrázku. Břehy řeky jsou tvořeny částmi soustředných kružnic. Pěší cesta kopíruje jeden břeh řeky, silnice druhý břeh, šířka toku je neměnná. Po jaké straně řeky je rychlejší jít? Známe středový úhel každého kružnicového oblouku $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ a poloměr každé kružnice $r_{a1}, r_{b1}, r_{a2}, r_{b2}, \dots$, kde indexy a, b značí levý a pravý břeh.

Napadla Lukáše cestou do Pekla.



Víme, že cesta i silnice leží na soustředných kružnicích. Řekněme, že silnice povede po levém břehu řeky. Platí $\Delta o_i = \Delta r \varphi_i$, kde i je číslo příslušného oblouku, Δr je šířka řeky (a tedy i rozdíl poloměrů oblouků v absolutní hodnotě), φ_i je středový úhel oblouku v radiánech (když se řeka točí doprava, má úhel zápornou hodnotu) a Δo_i je, o kolik je cesta delší než silnice. Tedy cesta bude delší než silnice o hodnotu:

$$\sum_{i=1}^n \Delta o_i = \sum_{i=1}^n \Delta r \varphi_i = \Delta r \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

kde n je (neznámý, ale to nevadí) počet oblouků. φ_i jsou jednak středové úhly jednotlivých oblouků, jednak úhel mezi tečnou ke kružnici na začátku a na konci oblouku, přičemž tečna ke konci i -tého oblouku je shodná s tečnou k začátku $(i+1)$ -ho oblouku (orientace úhlu zůstane stejná). Proto je celkový rozdíl délky cesty a silnice roven $\Delta r \varphi_{tot}$, kde φ_{tot} je úhel mezi tečnou k silnici na začátku a na konci údolí. Δr je mimochodem vždy kladné, tedy to, zda je delší silnice nebo cesta, můžeme určit čistě ze součtu úhlů. To bude fungovat, pokud se řeka nebude křížit sama se sebou, což se může stát asi jen na cestě do pekla.

Nakonec by to chtělo říci, který břeh je pro nás v tomto konkrétním případě výhodnější. Úhly φ_1 a φ_3 jsou orientované záporně, úhel φ_2 kladně. Také na obrázku vidíme, že φ_3 je v absolutní hodnotě větší než φ_2 , tedy součet těchto tří úhlů je záporný a cesta je kratší než silnice. Také je vidět, že se řeka stočila doprava a úhel mezi jejím směrem na začátku a konci údolí je orientovaný záporně.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.