

Úloha VI.2 ... upadlo

3 body; průměr 2,67; řešilo 42 studentů

Z jaké výšky nad povrchem neutronové hvězdy bychom museli „upustit“ předmět, aby dopadl na její povrch v rychlosti $0,1c$ ($0,1$ rychlosti světla). Naše neutronová hvězda má hmotnost $1,5$ násobku hmotnosti Slunce a průměr $d = 10$ km. Zanedbejte atmosféru neutronové hvězdy a její rotaci. Zanedbejte relativistické korekce. Srovnajte ale, jakého výsledku byste dosáhli, pokud by pád probíhal v homogenním gravitačním poli (které má intenzitu stejnou jako na povrchu planety) s tím, kdy pád probíhá v radiálním gravitačním poli.

Bonus: Uvažujte korekci na speciální teorii relativity v případě pádu v homogenním poli. Karel přemýšlel, zas a znovu, nad neutronovými hvězdami.

Samozřejmě se na začátek domluvíme, že do hvězdy nebudeme házet nic, co má hmotnost řádově srovnatelnou s hvězdou, tj. nechť hmotnost našeho testovacího předmětu je zanedbatelná.

První odhad výšky potřebné k nabrání $0,1c$ stanovíme uvažováním homogenního gravitačního pole. V takovém poli je intenzita gravitačního pole ve všech bodech stejná. Intenzita homogenního gravitačního pole je ekvivalentní gravitačnímu zrychlení na povrchu hvězdy

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

kde m je hmotnost předmětu, M je hmotnost neutronové hvězdy a \mathbf{e}_r je jednotkový vektor směřující do středu hvězdy.

V takovém poli vypočítáme dopadovou rychlost z rovnice

$$v = v_0 + gt,$$

kde dosazujeme $v_0 = 0$. Získáme dobu pádu t , pomocí které již jsme schopni vyjádřit počáteční výšku

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{d^2 (0,1c)^2}{8GM} \doteq 56,5 \text{ m}.$$

Pokud uvažujeme radiální pole a vycházíme ze ZZE, stanovíme si kinetickou energii při dopadu jako rozdíl potenciálních energií při upuštění a při dopadu

$$\frac{1}{2}mv^2 = GmM \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{R} \right).$$

Po dosazení $v = 0,1c$ a $R = r - d/2$ se dostáváme k vyjádření potřebné výšky

$$h = \left(\frac{1}{1 - \frac{(0,1c)^2 d}{4GM}} - 1 \right) \frac{d}{2} \doteq 57,2 \text{ m}.$$

Bonus

Pracujme v sústave, kde sa neutrónová hviezda nehýbe. Intenzita tiažového poľa tu zostáva rovnaká a tiež sa nemusíme zaoberať kontrakciou dĺžky / dilatáciou času (tie existujú len v sústave spojennej s predmetom); jediná zmena je, že hmotnosť predmetu závisí na jeho rýchlosti podľa dobre známeho vzťahu

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Druhý Newtonov zákon stále platí, musíme ale počítat so zmenami hmotnosti a použiť ho v tvare

$$F = mg = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Rozderivovaním dostaneme

$$mg = m \frac{dv}{dt} + m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dt} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde môžeme vykrátit m a zintegrovat (využijeme $v(0) = 0$) na

$$v = c \operatorname{tgh} \frac{gt}{c}.$$

Dráhu prejdenú za daný čas dostaneme ako

$$h(t) = \int v dt = \frac{c^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{c},$$

z čoho pomocou vzťahu $\operatorname{tgh}^2 x = 1 - \cosh^{-2} x$ dostaneme

$$h(v) = -\frac{c^2}{2g} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{d^2 c^2}{8GM} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Pre $v = 0,1c$ vychádza $h = 56,8$ m. Rovnaký výsledok by sme dosiahli aj pri použití zákona zachovania energie

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Vďaka malej rýchlosti a hustej hviezde sú všetky tri výsledky veľmi podobné, ale keby sme chceli počítat s nehomogénnym polom, vidíme, že musíme uvažovať aj špeciálnu relativitu, inak výsledok oveľa presnejší nebude. Dokonca vtedy potrebujeme aj všeobecnú relativitu, ktorá zmení výsledok o ďalšie desiatky percent - to sme vám ale za bonus dať nechceli.

Jakub Dvořák
faktorial@fykos.cz

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.