

Úloha IV.1 ... zmrzlina

3 body; průměr 2,12; řešilo 51 studentů

Odhadněte, kolik gramů zmrzliny dokážeme vyrobit, pokud máme k dispozici 5 l kapalného dusíku o teplotě $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ a neomezené množství mléka a smetany o pokojové teplotě $22\text{ }^{\circ}\text{C}$? Předpokládejme, že požadovaná zmrzlina se skládá jen z mléka a smetany (hmotnostně půl na půl) a měla by mít teplotu $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Protože se tepelné kapacity mléka a smetany v tomto intervalu teplot značně mění, počítejte s jejich průměrnými hodnotami $c_m = 3,45\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pro mléko a $c_s = 4,45\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pro smetanu. Zbylé potřebné údaje si dohledejte na internetu.

Michal dostal chuť na zmrzlinu.

V tomto příkladu budeme řešit tepelné rovnováhy, kdy teplo přijaté dusíkem se bude rovnat teplu odevzdanému zmrzlinou

$$Q_{\text{dod}} = Q_{\text{od}}.$$

Označme si zadané teploty $t_1 = 22\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_2 = -196\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $t_3 = -5\text{ }^{\circ}\text{C}$ a podívejme se nejprve na druhou část. Použijeme známý vzoreček $Q = cm\Delta T$, kde c je tepelná kapacita, m je hmotnost a ΔT změna teploty. Odtud, protože zmrzlina je napůl mléko a napůl smetana, nám vychází

$$Q_{\text{od}} = c_z m_z (t_1 - t_3) = \frac{c_s + c_m}{2} m_z (t_1 - t_3),$$

kde m_z je celková hmotnost zmrzliny a c_z je její celková tepelná kapacita.

Kapalný dusík se při kontaktu s teplejším tělesem začne odpařovat. Nalezli jsme měrné skupenské teplo varu¹ $l_N = 198\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Všimněme si, že vynecháváme ohřívání dusíku na teplotu $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$. To je z toho důvodu, že plynný dusík samovolně vyprchává z nádoby, protože jeho objem je několikanásobně vyšší. Počítejme tedy jeho ohřev před vyprcháním za tepelné ztráty.

Protože známe pouze objem kapalného dusíku, budeme si muset jeho hmotnost dopočítat sami. Nejedná se o 5 kg plynného dusíku, proto si musíme nalézt jeho hustotu v kapalném stavu,² která činí $\rho = 808\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Nyní už můžeme psát

$$Q_{\text{dod}} = l_N m_N = l_N \rho V_N,$$

kde m_N značí hmotnost dusíku.

Spojením všech tří rovnic dostáváme

$$\frac{c_s + c_m}{2} m_z (t_1 - t_3) = l_N \rho V_N,$$

odkud si můžeme vyjádřit hledanou hmotnost zmrzliny

$$m_z = \frac{2l_N \rho V_N}{(c_s + c_m)(t_1 - t_3)}.$$

Dosazením zjistíme, že jsme vyrobili $m_z \doteq 7,5\text{ kg} = 7\,500\text{ g}$ zmrzliny.

¹http://www.ivt.mzf.cz/wp-content/uploads/fyzika/tep_konst_latek-zmeny_skupenstvi.pdf

²<https://en.wikipedia.org/wiki/Nitrogen>

I přes zanedbání veškerého ohřevu dusíku je výsledek nereálný kvůli mnoha dalším tepelným ztrátám.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.