

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

první série je úspěšně za námi a s ní přichází série druhá. Jestli jste nestihli vyřešit žádný příklad, nezužefte! Do FYKOSu se můžete zapojit i v průběhu roku, stále máte šanci se zúčastnit jarního soustředění, poznat skvělé lidi, vyhrát krásné ceny nebo dokonce získat potvrzení o prominutí přijímacích zkoušek na MatFyz v Praze!

Ve druhé sérii si vyzkoušíte vypočítat vlhkost v Danově sauně, předpovědět počasí či změřit rychlost padajícího listí. V seriálu se budeme věnovat zejména Lagrangerově rovnici 1. druhu, ukážeme si, jak ji prakticky využít společně se zákonem zachování energie.

Jako každý rok, tak i letos pořádá FYKOS Den S Experimentální Fyzikou (DSEF), avšak poprvé ve spolupráci s asociací IAPS (International Association of Physics Students) v rámci projektu School day. Akce se koná v pátek 9. 11. 2018. V rámci DSEFu navštívíte řadu zajímavých pracovišť a přednášek, také se potkáte s některými z nás, ale hlavně s vašimi vrstevníky, kteří mají podobné zájmy.

Za chybějící statistiky k úloze *hodinová* se omlouváme, nejen Jáchymovi zbývalo málo času do deadlinu.

Těšíme se na vás!

vaši *Organizátoři*



Zadání II. série

Termín uploadu: 13. 11. 2018 23.59

Termín odeslání: 12. 11. 2018

Úloha II.1 ... moonmen

3 body

Vaše váha by byla při Měsíci v zenitu menší než při Měsíci v nadiru. O kolik?

Úloha II.2 ... finská sauna

3 body

Představte si, že by Dano měl finskou saunu o rozměrech 2,5 m krát 3 m krát 4 m s relativní vlhkostí uvnitř 20 % při teplotě 90 °C. Kolik vody by musel vypařit, aby uvnitř sauny byla relativní vlhkost 35 %? Vodu vypařuje uvnitř na kamnech tak, že se teplota místnosti nezmění.

Úloha II.3 ... fyzikální trofej

6 bodů

Danka vyhrála závod v derivování a za odměnu dostala sošku vyrobenou z průhledného materiálu ve tvaru hranolu se čtvercovou podstavou o hraně $a = 5$ cm a výšce $h \leq a$. Ať se dívá, jak se dívá, čelní stěnou nikdy nevidí přes boční stěny skrze trofej, vždy vidí pouze odražené paprsky. Jaký může mít materiál trofeje index lomu? Hranol je umístěn ve vzduchu.

Úloha II.4 ... lunar lander

7 bodů

Jak má řídicí elektronika přistávacího modulu Apolla dávkovat tah T motoru (a tedy regulovat spotřebu paliva) směřující směrem dolů, aby se loď snášela na povrch Měsíce rovnoměrným přímočarým pohybem? Efektivní rychlost spalín motoru je u . Loď již zbrzdila svůj pohyb po orbitě a sestupuje přímo dolů v homogenním gravitačním poli se zrychlením g . Počáteční hmotnost modulu je m_0 .

Bonus Jak má elektronika dávkovat tah při přistání z výšky h a počáteční rychlosti v_0 , aby přistání bylo tzv. pádem z nulové výšky a minimalizovala se spotřeba paliva? Maximální tah motoru je T_{\max} .

Úloha II.5 ... kladka a pták

9 bodů

Ke stropu je zavěšená pevná kladka a je na ni navlečeno lano tak, aby jeho levý i pravý konec byly ve stejné hloubce. Na jednom konci visí pták Fykosák a na druhém konci závaží, které má stejnou hmotnost jako pták. V počátečním stavu jsou pták i závaží nehybné. Popište, co se bude se soustavou dít, začne-li pták Fykosák lézt vzhůru (po svém vlastním lanu) s použitím konstantní síly. Nejprve předpokládejte, že lano je nehmotné a kladka je ideální. Poté počítejte s délkovou hmotností lana λ , jeho délkou l , momentem setrvačnosti kladky J a jejím poloměrem r . Předpokládejte, že lano na kladce neprokluzuje.

Úloha II.P ... počasí na Matfyzu

10 bodů

Vytvořte co nejpřesnější předpověď počasí pro adresu V Holešovičkách 2, Praha 8, pro středu následující po uzavěrci série od 12:00 do 15:00. Jak se bude měnit počasí v průběhu celého dne? Smíte využít data o počasí nejpozději do soboty (včetně) předcházející uzavěrci. Součástí řešení je nutné svoji předpověď zdůvodnit, ocitovat zdroje a ideální je využít co nejvíce dat i zdrojů.

Úloha II.E ... listopad

12 bodů

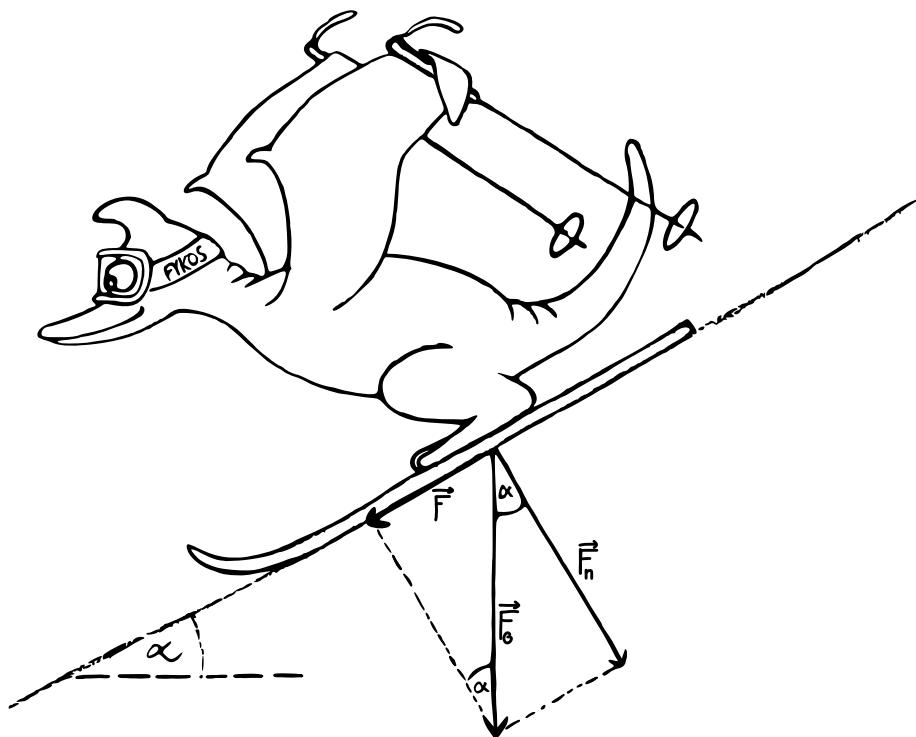
Změřte průměrnou vertikální rychlost padajícího listí. Použijte listy z několika různých stromů a diskutujte, jaký vliv má tvar listu na rychlost pádu. Jak by měl vypadat ideální list, pokud bychom chtěli, aby padal co nejpomaleji?

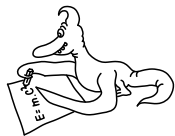
Úloha II.S ... zvažujúca

10 bodů

- Majme činku tvorenú dvoma hmotnými bodmi s hmotnosťami m a M , ktoré sú spojené nehmotnou, ale veľmi pevnou tyčou. Táto činka padá voľným pádom. Napíšte väzbovú podmienku a zároveň aj Lagrangeove rovnice prvého druhu pre tento objekt.
- Majme vodorovnú položku, na ktorej je umiestnený pravouhlý trojboký hranol s hmotnosťou M ako na obrázku ???. Po strane tohto hranolu, ktorá s podložkou zvierá uhol α , sa sklzáva hmotný bod s hmotnosťou m . V celom príklade neuvažujte trenie.
 - Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu.
 - Ukážte, že celková hybnosť sústavy v smere osi x je pri nulovej počiatočnej rýchlosti hmotného bodu nulová.
 - Postupným riešením sústavy rovníc určte veľkosti rýchlostí hmotného bodu a hranolu v závislosti od času.
 - Určte pomer veľkostí týchto rýchlostí.

3. Majme kyvadlo zavesené na závese. Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu a ukážte, že pre ňu platí zákon zachovania energie.





Řešení I. série

Úloha I.1 ... balónky

3 body; průměr 2,79; řešilo 104 studentů

Kolik balónů s objemem $V = 101$ naplněných heliem s hustotou $\rho_{\text{He}} = 0,179 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je potřeba, aby se Filip s hmotností $m_{\text{F}} = 80 \text{ kg}$ vznášel ve vzduchu s hustotou $\rho_{\text{v}} = 1,205 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$? A kolik by jich bylo potřeba, aby se vznášela Danka s hmotností $m_{\text{D}} = 50 \text{ kg}$? Hmotnost prázdného balónu zanedbejte. Danka dala Filipovi propagační balónek pro zvednutí nálady.

Aby sa Filip vo vzduchu vznášal, musí sa tiažová sila pôsobiaca naňho a na hélium v balónoch vyrovnat vztlakovej sile pôsobiacej na balón y vo vzduchu. Hmotnosť hélia v jednom balóne je $m_{\text{He}} = V\rho_{\text{He}}$. Vztlaková sila pôsobiaca na jeden balón je $F_{\text{vz0}} = V\rho_{\text{v}}g$. Ak hľadaný počet balónov označíme n , potom z rovností síl máme

$$\begin{aligned} m_{\text{F}}g + nm_{\text{He}}g &= F_{\text{g}} = F_{\text{vz}} = nF_{\text{vz0}}, \\ m_{\text{F}}g + n\rho_{\text{He}}Vg &= nV\rho_{\text{v}}g, \\ n &= \frac{m_{\text{F}}}{V(\rho_{\text{v}} - \rho_{\text{He}})} \doteq 7797. \end{aligned}$$

Teda Filip bude na vznášanie sa potrebovať $n_{\text{F}} = 7797$ balónov. Ak do vzorca dosadíme namiesto hmotnosti Filipa hmotnosť Danky, bude Danka na vznášanie sa potrebovať $n_{\text{D}} = 4873$ balónov. Správne by sme mali uvažovať aj vztlakovú silu pôsobiacu priamo na Filipa, ale vzhľadom na takýto počet balónov je Filipov objem zanedbateľný. A navyše by sme už museli uvažovať hmotnosť prázdných balónov.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha I.2 ... ohňostroj

3 body; průměr 1,77; řešilo 88 studentů

Jáchym odpaloval ohňostroj, který si můžeme představit jako světlici, která je v určitý čas vystřelena rychlostí v směrem svisle nahoru, a poté za nějaký čas vybuchne. Jáchym stál ve vzdálenosti x od místa odpalu, když uslyšel zvuk výstřelu. Za čas t_1 uviděl výbuch a za čas t_2 po zpozorování výbuchu ho i uslyšel. Spočítejte rychlost v .

Jáchym v sobě pyrotechnika nezapře.

Nazvěme y výšku, kam světlice vystoupá, a τ čas, jak dlouho jí tento výstup bude trvat. Výstřel světlice je svislý vrh vzhůru. Potom z rovnice rovnoměrně zpomaleného pohybu dostáváme

$$y = v\tau - \frac{1}{2}g\tau^2.$$

Označíme-li rychlost zvuku c , zvuk výstřelu k Jáchymovi putuje čas

$$t = \frac{x}{c}.$$

Dále můžeme předpokládat, že rychlost světla je vůči rychlosti zvuku libovolně velká, Jáchym proto uvidí výbuch přesně v okamžiku, kdy nastane. Světlice nahoru doletí v čase t_1 od doby, kdy ji Jáchym uslyší, přičemž byla vystřelena dříve, v čase t . Z toho plyne

$$\tau = t_1 + t = t_1 + \frac{x}{c}.$$

Pokud si představíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami x a y a s přeponou z , platí

$$z = ct_2.$$

Z Pythagorovy věty máme

$$y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{c^2 t_2^2 - x^2}.$$

Tím jsme pomocí zadaných veličin vyjádřili jak y , tak τ , a proto můžeme dosadit do první rovnice

$$v = \frac{y}{\tau} + \frac{1}{2}g\tau = \frac{c}{ct_1 + x} \sqrt{c^2 t_2^2 - x^2} + \frac{g}{2c} (ct_1 + x).$$

Jáchym Bárták

tuaki@fykos.cz

Úloha I.3 ... nestabilní

7 bodů; průměr 4,94; řešilo 69 studentů

Mějme osm bodových nábojů (každý o velikosti q) umístěných ve vrcholech krychle. Určete velikost bodového náboje q_0 , který musíme umístit do středu krychle, aby byly všechny body v rovnováze. Bude rovnováha stabilní?

Matěj chtěl zadat příklad, který nespočítal ani profesor.

Na každý bod s nábojem q působí ostatní body ve vrcholech krychle odpudivou silou a jeden bod ve středu působí silou přitažlivou. Rovnováha nastane, pokud tyto síly budou mít stejnou velikost a opačný směr, takže se navzájem vyruší. Ze symetrie problému je jasné, že stačí řešit úlohu jen pro jeden z vrcholů krychle a rovnováha pak bude splněna i pro všechny zbylé body včetně toho prostředního.

Dále si uvědomme, že stačí řešit silovou rovnováhu na přímce spojující střed a daný vrchol (tedy na tělesové úhlopříčce). Všechny ostatní složky sil se totiž díky symetrii navzájem vyruší. Nejprve spočítáme, jakou celkovou silou je bod odpuzován a posléze vyjádříme, jak velký náboj musíme doprostřed umístit.

Máme celkem sedm nábojů, které na bod působí. Rozdělíme se je do tří kategorií. První jsou tři náboje, které s naším bodem sdílejí společnou hranu krychle. Další tři jsou ty, které s ním sdílejí stěnovou úhlopříčku (neboli právě jednu stěnu). Poslední jeden náboj je přesně v opačném vrcholu krychle. Pro výpočet složky síly působící ve směru tělesové úhlopříčky jsou klíčové vždy dvě veličiny – vzdálenost bodů r a sklon jejich spojnice vůči tělesové úhlopříčce φ (pokud body leží na tělesové úhlopříčce, je sklon $\varphi = 0$, pokud je spojnice kolmá na úhlopříčku, je $\varphi = 90^\circ$). Celkovou sílu nám udává Coulombův zákon

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^2}{r^2}.$$

Pro výpočet složky síly rovnoběžné s tělesovou úhlopříčkou stačí velikost síly vynásobit členem $\cos \varphi$. Dostáváme tak

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{\cos \varphi}{r^2}.$$

První zlomek je pro všechny body stejný. Úhly a vzdálenosti lze zjistit jednoduchou geometrií, výsledky jsou shrnuty v následující tabulce. Délka hrany krychle je a .

kategorie	počet nábojů	r	$\cos \varphi$	$\frac{\cos \varphi}{r^2}$
1	3	a	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}a^2}$
2	3	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}a^2}$
3	1	$\sqrt{3}a$	1	$\frac{1}{3a^2}$

Celková síla tedy je

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon a^2} \left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon a^2} \frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{6}.$$

Náboj, který umístíme doprostřed, musí kompenzovat tuto sílu. Vzdálenost středu od vrcholu je $\sqrt{3}a/2$. Platí tedy

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{4qq_0}{3a^2}.$$

Z podmínky rovnosti sil dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{4\pi\epsilon a^2} \frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{6} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{4qq_0}{3a^2}, \\ q(6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2) &= 8q_0, \\ q_0 &= \frac{3\sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 2}{8} q \doteq 2,468q. \end{aligned}$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí na rozměru krychle ani na permitivitě prostředí (předpokládali jsme homogenní prostředí). Zbývá vyřešit otázku, zda bude rovnováha stabilní, labilní, či volná. Stabilní rovnováha nastává, když se soustava po malé výchylce z rovnovážné polohy samovolně vrátí zpět do rovnovážné polohy. Tedy pokud malinko vychýlíme některý z bodů, výslednice sil ho bude tlačit zpět. Jak to ale zjistíme? Mohli bychom si rozepsat závislost sil na obecné poloze bodu nebo přímo vypočítat potenciál v okolí daného bodu.

Zkusme na to jít jednoduchou úvahou. Představme si, že vychýlíme prostřední bod o malinkou vzdálenost ze středu směrem k jednomu z vrcholů. Na prostřední bod původně působily pouze přitažlivé síly od ostatních vrcholů. Nyní se rozhodně zvýší přitažlivá síla směrem k bodu, ke kterému byl středový náboj přiblížen, zároveň se ale sníží přitažlivá síla k vrcholu na opačné straně. Na vychýlený prostřední náboj nyní proto bude působit síla, která ho bude vychylovat dále od středu. To znamená, že rovnováha je nestabilní, ba dokonce labilní.

Pokud bychom všem vrcholovým bodům udělili stejnou výchylku směrem od středu, stabilita by zůstala zachována, protože nezáleží na délce strany krychle. V tomto směru je tedy rovnováha volná.

Tento problém můžeme samozřejmě řešit i trikem. Z Gaussova zákona elektrostatiky lze dokázat, že jakákoli soustava bodových nábojů nemůže být nikdy ve stabilní rovnovážné poloze bez působení dalších sil (např. gravitační). Dokažme to sporem – předpokládejme, že existuje

bod, ve kterém má elektrostatický potenciál lokální minimum a nenachází se zde žádný náboj (tedy kdybychom do tohoto místa umístili libovolně malý kladný bodový náboj, byl by ve stabilní rovnováze). Kolem tohoto místa uděláme dostatečně malou Gaussovu plochu tak, aby se uvnitř nenacházel žádný náboj. Jelikož je to stabilní poloha, lze kouli udělat tak malou, aby vektor intenzity elektrického pole všude na povrchu koule směřoval dovnitř (aby se při malé výchylce kladný náboj vracel zpět). Nyní po integraci

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

dostaneme záporný výsledek, což znamená, že uprostřed koule se nachází záporný náboj, ale to je ve sporu s naším předpokladem.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha I.4 ... pád z okna

7 bodů; průměr 3,74; řešilo 81 studentů

Když James Bond pustil agenta 006 Aleca Treveljana z konstrukce radioteleskopu Arecibo ve finální scéně filmu *Golden Eye*, ten začal křičet s frekvencí f . Spočítejte závislost frekvence, kterou slyší 007, na čase. Odpor vzduchu nevažujte.

Nápověda Pro radu jděte k panu Dopplerovi.

Matěj se rád dívá z ok(n)a.

Na časovou závislost frekvence, kterou 007 uslyší, bude mít vliv několik faktorů. Roli bude hrát Dopplerův jev, protože Alec se chová jako pohybující se zdroj zvuku, dále bude záležet na vzdálenosti obou agentů, která se s časem zvyšuje, a také musíme brát v úvahu fakt, že rychlost zvuku je konečná. Rychlost zvuku označme c a vzdálenost obou agentů y . Jelikož se jedná o volný pád z klidové polohy, je závislost vzdálenosti na čase dána vztahem

$$y(t) = \frac{1}{2}g\tau^2,$$

kde g je tíhové zrychlení a τ je čas od okamžiku upuštění.

Frekvence f' , kterou by slyšel pozorovatel nacházející se v klidu hned nad 006 padajícím rychlostí v , je podle Dopplerova jevu

$$f' = f \frac{c}{c + v},$$

po dosazení $v = g\tau$ dostáváme časovou závislost

$$f'(\tau) = f \frac{c}{c + g\tau}.$$

Problém je v tom, že frekvenci f' James neuslyší v čase τ , ale v čase

$$t = \tau + \frac{y(\tau)}{c} = \tau + \frac{g\tau^2}{2c},$$

protože nějaký čas trvá, než se k němu zvuk dostane. Hledáme tak závislost $f'(t)$. Z předchozí rovnice si můžeme vyjádřit

$$\tau = -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}}.$$

Zřejmě nás zajímá pouze kladný čas, proto před odmocninou použijeme znaménko plus. Dosažením do rovnice pro frekvenci dostáváme

$$f'(t) = f \frac{c}{c + g \left(-\frac{c}{g} + \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}} \right)} = \frac{f}{\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}}.$$

Samořejmě jsme neuvažovali odraz zvuku od obřího teleskopu, na který 006 tvrdě dopadne.

Matěj Mezera

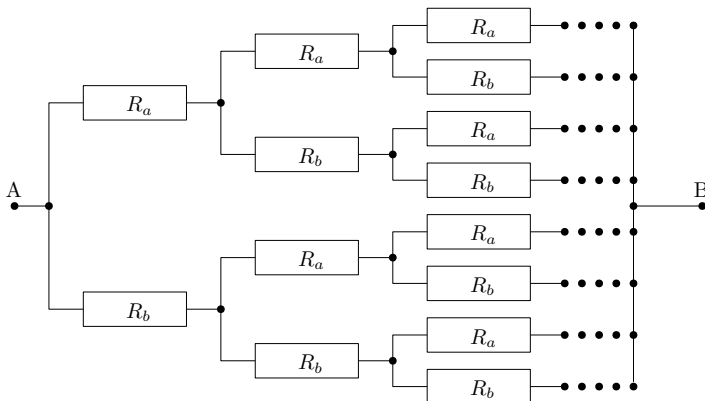
m.mezera@fykos.cz

Úloha I.5 ... zpropadený obvod

8 bodů; průměr 6,04; řešilo 71 studentů

a) Určete odpor nekonečné odporové sítě na obrázku mezi body A a B. Bod A je přímo spojen s dvěma rezistory s odpory R_a a R_b . Každý z těchto rezistorů je spojen s dalšími dvěma odpory R_a a R_b a tak dále.

b) Na obrázku si místo rezistorů představte kondenzátory s kapacitami C_a a C_b . Jaká bude celková kapacita obvodu?



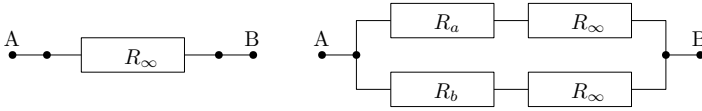
Obr. 1: Schéma nekonečné odporové sítě.

Karel zase jednou chtěl něco nekonečně-nekonečného.

V nekonečných sítích se obecně využívá toho faktu, že pokud by síť byla opravdu dokonalá a nekonečná a pokud je zároveň pravidelná, dají se v ní nalézt jednotlivé subčásti, které mají stejný odpor (či stejnou kapacitu) jako celková síť. Pokud je totiž obvod nekonečný, nezáleží na tom, jestli ještě přidáte nebo uberete jeden opakující se článek, stále jich bude nekonečno. Něco málo o takovýchto obvodech naleznete například v knihovničce Fyzikální olympiády v textu Elektrické obvody (stejnoseměrný proud) - část 2.9 Řetězový obvod¹.

Nejprve se budeme věnovat bodu a), tedy rezistorové síti. Tu si můžeme představit buď jako celou síť s odporem R_∞ , anebo jako obvod se čtyřmi rezistory, z nichž mají dva odpor R_∞ , třetí R_a a čtvrtý R_b , viz obrázek 2.

¹<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>



Obr. 2: Alternativní schémata problému, pomocí nichž vypočítáme odpor celé sítě.

V druhém případě máme tedy dvě dvojice rezistorů zapojených sériově, tyto dvojice jsou pak zapojené paralelně. Můžeme jednoduše napsat vztah mezi těmito dvěma obvody pomocí rovnice, která po úpravách vede na kvadratickou rovnici,² kterou snadno vyřešíme.

$$R_\infty = \left(\frac{1}{R_a + R_\infty} + \frac{1}{R_b + R_\infty} \right)^{-1},$$

$$R_\infty = \frac{(R_a + R_\infty)(R_b + R_\infty)}{R_b + R_\infty + R_a + R_\infty},$$

$$R_\infty(R_a + R_b + 2R_\infty) = R_a R_b + R_\infty(R_a + R_b) + R_\infty^2,$$

$$R_\infty^2 = R_a R_b \quad \Rightarrow \quad R_\infty = \sqrt{R_a R_b}.$$

Celkový odpor rezistorové sítě je tedy $R_\infty = \sqrt{R_a R_b}$. Záporný kořen jsme „zahodili“, protože záporný odpor pro naši úlohu nemá fyzikální význam. Sčítáme totiž samé kladné ideální rezistory. Záporný odpor by mohl mít význam, pokud bychom zapojili nějaké nelineární či exotické součástky do našeho obvodu. Více si o záporném odporu můžete přečíst například na Wikipedii.³

Stejným způsobem můžeme určit i celkovou kapacitu v bodě b). Jediný rozdíl je v tom, že u rezistorů sčítáme sériově zapojené odpory, kdežto u kapacity sčítáme paralelně zapojené kondenzátory.

$$C_\infty = \left(\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_\infty} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_\infty} \right)^{-1},$$

$$C_\infty = \frac{C_a C_\infty}{C_a + C_\infty} + \frac{C_b C_\infty}{C_b + C_\infty},$$

$$1 = \frac{C_a (C_b + C_\infty) + C_b (C_a + C_\infty)}{(C_a + C_\infty)(C_b + C_\infty)},$$

$$C_a C_b + C_\infty (C_a + C_b) + C_\infty^2 = 2C_a C_b + C_\infty (C_a + C_b),$$

$$C_\infty^2 = C_a C_b \quad \Rightarrow \quad C_\infty = \sqrt{C_a C_b}.$$

Vyšlo nám, že celková kapacita obvodu je $C_\infty = \sqrt{C_a C_b}$, tedy shodou okolností jsme získali zcela stejný tvar řešení jako u rezistorů. Kromě záporného řešení jsme ještě „zahodili“ možnost, že by kapacita celkového obvodu byla nulová. Došlo k tomu v kroku mezi druhým a třetím řádkem, kdy jsme obě strany vydělili C_∞ . Proč nečekáme, že by kapacita byla nulová? Intuitivně by se dalo čekat, že pokud by byla kapacita nekonečného obvodu nulová, bude odpor složený z rezistorů stejným způsobem nekonečný. Pokud tento argument nestačí, můžeme se podívat na to,

²Nekonečné či řetězové obvody ve většině úloh, se kterými se můžete v soutěžích setkat, vedou právě na kvadratickou rovnici.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_resistance

jaké budou kapacity pro konečné obvody, které budeme postupně konstruovat přidáváním dalších a dalších sad kondenzátorů. Je to alternativní metoda, jak kapacitu určit, ale je náročnější na jednotlivé výpočty a počet kroků. Navíc je potřebná znalost konvergence. Pokud si zjednodušíme pro rozhodnutí potvrzení či zamítnutí nulové hodnoty celkové kapacity na situaci $C_a = C_b = C$, dostáváme postupně celkové kapacity obvodu $2C, 4C/3, 8C/7, 16C/15, 32C/31 \dots$. Intuitivně vidíme, že tato řada konverguje k C , což odpovídá $C_\infty = \sqrt{C_a C_b} = C$, nikoliv nulovému řešení, které jsme zahodili oprávněně.

Celkový odpor či celková kapacita takto poskládaného obvodu z nekonečného množství součástek o dvou odporech či kapacitách je tedy geometrickým průměrem jejich hodnot.

Ještě můžeme zcela na závěr poznamenat, že jsme od začátku předpokládali, že odpory spojavících vodičů jsou nulové, což je standardní dle obvyklých konvencí. Pokud bychom museli uvažovat odpory i těchto vodičů, pak by se nám úloha zkomplikovala. Nicméně v případě rezistoru je rozumné zahrnout odpor vodiče vedoucího k rezistoru k tomu příslušnému rezistoru. Výsledek by byl pak stejný, pokud by tyto odpory vodičů byly všude stejné. Samozřejmě, že u reálné nekonečné sítě by byl nejspíše problém v nestejně délce vodičů, pokud tedy pomineme fakt, že nekonečné sítě stejně nelze dosáhnout. V případě kondenzátorů by mohlo jít o trochu větší problém, protože kromě kapacity bychom museli uvažovat i rezistivitu vodičů. Navíc i mezi jakýmikoliv součástkami může vznikat parazitní kapacita (či indukance), která bude nejspíše malá, ale v případě nekonečného obvodu je pak netriviální ji zanedbat. Úlohu jsme nezamýšleli až takto těžkou, a proto úvahy nad těmito jevy by mohly získat bonusové body. Důležité je korektní „snadné“ řešení idealizovaných obvodů.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha I.P ... strašná zima

10 bodů; průměr 3,09; řešilo 44 studentů

Některé mlhoviny tvořené plynem z hvězd, např. Bumerang, mají nižší teplotu než reliktní záření, tedy vlastně jsou chladnější než vesmír. Jak je to možné? Pokuste se stanovit podmínku na to, aby se plyn vyvrhovaný horkou hvězdou ochladil na teplotu nižší, než je reliktní záření.

Karel nebyl spokojen s tvrzením, že všude ve vesmíru je teplota alespoň reliktního záření.

Reliktné žiarenie je elektromagnetické žiarenie prichádzajúce zo všetkých smerov, ktoré vzniklo krátko po veľkom tresku. V dnešnej dobe má charakter žiarenia absolútne čierneho telesa s teplotou $T_r = 2,73\text{ K}$. Preto by sa dalo predpokladať, že všetky objekty vo vesmíre budú mať vyššiu teplotu. V prípade rovnováhy by mali všetky objekty rovnakú teplotu T_r , no vo vesmíre sa nachádzajú zdroje energie (napr. hviezdy), ktoré spôsobujú, že v istých oblastiach vesmíru je podstatne teplejšie. Zdroj „chladu“ však neexistuje, preto nás zaujímajú nerovnovážne procesy, pri ktorých dochádza k ochladzovaniu.

Hmlovina uvedená ako príklad v zadaní je planetárna hmlovina tvorená obálkou plynu s teplotou približne $t = 2\text{ K}$ rozpínajúca sa rýchlosťou okolo $v = 150\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Pri vzdialenosti okolo 1500 ly je jej rozmer asi $0,5\text{ ly}$ a je teda stará asi 1000 rokov.⁴ Fakt, že je chladnejšia ako reliktné žiarenie, bol objavený vďaka absorbcii fotónov reliktného žiarenia molekulami oxidu uhoľnatého v hmlovine, ktoré by v opačnom prípade sami vyžarovali.⁵

Táto nízka teplota sa dá vysvetliť práve veľmi rýchlou expanziou plynu, ktorý nestíha prijímať teplo od materskej hviezdy (s výkonom $L_* \approx 300L_\odot$ a povrchovou teplotou $T_* = 6000\text{ K}$

⁴<http://adsabs.harvard.edu/abs/1997ApJ...487L.155S>

⁵<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017MNRAS.466.1412B>

a polomerom približne $R_* = 16R_\odot$) ani reliktného žiarenia. Prečo ale takýchto veľmi chladných hmlovín nepozorujeme viac? Čím je práve Bumerang taký výnimočný? V prípade tejto hmloviny je rýchlosť unikajúcich častíc o rád vyššia ako obyčajne. Tento rozdiel je pravdepodobne spôsobený iným mechanizmom vzniku - tesnou interakciou červeného obra a inej hviezdy v spoločnej obálke. Pritom vznikal disk materiálu obalujúci hviezdy a týmto procesom poháňaný výtrisk hmoty v smere normály na obežnú rovinu. Na konci procesu približovania sa po špirále sa obe hviezdy pravdepodobne zrazilí⁶

Základným problémom tejto úlohy je, že procesy, o ktorých uvažujeme, nie sú rovnovážne. Preto nastávajú problémy napr. s definíciou teploty či iných stavových veličín, a vzťahy ako Planckov zákon, 1. veta termodynamická, či stavová rovnica majú len obmedzené použitie v závislosti na extrémnosti podmienok. Napriek tomu sa však pokúsme vytvoriť aspoň približný model situácie použitím týchto vzťahov.

Oblak materiálu, ktorý hviezda vyvrhla, idealizujeme ako dokonale tepelne vodivú guľu, ktorej polomer r sa mení priamoúmerne so vzdialenosťou R od hviezdy. Neunikajú z neho častice, rýchlosť pohybu oblaku v je konštantná v smere od hviezdy. Oblak prijíma teplo Q_L od hviezdy, teplo Q_r od reliktného žiarenia a vyžaruje teplo Q_z do okolia podľa Stephan-Boltzmanovho zákona.

Pre polomer oblaku teda platí $r = \alpha R = \alpha vt$. Pre jeho objem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (\alpha vt)^3 .$$

Z prvej vety termodynamickej máme

$$dU = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - \delta W = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - pdV .$$

Pre vnútornú energiu plynu platí $U = \frac{5}{2}nR_m T$, čo po zdifferencovaní a dosadení dáva

$$\frac{5}{2}nR_m dT = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - pdV = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - 4\pi p (\alpha v)^3 t^2 dt .$$

Pre teplo vyžiarené oblakom za čas dt máme

$$\delta Q_z = P dt = 4\pi r^2 \sigma T^4 dt = 4\pi (\alpha v)^2 \sigma T^4 t^2 dt .$$

Teplo prijaté plynom od hviezdy vieme určiť zo svietivosti hviezdy L , vzdialenosti oblaku od hviezdy R a jeho prierezu S ako časť povrchu sféry so stredom v hviezde a polomerom R obsahujúcu oblak (hviezda vyžaruje rovnomerne do celého priestoru)

$$\delta Q_L = P dt = \frac{L}{4\pi R^2} S dt = \frac{L}{4\pi R^2} \pi r^2 dt = \frac{L}{4} \alpha^2 dt ,$$

teplo prijaté z reliktného žiarenia ako

$$\delta Q_r = 4\pi r^2 \sigma T_r^4 dt = 4\pi (\alpha v)^2 \sigma T_r^4 t^2 dt .$$

A pre tlak plynu máme

$$p = \frac{nR_m T}{V} = \frac{3nR_m T}{4\pi (\alpha vt)^3} .$$

⁶<https://arxiv.org/pdf/1703.06929.pdf>

Keď všetko dosadíme, dostávame

$$\frac{s}{2}nR_m dT = \frac{L}{4}\alpha^2 dt + 4\pi(\alpha v)^2 \sigma T_r^4 t^2 dt - 4\pi(\alpha v)^2 \sigma T^4 t^2 dt - \frac{3nR_m T}{t} dt.$$

Po úprave dostávame vzťah pre časovú deriváciu teploty

$$\frac{dT}{dt} = \frac{L\alpha^2}{2snR_m} + \frac{8\pi(\alpha v)^2 \sigma}{snR_m} T_r^4 t^2 - \frac{8\pi(\alpha v)^2 \sigma}{snR_m} T^4 t^2 - \frac{6}{s} \frac{T}{t}.$$

Táto rovnica nemá analytické riešenie, dá sa však riešiť numericky.

Pozrime sa ale na podmienku ochladenia pod teplotu T_r . Aby sa plyn pod túto teplotu ochladil, musí byť v čase t_r , keď túto teplotu dosiahne, derivácia teploty podľa času záporná

$$\frac{dT}{dt} = \frac{L\alpha^2}{2snR_m} - \frac{6}{s} \frac{T}{t} < 0.$$

To bude dosiahnuté pre málo svetivú hviezdu vyvrhujúcu veľké množstvo hmoty do malej oblasti priestoru, ak teplota oblaku dosiahne teplotu reliktného žiarenia dost skoro, teda hmota bude vyvrhovaná dostatočnou rýchlosťou.

Náš model má však niekoľko chýb. Vyvrhnutý materiál modeluje ako ideálny plyn, no v skutočnosti ide o najprv elektricky nabitý materiál, z ktorého časti sa stane neutrálny plyn (či už atomický, alebo neskôr molekulárny) a zo zvyšku kondenzujú prachové častice. Náš model považuje obláčik za dokonale tepelne vodivý, čo pravdepodobne neplatí, keďže sa oblak prudko rozpína. Rozpínajúci sa oblak prijíma energiu žiarenia. Tu je však podstatné, či je opticky hustý (nepriehľadný) ako na počiatku expanzie a energiu prijíma svojím povrchom (teda jeho okraj je značne prehriaty oproti stredu), alebo priehľadný ako riedky plyn na konci expanzie a energiu prijímajú častice v celom objeme. Rovnako náš model rozpínania oblaku nie je ideálny. Oblak nebude homogénny - bude mať hustý stred a okraje, ktoré sa rozplývajú do priestoru. Celkovo sme neuvažovali ďalšie interakcie: gravitáciu materskej hviezdy, jej magnetické pole a lokálne pole galaxie, ktoré môžu či už na začiatku usmerňovať nabitú časticu alebo zrnká prachu pozdĺž siločiar. Podobne sme zanedbali interakcie s hviezdny a medzihviezdny vetrom a žiarením okolitých hviezd.

Celkovo teda môžeme konštatovať, že na ochladenie pod teplotu reliktného žiarenia je nutné, aby bol materiál vyvrhnutý vo veľkom množstve vysokou rýchlosťou a centrálna hviezda mala nízku svetivosť. Kvantifikovať podmienky presne je veľmi náročný, ak nie nemožný problém. Na ich splnenie však pravdepodobne nestačí jedna hviezda. Málo svetivá hviezda totiž nedokáže vyvrhnúť materiál dostatočne prudko. Preto sa zdá, že jedinou možnosťou je interakcia červeného obra s inou hviezdou, ktorá materiál obálky červeného obra vymrští do priestoru.

Poznámky k došlým riešením

Riešenie úlohy by sa dalo rozdeliť na dve časti - rešerš (prehľadné spracovanie informácií, ktoré sú na danú tému dostupné) a vytvorenie modelu s komentárom. Mnohým chýbala či už jedna, alebo druhá časť. Už základný prieskum a jednoduchý adiabatický model bol hodnotený nadpolovičným množstvom bodov, ak bol dostatočne komentovaný a citovaný. Tým sa dostávame k ďalšiemu problému. Ak sa v riešení objavujú nejaké netriviálne informácie, je potrebné citovať ich zdroj (uviest názov a autora publikácie, či adresu webovej stránky a dátum, kedy z nej bolo čerpané). V riešeniach sa objavoval aj jeden nesprávny prístup, a to priama premena vnútornej energie plynu na jeho makroskopickú kinetickú energiu. Znamenalo by to, že oblak

plynu naberá rýchlosť úmerne odmocnине jeho teploty a takýto systém by sa stal perpetuum mobile druhého druhu.

Jozef Lípták
liptak.j@fykos.cz

Úloha I.E ... hodinová

12 bodů; průměr 7,50; řešilo 44 studentů

Změřte délku jednoho dne. Jedno souvislé měření však nemůže trvat déle než jednu hodinu (pro statistickou přesnost však měření opakujte).

Jáchym měl hodinu do deadlinu.

Úvod

Rozvoj fyziky i vedy ako takej bol spojený s každodenným životom našich predkov. Práve potreba poznania striedania sa dňa a noci, ročných období či ročného cyklu prinútili ľudí merať čas a zostaviť kalendár. Vďaka jeho jednoduchému určeniu sa stal základnou časovou jednotkou deň. Nový deň sa začínal s východom, alebo západom Slnka. Pohyb Slnka po oblohe sme použili na určenie dĺžky dňa aj my. Merali sme v podstate uhlovú rýchlosť Slnka na oblohe, z čoho sme následne určili, koľko trvá jeho jeden celý obeh (resp. jedno otočenie Zeme okolo osi).

Postup merania

Základom experimentu bolo meranie uhlu, o ktorý sa posunul (tj. otočil) tieň špajdle za daný čas. K meraniu sme použili papier ako podložku, na ktorú sme značili polohu tieňa, a vhodne dlhú špajdlu, ktorú sme zabolili do zeme, aby sa jej poloha (tj. vrchol uhla) nemenila a zároveň bola kolmá k podložke. Podložku sme umiestnili vodorovne. Použitá špajdla mala po zapichnutí do zeme výšku $l = (25,80 \pm 0,05)$ cm (medzná chyba merania je daná použitým pravítkom ako polovica najmenšieho dieliku) od miesta prieniku s papierovou podložkou (päty).

Samotné meranie prebiehalo tak, že sme na papierovú podložku zakresľovali polohu tieňa špajdle a ku každému meraniu sme si poznačili presný čas. Z toho sme potom určili, o aký uhol sa tieň posunul za daný časový úsek.

Namerané dáta

Je viacero spôsobov, ako môžeme k zberu dát pristúpiť. Jedna možnosť je zmerať, o aký uhol sa posunie tieň špajdle za 1 hodinu. Pre získanie presného výsledku však budeme musieť meranie opakovať. Vďaka štatistickému spracovaniu potom dostaneme dostatočne presnú hodnotu výsledku. Druhou variantou je spraviť niekoľko meraní polohy tieňa v krátkych intervaloch počas jednej hodiny.

My sme zvolili druhú možnosť. Od 14:50 do 16:15 sme spravili 13 meraní v časových intervaloch 5 až 9 minút (viď tabuľka 1). Z tohto súboru dát sme vybrali ten hodinový úsek, ktorého dáta boli najlepšie namerané (tj. neovplyvnené napríklad silným vetrom). Išlo konkrétne o dáta namerané v čase od 15:09 do 16:09 (viď tabuľka 2).

Spracovanie merania

Uhol posunu tieňa sme pre väčšiu presnosť merali trigonometricky. Na zakreslených tieňoch špajdle ako priamkách sme vyznačili body, ktoré sa od päty špajdle (tj. vrcholu uhla) nachádzali v rovnakej vzdialenosti, v našom prípade to bolo $a = (45,2 \pm 0,2)$ cm (medzná chyba je väčšia

kvôli použitiu nepresnejšieho pravítka a motúziku). Uhol α , o ktorý sa tieň posunul, sme tak určili ako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a}, \quad (1)$$

kde x je vzdialenosť vyznačených bodov na úsečkách dvoch susediacich polôh tieňa špajdle. Nakoľko posunutie bolo vždy menšie ako 3° , mohli sme použiť aproximáciu $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. Chybu určenia uhlu α sme odhľadli na 10%. Táto chyba je výrazne väčšia ako štatistická chyba merania a k jej hodnote sme dospeli uvážením nepresností pri zakresľovaní polohy tieňa (papier bol na zemi mierne nerovný, pri zakresľovaní fúikal vietor, ktorý mierne kýval špajdlou i podložkou).

Vybraný súbor dát (tabuľka 2) sme spracovali do grafu 3, ktorý zobrazuje, ako s veľkosťou časového intervalu narastá odklon tieňa špajdle od počiatočnej polohy. Tento nárast má jasnú lineárnu tendenciu. Graf sme preto nafitovali lineárnou funkciou

$$\alpha = At + B, \quad (2)$$

pričom nás zaujíma predovšetkým parameter A . Ten hovorí o závislosti pootočenia tieňa na čase. Parameter B má predovšetkým korekčný charakter. Fitovaním sme určili ich hodnoty ako

$$\begin{aligned} A &= (0,2310 \pm 0,0017)^\circ \cdot \operatorname{min}^{-1}, \\ B &= (0,126 \pm 0,045)^\circ. \end{aligned}$$

Z hodnoty parametru A je zrejmé, že tieň Slnka sa na papieri posunie o $0,231^\circ$ za minútu. Z toho jednoducho určíme, že otočenie o celých 360° , tj. jeden (synodický) deň bude trvať $\frac{360^\circ}{0,231^\circ \cdot \operatorname{min}^{-1}} = 1558,44$ minút, čo je 25,97 hodín.

Táto hodnota však ešte nie je konečná. Uhol α , ktorý sme merali, totiž vyjadruje otočenie okolo päty špajdle, a nie jej vrcholu. Preto musíme hodnotu α prepočítať vzhľadom na otočenie okolo vrcholu špajdle. Pre zjednodušenie sme uvažovali, že výška Slnka nad obzorom je nemenná.

Vrchol špajdle sme si označili V a jej päťu P . Vrchol špajdle V sa premietol na papier ako koniec tieňa, označili sme ho A , reps. B na začiatku a konci časového intervalu jedného merania. V takomto značení sme teda chceli prepočítať uhol $\alpha = |\angle APB|$ na uhol $\delta = |\angle AVB|$.

V prípade konštantnej výšky Slnka nad obzorom je úsečka $|AB|$ kolmá na rovinu APV . Potom z trigonometrie platí $\alpha = |AB|/|AP|$ a $\delta = |AB|/|AV|$ (nakoľko ide o malé uhly, aproximovali sme $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, resp. $\operatorname{tg} \delta \approx \delta$). Uhol δ sme vyjadrili pomocou uhlu α ako

$$\delta = \alpha \frac{|AP|}{|AV|}. \quad (3)$$

Do vzťahu (3) tak už len dosadíme namerané hodnoty. Vzdialenosť $|AP| = (57,4 \pm 0,3)$ cm (vyjadruje dĺžku tieňa špajdle) sme priamo namerali. Vzdialenosť $|AV| = (62,9 \pm 0,4)$ cm sme vypočítali pomocou Pytagorovej vety z dĺžky špajdle l a z dĺžky jej tieňa. Z toho pokiaľ za uhol α dosadíme uhlový posun Slnka za jednu minútu (tj. hodnotu parametru A z rovnice (2), dostaneme uhol $\delta = (0,2108 \pm 0,0021)^\circ$ vyjadrujúci hodnotu uhlového posunu Slnka korigovanú k vrcholu špajdle. Nami nameraná výsledná hodnota dĺžky dňa tak vychádza $(28,5 \pm 2,8)$ hodín.

Tab. 1: Namerané hodnoty otočenia tieňa špajdle α za zvolené časové intervaly t .

Meranie	$\frac{t}{\text{min}}$	$\frac{\alpha}{\circ}$
1	7	1,774
2	5	1,141
3	7	1,774
4	5	1,267
5	9	2,027
6	8	2,027
7	7	1,521
8	7	1,647
9	5	1,267
10	7	1,394
11	6	1,394
12	6	1,267
13	6	1,141

Tab. 2: Otočenie tieňa špajdle α od počiatočnej polohy v priebehu 1 hodiny.

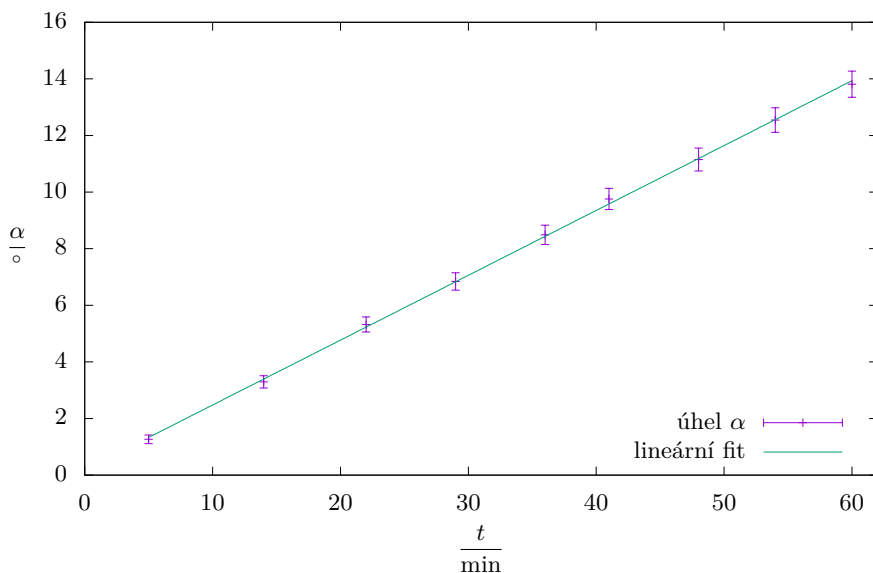
Meranie	$\frac{t}{\text{min}}$	$\frac{\alpha}{\circ}$
1	5	1,27
2	14	3,29
3	22	5,32
4	29	6,84
5	36	8,49
6	41	9,76
7	48	11,15
8	54	12,55
9	60	13,81

Diskusia

Je zrejmé, že výsledná hodnota sa výrazne líši od reálneho synodického dňa (tj. 24 hodín). Túto diskrepanciu pravdepodobne spôsobuje hrubá systematická chyba. Ako hneď prvú musíme zohľadniť chybu, ktorú spôsobila úvaha, že Slnko sa pohybuje počas celého merania v rovnakej výške nad obzorom.

Ďalšiu veľkú nepresnosť spôsobila nestabilne umiestnená podložka. Vzhľadom na to, že podložka tvorená tvrdým výkresom bola položená na trávinatej ploche, nerovnosti spôsobovali problém pri správnom zakreslení tieňa špajdle. Problémy tiež spôsoboval vietor, ktorý jednak rozkýval špajdlu a mohol mierne zmeniť jej smer vzhľadom na podložku, zároveň tiež rozvlnil upevnenú podložku, čím opäť spôsoboval nepresnosti v zakreslení tieňa. Chybu do výsledku určite zanesla aj nie presne kolmá poloha špajdle.

Navyše, tieň špajdle bol hrubý, čo spôsobilo ďalšiu nepresnosť so zakreslením. Snažili sme



Obr. 3: Závislosť otočenia tieňa špajdle na dĺžke časového intervalu.

sa značiť stred tieňa, čo sa nám však nie vždy mohlo rovnako podať. Čas sme merali na celé minúty, pretože zakresľovanie trvalo niekoľko sekúnd (predovšetkým kvôli nedostatočne pevnej zemi pod podložkou), no meranie sme vždy vykonávali okolo celej minúty, teda chyba v meraní času sa nekumulovala.

Presnosť nášho výpočtu by sme mohli zvýšiť, keby sme pre každé meranie zaznamenali dĺžku tieňa špajdle, z čoho by bolo možné určiť výšku Slnka nad obzorom pre každé meranie. Išlo by však len o približné určenie, tieň konca špajdle bol totiž zle ohraničený. Pretože sme však použili relatívne dlhú špajdlu, ani pri použití dvoch výkresov sme sa nevyhli tomu, že koniec tieňa sa premietol mimo podložku určenú na jeho zakreslenie.

Presnosť nášho merania by sme mohli zvýšiť väčším súborom dát. Aby sme však neprekročili podmienku merania maximálne jednej hodiny, možnosti by boli dve. Jednou možnosťou je spraviť meranie, ktoré sme popísali vyššie, niekoľko krát po sebe a jeho výsledky štatisticky spracovať. Druhou možnosťou je nesčítat jednotlivé niekoľko minútové úseky merania spolu, ale priemerovať veľký súbor meraní o dĺžke niekoľko minút. Teoreticky, pri veľkej snahe, môžeme úseky merať aj celú hodinu a potom priemerovať tieto merania. V oboch prípadoch by sme sa nedopustili porušenia podmienky, pokiaľ nepoužijeme časový interval dlhší ako 1 hodina, prípadne nebudeme jednotlivé intervaly sčítavať do intervalu väčšieho ako 1 hodina.

Alteratívne spôsoby určenia dĺžky dňa

Pri určovaní dĺžky dňa sme mohli taktiež použiť tieň nejakej budovy alebo väčšieho objektu. Meranie by však mohlo byť viac nepresné. Taktiež sme mohli zvoliť iné geometrické usporiadanie objektu, ktorý vrhá tieň, a tienidla. Bežne sa pri slnečných hodinách používa vodorovná

podložka a oska sklonená v směre zemskej osi. Na výpočty najjednoduchšie je tieň osky rovno-
bežnej so zemskou osou premietat na súosú valcovú plochu, v tomto prípade netreba prevádzat
žiadne korekcie a tieň by sa po povrchu valca mal pohybovat rovnomerne rýchlostou $15^\circ \cdot \text{h}^{-1}$.

Ďalšou metódou je sledovanie pohybu hviezd. Princíp je podobný ako v nami zvolenom
postupe so sledovaním Slnka. V tomto prípade by sme však merali priamo posun hviezd na ob-
lohe. Spôsobov na to je viacero, napríklad merať čas medzi hornými kulmináciami dvoch hviezd
o známych rektascenziách. Tu sa ale ako problém ukazuje nezávisle zmerať uhlové vzdialenosti
na oblohe, dajú sa však nájsť vo hviezdnych mapách.

Na záver spomenieme metódu využívajúcu Foucaultovo kyvadlo. Jeho konštrukcia však nie
je úplne jednoduchá a ľahko sa môže dopustiť veľkej chyby merania. Foucaultovo kyvadlo
poukazuje na rotáciu Zeme, ktorej dôsledkom je Coriolisova sila. Tá bude zdanlivo stáčať rovinu
kmitov kyvadla, čo môžeme namerať. Veľkosť tohto stáčania však závisí na zemepisnej šírke, na
rovníku sa rovina kmitov vôbec nestáča. V našich zemepisných šírkach je posun dostatočne veľký
už pri hodinovom meraní. Meranie by sme však i tak museli opakovať pre získanie dostatočne
veľkého štatistického súboru dát a pre presné určenie chyby nášho merania.

Poznámka na záver

Autor tohto riešenia je presvedčený o tom, že keby mal deň naozaj 28 hodín, konečne by stíhal
aspoň polovicu zo svojich plánov.

Daniel Dupkala

daniel.dupkala@fykos.cz

Úloha I.S ... rozjezd

10 bodů; průměr 5,72; řešilo 47 studentů

*Předtím, než se začneme věnovat umění analytické mechaniky, je vhodné si zopakovat klasickou
mechaniku na následující sérii příkladů.*

- Na vrcholu křišťálové koule dřepí homogenní kulička s velmi malým poloměrem. Kuličce udělíme libovolně malou rychlost a ta tak začne padat po povrchu koule. Kde se kulička odpojí od křišťálové koule? Uvažujte, že kulička neprokluzuje.*
- Místo koule z předchozí úlohy máme křišťálový paraboloid, daný rovnicí $y = c - ax^2$. Opět nás zajímá, kde se kulička od paraboloidu odpojí.*
- Cyklista odbočuje rychlostí v na cestu kolmou k té, po které právě jede. Zatáčku projede po části kružnice s poloměrem r . Jak moc se musí cyklista do zatáčky naklonit? Moment setrvačnosti kol bicyklu můžete zanedbat, cyklistu nahraďte hmotným bodem.*
Bonus Moment setrvačnosti kol nemůžete zanedbat.

- Kulička o hmotnosti m se nejdříve kutálí po povrchu křišťálové koule, potom se odpojí a začne padat volným pádem. Necht φ je úhel, o který se kulička po kouli odvalila. Zaměřme se na normálové síly, které působí na kuličku hmotnosti m v první části pohybu. Jednak je to normálová složka tíhové síly, kterou spočítáme jako*

$$F_{g_n} = mg \cos \varphi,$$

jednak je to reakční síla od velké koule. Dokud se kulička neodlepí, platí, že výslednice těchto sil je rovna dostředivé síle

$$F_d = \frac{mv^2}{R},$$

kde v je rychlost kuličky a R je poloměr křišťálové koule. Zde jsme zanedbali poloměr kuličky r , v případě přesnějšího výpočtu by ve jmenovateli byl samozřejmě výraz $R + r$. Rychlost kuličky v hloubce h pod původní polohou spočítáme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2} = mgh,$$

kde J je moment setrvačnosti kuličky vůči ose procházející těžištěm. Opět jsme využili faktu, že $r \ll R$, a proto pro úhlovou rychlost kuličky platí $\omega = v/r$. Jelikož je kulička homogenní, můžeme použít vzorec

$$J = \frac{2}{5}mr^2.$$

Pro rychlost kuličky tak dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{10gR(1 - \cos \varphi)}{7}},$$

kde jsme si h vyjádřili z geometrie situace jako $h = R(1 - \cos \varphi)$ (v počáteční poloze platí $\varphi = 0$).

Malá kulička se odpojí ve chvíli, kdy bude reakční síla od velké koule nulová, neboli když bude platit $F_{g_n} = F_d$. Po dosažení ze vztahů výše dostaneme rovnici

$$\cos \varphi = \frac{10}{17}.$$

Kulička se tedy od křišťálové koule odpojí v hloubce

$$h = R(1 - \cos \varphi) = \frac{7}{17}R$$

pod původní polohou. Vidíme, že výsledek nezávisí na poloměru kuličky r .

- b) Budeme postupovat obdobně jako v předchozí úloze. Kulička se ale nepohybuje po kružnici, takže nemůžeme dostředivou sílu vyjádřit tak snadno. Můžeme si ale v každém bodě parabolu lokálně nahradit kružnicí. Vezmeme obecnou rovnici kružnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ a zkusíme jí napasovat na zadanou rovnici paraboly $y = c - ax^2$. Přitom však budeme chtít, aby se v daném bodě shodovaly nejen hodnoty obou funkcí, ale i jejich první a druhé derivace. Pro kružnici máme (v první rovnici jsme vhodně zvolili znaménko odmocniny)

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= -\left(R^2 - (x - x_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0) = -\frac{x - x_0}{y - y_0}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(y - y_0) - (x - x_0)\frac{dy}{dx}}{(y - y_0)^2} = -\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(y - y_0)^3}. \end{aligned}$$

Pro parabolu máme o něco snazší práci a dostáváme

$$\begin{aligned} y &= c - ax^2, \\ \frac{dy}{dx} &= -2ax, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -2a. \end{aligned}$$

Máme tak soustavu tří rovnic pro tři neznámé R, x_0, y_0 , ze kterých vyjádříme

$$R = \frac{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}{2a} = \frac{(1 + 4a(c - y))^{3/2}}{2a} = \frac{(1 + 4ah)^{3/2}}{2a},$$

kde jsme zavedli hloubku pod původní polohou $h = c - y$. Pro dostředivou sílu platí

$$F_d = \frac{mv^2}{R},$$

kde rychlost opět spočítáme ze zákona zachování energie jako

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Dále musíme spočítat normálovou složku tíhové síly. Platí pro ni

$$F_{g_n} = F_g \cos \varphi,$$

kde $-\operatorname{tg} \varphi$ je směrnice tečny k parabole. Odtud dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi = 2ax.$$

Po pár jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\cos \varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4a^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4a(c - y))^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4ah)^{-\frac{1}{2}}.$$

Danou sílu tedy můžeme vyjádřit jako

$$F_{g_n} = mg(1 + 4ah)^{-\frac{1}{2}}.$$

Z rovnosti $F_d = F_{g_n}$, po dosazení ze vztahů výše, plyne

$$8ah + 7 = 0,$$

což nemá pro $a, h \geq 0$ řešení.

To znamená, že se kulička od paraboloidu nikdy neodlepí. K tomuto výsledku jsme mohli dojít i jednodušší úvahou: Pro vodorovný vrh určitou rychlostí se kulička bude pohybovat právě po dané parabole. V našem případě je ale počáteční energie nulová a navíc se část energie „ztrácí“ do valivého pohybu. Proto kulička nikdy během valení nebude mít dostatečnou energii na to, aby se od paraboloidu odlepila. Zadaná úloha tedy už od začátku neměla žádný fyzikální smysl.

- c) Popište situaci z pohledu cyklisty. Působí na něj tři síly – tíhová, odstředivá a reakce podložky. Jejich velikosti jsou

$$F_g = mg,$$

$$F_o = \frac{mv^2}{r}.$$

Tíhová síla působí svisle, odstředivá vodorovně. Cyklista se musí naklonit tak, aby jeho spojnice s místem, ve kterém se kolo dotýká země, byla rovnoběžná s výslednicí prvních

dvou sil. Potom bude moment sil, co které na něj působí, nulový. Pro odklon cyklisty od svislého směru tak platí

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi &= \frac{F_o}{F_g}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{v^2}{gr}.\end{aligned}$$

Bonus

Nyní je situace o něco složitější (viz. obrázek 4). Kola mají nějaký nenulový moment setrvačnosti, takže při pohybu vykazují moment hybnosti L . Jeho směr je samozřejmě kolmý na rovinu otáčení kol, takže je od země nakloněn o úhel φ . Vektor momentu hybnosti musí rotovat společně s otáčejícím se kolem. Svislá složka je stále stejně velká, zajímá nás tedy vodorovná složka, pro kterou platí

$$L_x = L \cos \varphi.$$

Za čas dt se cyklista pootočí o úhel $d\alpha = \omega dt$, kde pro úhlovou rychlost platí

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Tomu odpovídá přičtení vektoru změny momentu hybnosti o velikosti

$$|d\mathbf{L}| = L_x d\alpha = L_x \omega dt.$$

Z toho už můžeme spočítat velikost momentu síly, kterým na bicykl musíme působit, jako

$$|\mathbf{M}| = \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = L_x \omega = \frac{Lv}{r} \cos \varphi.$$

Nechť se hmotný bod, kterým jsme nahradili cyklistu, nachází ve výšce h nad zemí (když cyklista jede rovně a tudíž není nakloněný). Potom tíhová a odstředivá síla vytváří moment (vzhledem k bodu dotyku kola a podložky ve směru jízdy)

$$M = M_g + M_o = F_g h \sin \varphi - F_o h \cos \varphi = mgh \sin \varphi - \frac{mv^2 h}{r} \cos \varphi.$$

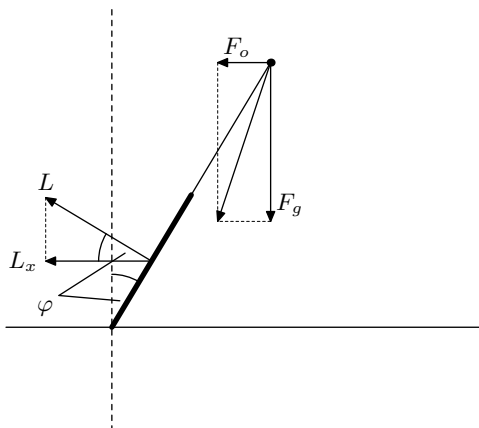
Proti těmto silám samozřejmě působí reakce podložky, která má stejnou velikost a opačný směr. Tato síla však působí v bodě dotyku kola a silnice, vůči kterému moment počítáme. Moment síly, kterým na kolo působí, tak bude nulový. Výslednice všech sil, působících na kolo, je tak stejně jako v předchozím případě nulová, ale výsledný moment nulový není. Máme tak rovnici

$$\frac{Lv}{r} \cos \varphi = mgh \sin \varphi - \frac{mv^2 h}{r} \cos \varphi,$$

ze které si už snadno vyjádříme hledaný úhel náklonu cyklisty v zatáčce

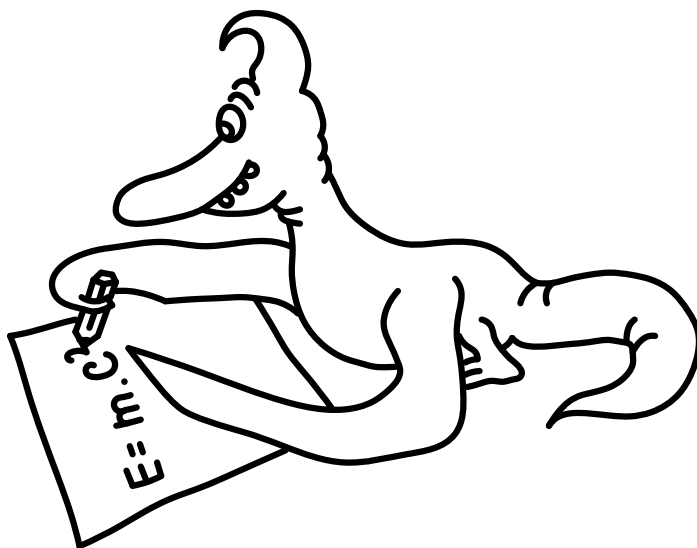
$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{v^2}{gr} + \frac{Lv}{mghr} \right).$$

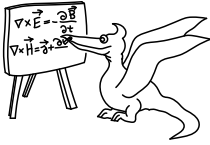
Vidíme, že dosazením $L = 0$ dostaneme stejný výsledek jako v základní části úlohy.



Obr. 4: Nákres situace z pohledu cyklisty.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz





Seriál: Lagrangeovy rovnice I. druhu

Úvod

Na úvod vás vítam pri čítaní druhej časti seriálu FYKOSu. Začiatkom druhej série sa ešte raz vrátíme k značeniu, kde si rýchlo ukážeme ako fungujú indexy, ktoré nám umožnia písať jednu rovnicu namiesto troch. Potom sa dostaneme k pojmu „väzba“, ktorý bol už párkrát spomenutý v predchádzajúcej časti. Zadefinujeme si ho a ukážeme si rôzne druhy väzieb a príklady na ne. Potom bude nasledovať jadro tejto časti seriálu, kde zavedieme Lagrangeove rovnice 1. druhu, ktorých použitie budeme demonštrovať aj na príklade z predchádzajúceho seriálu. Nakoniec mám pre vás pripravenú ukážku zaujímavého prepojenia medzi Lagrangeovými rovnicami a zákonom zachovania energie.

Značenie po druhýkrát

V mechanike (alebo vo všeobecnosti vo fyzike) vyzerá problém v nejakej súradnicovej sústave veľmi podobne. Napríklad pohybové rovnice hmotného bodu vo vákuu, na ktorý pôsobí nejaká vonkajšia sila F , vyzerajú

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned}$$

Prípadne, ak je tento bod v homogénnom gravitačnom poli v zápornom smere osy z , a navyše naň pôsobí sila F , budú vyzeráť takto

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z - mg. \end{aligned}$$

Častokrát chceme tento zápis zjednodušiť, lebo na vyjadrenie jednoduchšej fyzikálnej skutočnosti sme použili veľa miesta a zabralo nám to veľa času. Máme v zásade dve možnosti. Prvá je, že použijeme vektorový zápis

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F},$$

respektíve

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_g,$$

kde \mathbf{F}_g je vektor tiažovej sily, ktorého prvé dve zložky sú nulové a tretia je $-mg$.

Z rôznych dôvodov sa ale používa aj iný zápis, indexový. Má tú výhodu, že sa v ňom dajú po troche cviku jednoduchšie vidieť rovnice. Zároveň si človek nemusí dávať pozor na to, čo je vektor a čo nie je. (Čo je výhodou najmä ak sa majú nejaké dva vektory násobiť.) Totižto každý symbol v takto zapísanej rovnici chápeme ako skalár. Rovnica pre hmotný bod vo vákuu bez vonkajšieho gravitačného poľa by v tomto zápise vyzerala

$$m\ddot{x}_i = F_i.$$

V niektorých textoch sa môžete stretnúť s tým, že pozícia indexu hore a dole sa rozlišuje a znamená niečo iné. Pre naše potreby to ale rozlišovať nebudeme a budeme indexy písať vždy dole. V tomto prípade nie je ťažké prísť na to, čo presne znamená index i . Ak index i bude nadobúdať hodnoty od 1 do 3 (alebo ak chcete x, y, z), dostaneme postupne pre tri rôzne hodnoty indexu tri pohybové rovnice.

Hlavnú výhodu tohto formalizmu uvidíme vo chvíli, keď pomocou neho zapíšeme napríklad vektorový súčin. Vezmime si ako príklad moment hybnosti. Podľa definície je moment hybnosti

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor a \mathbf{p} je hybnosť. Po zložkách (ak x -ová zložka bude označená indexom 1 atď.) zapíšeme potom túto rovnicu

$$L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2,$$

$$L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3,$$

$$L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1.$$

Z čoho sa dá s trochou cviku uvidieť, ako by sa to zapísalo indexovo

$$L_i = r_j p_k - p_j r_k.$$

Odporúčam, aby ste si sami vyskúšali, že ak za (i, j, k) dosadíte postupne $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ a $(3, 2, 1)$ dostanete pôvodné rovnice.

Tí, ktorí si to overili, snád už vidia, ako funguje indexový zápis. My sa s ním stretneme v prípadoch jednoduchších, ako je vektorový súčin, tak sa vám snád čím skôr dostane pod kožu a bude pre vás zjednodušením.

Väzby

V predchádzajúcom dieli seriálu ako aj v úvode tohto sme viackrát spomenuli pojem väzba. Väzbou budeme myslieť nejakú podmienku, ktorá, okrem pohybových rovníc, obmedzuje pohyb nejakého telesa (v našom prípade hmotného bodu). Väzbou môže byť napríklad nejaká plocha, po ktorej sa hmotný bod pohybuje. Takýto bod sa teda bude riadiť pohybovými rovnicami, okrem toho sa ale musí pri pohybe vždy nachádzať na danej ploche. Vo všeobecnosti vieme väzbu matematicky zapísať. Obvykle zapisujeme väzbu pomocou jednej rovnice. Vo všeobecnosti môže väzba vyzeráť takto

$$U(x_i, \dot{x}_i, t) = 0.$$

Teda nejaká rovnica plochy, prípadne krivky závislá od rýchlosti hmotného bodu na nej a taktiež časovo premenná. (Všimnite si index i pri polohe a jej časovej derivácii. To značí, že rovnica väzby môže závisieť od všetkých zložiek polohy aj rýchlosti.) V našich prípadoch budeme ale uvažovať časovo nepremenné plochy alebo krivky nezávislé od rýchlosti hmotného bodu. Takéto plochy a krivky budeme zapisovať

$$U(x_i) = 0.$$

Typickým príkladom na väzbu môže byť napríklad auto pohybujúce sa po kruhovej pretekárskej dráhe. Ak je auto v porovnaní s veľkosťou dráhy zanedbateľne malé, môžeme sa baviť o hmotnom bode pohybujúcom sa po kružnici. Pohyb takéhoto auta ovplyvňujú vonkajšie vtisnuté sily (čo môže pôsobiť zavádzajúco, nakoľko sa v tomto prípade jedná o silu motora, ktorý

působí zvnútra auta) a zároveň aj väzbová sila, ktorá ho drží na pretekárskej dráhe v tvare kruhu. Nás momentálne zaujíma, ako napísať podmienku pre súradnice auta, teda väzbovú rovnicu pre pohyb auta. Bude sa evidentne jednať o rovnicu kružnice. Pre účely príkladu je irelevantné, aké bude mať stred kružnice súradnice. Ak predpokladáme, že jej polomer je r , je rovnica tejto kružnice v tvare, ktorý odpovedá nami uvedenému tvaru väzby

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0.$$

Ukážeme si ešte jeden veľmi častý príklad. Majme rovinu naklonenú pod uhlom α , po ktorej sa pohybuje hmotný bod. Zo základnej intuície je vidieť, že úlohu môžeme riešiť ako dvojrozmerný problém. Ďalej môžeme bez ujmy na všeobecnosti položiť začiatok súradnicovej sústavy do bodu $(0, 0)$ tak, aby prechádzal cez našu naklonenú rovinu, po ktorej sa pohybuje hmotný bod, a zároveň aby rovina zvierala s osou x uhol α . Rovina je teraz popísateľná ako lineárna funkcia premennej x , so smernicou rovnou $\operatorname{tg}(\alpha)$. Väzbová podmienka bude teda

$$y - \operatorname{tg}(\alpha)x = 0.$$

Na ďalšie precvičenie tvorenia väzieb môžete využiť napríklad prepočítanie si príkladov k seriálu, kde budete musieť napísať väzbovú rovnicu pre sústavu dvoch hmotných bodov.

Lagrangeove rovnice prvého druhu

Kombináciou Newtonových pohybových rovníc pre hmotný bod podrobený väzbe s rovnicou tejto väzby dokážeme dostať sústavu pohybových rovníc, ktorých riešenie budú pohybové rovnice pre hmotný bod. Ako ale zostaviť zo znalosti Newtonových rovníc a väzbovej (väzbových) rovníc nami hľadanú sústavu? To si ukážeme v tejto časti.

Majme trojicu pohybových rovníc

$$m\ddot{x}_i = F_i + R_i.$$

Ľavá strana značí druhú časovú deriváciu postupne troch zložiek vektorovej funkcie polohy a pravá strana značí súčet zložky sily \mathbf{F} , ktorá zodpovedá všetkým vtisnutým silám (napr. gravitačnej, elektromagnetickej, etc.), a zložky sily \mathbf{R} zodpovedajúcej väzbovej sile. Nás bude práve zaujímať, ako vyzerajú zložky sily \mathbf{R} .

Pre začiatok nás bude zaujímať smer tejto sily. Táto sila je sila, ktorou na hmotný bod pôsobí plocha/priamka po ktorej sa pohybuje. V každom bode si vieme teda túto silu rozložiť na zložku kolmú a zložku dotyčnicovú k rovine. Vo všeobecnosti musíme rátať s oboma zložkami, ale obyčajne rátame v príkladoch so zjednodušením, že trecia sila medzi väzbovou plochou a hmotným bodom je nulová. (Častokrát je to aj preto, lebo väzba nie je nič fyzické, ale vystihuje len vlastnosti nejakého fyzikálneho pôsobenia.) Trecia sila je vždy rovnobežná s rovinou pohybu. Ale keďže predpokladáme, že trecia sila je nulová, má sila \mathbf{R} vždy len normálovú (kolmú) zložku.

Z predchádzajúcej úvahy teda vieme, že smer väzbovej sily je kolmý na väzbovú plochu (prípadne krivku). Našťastie nám teraz posluží matematika, vďaka ktorej je známe, že ak máme zadanú nejakú väzbu (je jedno či v dvoch, troch alebo pokojne aj viacerých rozmeroch), tak po aplikovaní operátora *gradient* dostaneme vektor, ktorý je normálou – kolmicou k danej krivke/rovine v danom bode.

Jediné, čo o gradiente budeme potrebovať vedieť, je to, že sa jedná o operátor (niečo ako „nositeľ matematickej operácie“), ktorý skalárnej funkcii priradí vektorovú funkciu. Tá hovorí

o tom, v ktorom smere daná skalárna funkcia rastie najviac.⁷ Napríklad gradient teploty je smer, pri pohybe v ktorom sa teplota mení najviac. Gradient výšky terénu pri pohybe v horách je smer, v ktorom je z daného miesta najstrmšie do kopca. Ako sme ale uviedli, gradient je zároveň aj normálovým vektorom. Gradient funkcie $f(x_i)$ sa počíta a značí

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Každá priestorová zložka gradientu nejakej funkcie je teda derivácia danej funkcie podľa zodpovedajúcej priestorovej súradnice.

Teraz musíme doriešiť otázku veľkosti sily. Prenásobíme gradient väzby funkciou λ tak, aby mal veľkosť práve takú, akú má normálová zložka sily. λ môže byť samozrejme funkciou polohy a sama o sebe nemá žiadny fyzikálny význam. Keďže máme ale tri neznáme funkcie pre súradnice, tri pohybové rovnice a jednu rovnicu väzby, teda dokopy štyri rovnice, potrebujeme ešte jednu neznámu funkciu, aby bola sústava jednoznačne riešiteľná. Práve funkcia λ je našou štvrtou neznámou funkciou.

Keď už vieme, ako by mala väzbová sila vyzeráť, môžeme do rovnice

$$m\ddot{x}_i = F_i + R_i$$

dosadiť za R_i gradient väzby prenasobený neznámou skalárnou funkciou λ , čím dostaneme sústavu rovníc

$$m\ddot{x}_i = F_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Túto sústavu rovníc spolu s väzbovou rovnicou budeme označovať Lagrangeove rovnice prvého druhu. Počet neznámych je teraz rovnaký ako počet rovníc, teda sústava je riešiteľná. Ak nie analyticky, tak aspoň numericky. Riešenie týchto rovníc ale nie je nič priamočiare, čo by ste spravili bez zaváhania a na ničom sa nezasekli. Existuje ale návod, ktorý funguje pre riešenie tejto sústavy rovníc. Na príklade guľičky klzajúcej sa po guľi z predchádzajúcej série si ukážeme, ako sa takéto rovnice riešia.

Gulička na guľi

Sformulujme si teda odznova zadanie. Na vrchole gule sa nachádza guľička veľmi malých rozmerov (môžeme ju teda považovať za hmotný bod). Po udelení ľubovoľne malého impulzu sa guľička začne zošmykovať smerom nadol bez trenia (guľička sa teda nekotúľa). Otázka znie, v akej výške nad povrchom, na ktorom je veľká guľa umiestnená, sa malá guľička od veľkej gule oddelí.

Znova nám základná fyzikálna intuícia povie, že nezávisí na tom, po ktorom „poludníku“ sa guľička bude pohybovať, čo nám umožní úlohu riešiť v dvoch rozmeroch, teda ako bod zošmykujúci sa po kruhu. Naša väzba bude teda kružnica. Môžeme si všimnúť, že nastane čas, keď sa guľička od gule oddelí. Čo môžeme povedať o väzbovej sile v tomto okamihu? Keďže sa jedná o bod, kedy sa guľička od svojej väzby oddelí, zrejme na ňu väzbová sila v tom okamihu prestane pôsobiť. Tento poznatok si zapamätáme, pretože sa nám bude hodiť.

Nech má guľa polomer r . Teraz vieme jednoducho zostaviť rovnicu väzby

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

⁷ Na našej matematickej úrovni sa budeme tváriť, že operátor gradient aplikujeme *vždy* len na skalárnu funkciu a následne dostaneme vektorovú funkciu.

Následne spočítame postupne obe parciálne derivácie tejto rovnice a zostavíme Lagrangeove rovnice prvého druhu. Musíme ale pamätať aj na to, že v smere osy y pôsobí na guľičku aj gravitačná sila. Ak má guľička hmotnosť m , budú rovnice vyzeráť takto

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\lambda,$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2y\lambda.$$

Teraz prichádza časť, keď musíme použiť prvý trik. Je užitočné si ho zapamätať, lebo sa používa vždy pri podobných príkladoch. Trikom je použiť druhú časovú deriváciu rovnice väzby. V tomto okamihu odporúčam všetkým „Studentom Pilným“, aby si to, ako aj ďalšie kroky, sami skúsili niekde na papieri vedľa. Ja uvediem pre vašu kontrolu prvú deriváciu

$$\dot{f} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0,$$

ako aj pre nás potrebnú druhú deriváciu

$$\ddot{f} = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0.$$

Do tejto dvakrát zderivovanej rovnice väzby dosadíme za \dot{x} a \dot{y} vyjadrenie týchto veličín z Lagrangeových rovníc. Ďalej za súčet kvadrátov prvých derivácií súradníc dosadíme kvadrát rýchlosti

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Potom s využitím väzbovej podmienky $x^2 + y^2 = r^2$ vyjadríme z rovníc vyššie väzbovú silu

$$\lambda = \frac{m(gy - v^2)}{2r^2}.$$

Druhý trik, ktorý použijeme, je zákon zachovania mechanickej energie. Teda súčet kinetickej a polohovej energie guľičky položíme rovný počiatkovej energii.

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgy.$$

Z tohto vyjadríme v^2 , dosadením do predchádzajúcej rovnice pre λ dostávame

$$\lambda = \frac{mg(3y - 2r)}{2r^2}.$$

Následne vidíme, že väzbová sila bude nulová a guľička sa oddelí vo výške (nad stredom gule)

$$y = \frac{2}{3}r.$$

Čo je presne ten istý výsledok, ktorý by ste dostali pri použití klasického rozkladu síl.

Zákon zachovania energie

Na záver som si ešte pripravil pre čitateľov seriálu malú ukážku, ako tento matematický konštrukt väzieb vystihuje, ba dokonca až implikuje tak fundamentálnu fyzikálnu skutočnosť, akou je zákon zachovania energie. Ukážeme si to v dvoch rozmeroch, postup v trojrozmernom priestore je úplne analogický.

Vezmime Lagrangeove rovnice prvého druhu pre jeden hmotný bod v gravitačnom poli podrobený väzbe U .

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial U}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}$$

Znova si pomôžeme tak, že použijeme trik. A to taký, že prenášobíme prvú rovnicu \dot{x} a druhú \dot{y} . Následne rovnice sčítame, čím dostaneme rovnicu

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = -mg\dot{y} + \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} \right).$$

Ďalej spravíme trik, ktorý spočíva v tom, že celú ľavú stranu zapíšeme ako časovú deriváciu nejakej inej funkcie (schválne si skúste spočítať deriváciu podľa času, tak ako je to v rovnici (4) na ľavej strane, a uvidíte, že dostanete to, čo máme na ľavej strane v predchádzajúcej rovnici). Pravý člen pravej strany zapíšeme ako úplnú časovú deriváciu U prenášobenú λ , pre funkciu dvoch premenných $f(x(t), y(t))$ totiž platí

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt}.$$

Člen $-mg\dot{y}$ sa tiež ľahko zapíše ako časová derivácia, dostaneme teda

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right) = -\frac{d}{dt} (mgy) + \lambda \frac{dU}{dt}. \quad (4)$$

My ale vieme, že rovnica väzby je $U = 0$. Potom derivácia takejto väzby musí mať tiež hodnotu nula. Ak na zvyšné dva členy aplikujeme obrátene pravidlo pre deriváciu súčtu funkcií, dostaneme

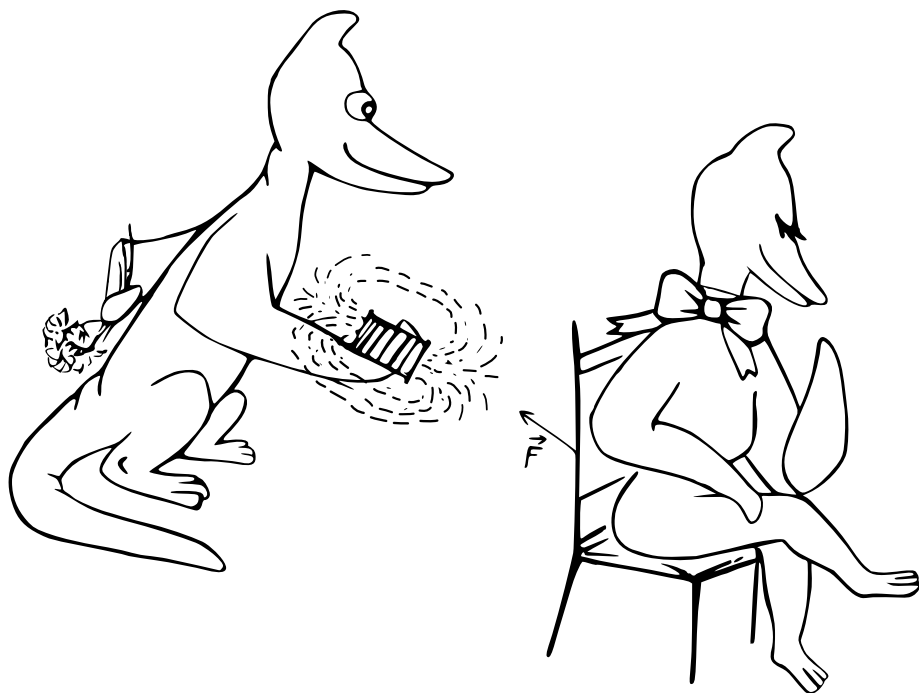
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \right) = 0.$$

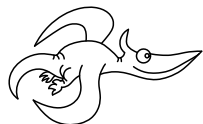
Po preintegrování rovnice podľa času

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy &= \text{konst}, \\ \frac{1}{2} mv^2 + mgy &= \text{konst}. \end{aligned}$$

Čo je samozrejme zákon zachovania energie ako ho poznáme.

Dúfam, že táto séria seriálu vám po minulej opakovacej sérii dala niečo nové, čo jedného dňa vyhodnotíte ako užitočné. Ak si prerátate príklady k seriálu, mali by ste si vďaka nim upevniť dnes nadobudnuté vedomosti. Chcel by som vás ale poprosiť, aby ste do vypracovaných úloh napísali spätnú väzbu na seriál, a to najmä v prípade, ak niečo nebolo vysvetlené dostatočne, prípadne sa vám zdá byť niečo nesprávne.





Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	6	6	7	7	8	10	12	10	66	100	66	
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	7	8	8	4	8	6	53	80	53	
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	4	7	2	8	–	10	7	44	79	44	
3.–4. <i>Benedikt Bareš</i>	G Dobruška	6	6	3	7	8	–	–	3	33	75	33	
3.–4. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	6	4	5	3	8	3	–	4	33	61	33	
5. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	6	2	5	3	5	1	3	–	25	45	25	
6. <i>Filip Zikeš</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	6	2	5	3	8	–	–	–	24	71	24	
7. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	2	4	–	8	–	–	–	20	74	20	
8. <i>Petr Šicho</i>	G Jana Keplera, Praha	6	2	2	3	2	2	1	–	18	32	18	
9.–10. <i>Sára Byšková</i>	G Jana Keplera, Praha	6	4	–	2	3	–	–	–	15	50	15	
9.–10. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	4	–	–	3	1	0	7	–	15	35	15	
11.–12. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	6	2	1	2	2	–	–	–	13	38	13	
11.–12. <i>Milan Marek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	4	2	–	3	1	–	–	3	13	35	13	
13. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	6	2	–	3	–	–	–	–	11	58	11	
14. <i>Adam Hůstava</i>	European School Luxembourg II	4	6	–	–	–	–	–	–	10	83	10	
15.–16. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	6	2	0	–	–	–	–	–	8	42	8	
15.–16. <i>Lukáš Veškrna</i>	G Jana Keplera, Praha	–	4	–	3	1	–	–	–	8	38	8	
17.–18. <i>Natália Kalinová</i>	G, P. Horova, Michalovce	6	–	–	–	1	–	–	–	7	50	7	
17.–18. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	4	–	–	3	–	–	–	–	7	54	7	
19.–24. <i>Jiří Antoňů</i>	G, Špitálská, Praha	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
19.–24. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
19.–24. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
19.–24. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	4	2	–	–	–	–	–	–	6	50	6	
19.–24. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
19.–24. <i>Jan Šuráň</i>	G, Špitálská, Praha	4	2	–	–	–	–	–	–	6	50	6	

Kategorie druhých ročníků


jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	6	6	7	7	8	10	12	10	66	100	66	
1. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	6	2	5	4	8	2	12	8	47	71	47	
2.–3. Martina Daňková	Klasické a španělské G, Brno	6	2	–	4	8	3	12	4	39	66	39	
2.–3. Adam Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	6	6	6	7	8	–	–	6	39	89	39	
4. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	4	3	–	4	11	4	38	66	38	
5. Elena Chocholaková	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	8	–	4	11	–	35	85	35	
6. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	2	4	3	8	2	8	–	33	59	33	
7.–9. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	6	2	2	2	4	–	12	–	28	61	28	
7.–9. Jan Klivan	G, Dačice	4	6	3	3	8	–	–	4	28	64	28	
7.–9. Marco Souza de Joode	G Nad Štolou, Praha	6	4	7	3	7	1	–	–	28	64	28	
10. Karolína Letochová	G, Šternberk	6	4	5	–	–	5	2	4	26	51	26	
11. Jan Červeňan	G J. Pivečky, Slavičín	6	6	5	3	2	1	–	–	23	52	23	
12.–14. Radek Lacko	G Komenského, Havířov	4	2	5	2	–	–	6	–	19	50	19	
12.–14. Šárka Štěpánková	G J. Ressela, Chrudim	6	2	–	–	8	3	–	–	19	63	19	
12.–14. Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	7	–	–	–	–	19	100	19	
15. Martin Polyácko	G Alejová, Košice	6	2	5	2	–	–	–	–	15	58	15	
16. Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	6	2	6	–	–	–	–	–	14	74	14	
17. Jarmila Terpáková	G L. Svobodu, Humenné	6	–	–	7	–	–	–	–	13	100	13	
18. Gabriel Ščurka	ŠpMNDaG, Bratislava	6	2	2	–	–	–	–	–	10	53	10	
19. Daniel Czinege	SPŠ chemická, Ostrava	4	4	–	1	–	–	–	–	9	47	9	
20. Lucia Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	8	–	–	–	–	8	114	8	
21.–23. Vojtěch Janota	G, Strakonice	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
21.–23. František Krůs	Masarykovo G, Plzeň	4	2	–	–	–	0	–	–	6	27	6	
21.–23. Daniel Perout	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	–	–	–	–	–	–	6	50	6	

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	„%“	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	3	3	7	7	8	10	12	10	60	100	60	
1. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	7	8	8	4	14	10	57	95	57	
2.–3. Ronald Doboš	G Poštová, Košice	3	3	8	4	9	6	8	10	51	85	51	
2.–3. Martin Vavřík	G, Šumperk	3	3	6	3	8	6	14	8	51	85	51	
4. Jaroslav Herman	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	7	8	8	2	6	9	46	77	46	
5. Radka Krížová	G J. Heyrovského, Praha	3	3	7	7	8	5	10	–	43	86	43	
6. Jakub Jobus	G Jura Hronca, Bratislava	3	3	5	3	8	4	6	9	41	68	41	
7. Martin Schmied	G, Jihlava	3	1	7	3	8	3	5	10	40	67	40	
8.–9. Jan Obořil	Klasické a španělské G, Brno	3	1	6	5	8	–	6	8	37	74	37	
8.–9. Jiří Zelenka	G Z. Wintra, Rakovník	3	3	5	3	6	3	7	7	37	62	37	
10. David Kománek	G, Špitálská, Praha	3	3	7	3	8	–	9	3	36	72	36	
11. Jaroslav Scheinpflug	G Jírovcova, České Budějovice	3	1	5	7	5	2	6	5	34	57	34	
12. Lukáš Hronek	G, Pisek	2	3	7	–	8	–	–	11	31	100	31	
13. Jan Divila	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	2	5	4	3	3	6	3	29	48	29	
14. Matěj Krátký	PORG, Praha	3	3	7	3	3	–	–	8	27	71	27	
15. Jakub Strnad	Klvaňovo G Kyjov	3	1	3	3	8	4	–	3	25	52	25	
16. Jan Benda	G, Litoměřická, Praha	2	1	5	2	8	–	–	6	24	63	24	
17.–18. Petra Pálkováčsová	G, Nové Zámky	3	2	2	3	8	2	2	1	23	38	23	
17.–18. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	7	3	8	–	–	5	23	72	23	
19.–20. Josef Polášek	G Jana Keplera, Praha	3	1	–	–	8	2	3	5	22	48	22	
19.–20. Pavla Rudolfová	G, Vídeňská, Brno	3	–	–	8	–	–	11	–	22	96	22	
21.–22. Rachel Johnson	Richardson High School, USA	1	2	6	3	2	4	3	–	21	42	21	
21.–22. Jakub Pravda	ŠpMNDaG, Bratislava	3	2	7	–	4	–	5	–	21	64	21	
23. Kryštof Jasenský	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	3	7	3	–	–	1	2	19	45	19	
24. Kateřina Barotová	G, Olomouc-Hejčín	3	1	3	3	–	–	8	–	18	56	18	
25.–27. Veronika Hendrychová	G, Turnov	3	1	7	3	–	2	–	–	16	53	16	
25.–27. Minh Khoi Ho	Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam	3	1	4	–	8	–	–	–	16	76	16	
25.–27. Filip Zukal	G, Blansko	2	1	3	2	1	2	3	2	16	27	16	
28. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	3	–	–	3	6	–	–	–	12	67	12	
29. Daniel Krátký	G, Trutnov	3	–	5	2	–	–	–	–	10	59	10	
30.–31. Kateřina Roupová	G, Blansko	2	1	3	2	0	–	1	–	9	23	9	
30.–31. Milan Tichavský	Slezské G, Opava	3	3	–	3	–	–	–	–	9	69	9	
32. Matěj Holubička	Zemědělská akademie a Gymnázium	3	–	–	3	–	–	–	–	6	60	6	
33. Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	3	–	2	–	–	–	–	–	5	50	5	
34. Lucía Krajčoviechová	G Jura Hronca, Bratislava	3	1	–	–	–	–	–	–	4	67	4	

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	3	7	7	8	10	12	10	60	100	60	
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	3	2	6	6	8	8	14	9	56	93	56	
2. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	1	7	7	8	–	14	10	50	100	50	
3. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	3	2	6	–	8	–	12	10	41	95	41	
4.–5. <i>Vojtěch Klimeš</i>	G, Třeboň	3	1	4	3	8	5	12	4	40	67	40	
4.–5. <i>Martin Vaněk</i>	G, Vysoké Mýto	3	2	7	7	8	5	–	8	40	83	40	
6. <i>Marie Grunová</i>	G, Moravský Krumlov	3	2	6	3	8	2	11	2	37	62	37	
7. <i>Tomáš Drobil</i>	G, Dačice	3	3	6	3	8	2	11	–	36	72	36	
8.–9. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	3	2	5	3	8	1	5	7	34	57	34	
8.–9. <i>Filip Koňářik</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	3	2	7	8	7	–	–	7	34	89	34	
10. <i>Matej Moško</i>	G Grösslingova, Bratislava	3	3	5	4	8	3	–	7	33	69	33	
11. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	3	1	5	4	8	–	–	7	28	74	28	
12. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	3	–	–	4	8	8	–	4	27	71	27	
13. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	3	1	5	3	8	–	–	4	24	63	24	
14. <i>Vojtěch Ulman</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	3	2	2	3	2	1	6	4	23	38	23	
15. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	3	3	5	–	8	–	–	–	19	90	19	
16.–17. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	3	1	5	3	–	2	–	4	18	45	18	
16.–17. <i>Andrej Rendek</i>	G, Dubnica n. Váhom	3	1	2	3	1	3	3	2	18	30	18	
18. <i>Kristián Matuščík</i>	G, Benešov	3	–	–	3	2	4	5	–	17	43	17	
19. <i>Miroslav Horský</i>	G, Českolipská, Praha	2	2	–	2	8	–	–	2	16	52	16	
20. <i>Domínik Majkus</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	2	2	4	3	2	–	–	–	13	46	13	
21.–22. <i>Štěpán Tichý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	3	1	–	3	2	–	–	–	9	43	9	
21.–22. <i>Tadeáš Wilczek</i>	G F. Živného, Bohumín	2	1	3	3	–	–	–	–	9	45	9	
23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	8	–	–	–	8	100	8	
24.–26. <i>Vratislav Besta</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	1	–	3	2	–	–	–	6	33	6	
24.–26. <i>Bernadeta Maříková</i>	G, Český Krumlov	3	1	–	2	–	–	–	–	6	46	6	
24.–26. <i>Marek Talíř</i>	G, Český Krumlov	3	–	–	3	–	–	–	–	6	60	6	
27. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	3	–	–	2	–	–	–	–	5	50	5	
28. <i>Marek Božon</i>	G, Karviná	–	–	–	3	–	–	–	–	3	43	3	
29. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	1	1	–	–	–	–	–	–	2	33	2	

**FYKOS****UK, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****18000 Praha 8**www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.