

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

a je to tady! Blížíme se do finále 32. ročníku FYKOSu, což znamená, že máte poslední šanci vylepšit svoje dosavadní skóre a zlepšit tak svoji pozici v celkovém pořadí. Motivací vám může také být podzimní soustředění, na které se můžete dostat na základě vašich výsledků v druhém pololetí. Již za necelý měsíc proběhne jarní soustředění, na kterém se setkáme s nejlepšími řešiteli prvního pololetí, a věříme, že si ho společně s námi skvěle užijete! :)

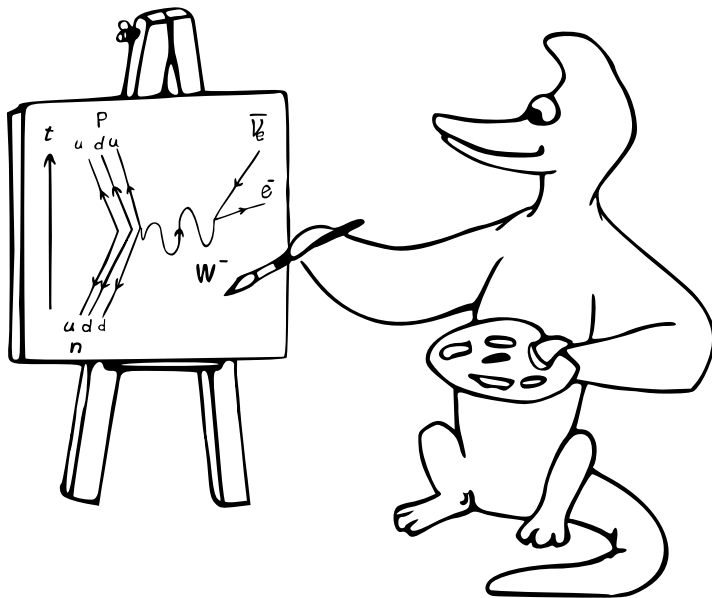
Těm z vás, kteří už jsou v maturitním ročníku, přejeme hodně štěstí u maturit i u přijímacích zkoušek, ať se dostanete na svou vysněnou vysokou školu. Jdete-li na Matfyz, rádi vás uvidíme v organizátorských řadách! Mladším ročníkům připomínáme, že budete-li úspěšnými řešiteli FYKOSu a půjdete-li na Matfyz, budou vám na něj odpuštěny přijímací zkoušky!

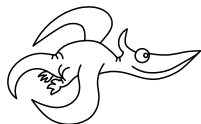
V šesté sérii se budeme zabývat geometrickou optikou, pokusíme se vyřešit problém suché silnice při dešti či měřit koeficient tření a mnoho dalšího! Poslední díl seriálu se bude zabírat dalším pilířem, na kterém stojí teoretická mechanika – Hamiltonův formalismus.

Za chybějící řešení problémové úlohy se omlouváme, brzy bude zveřejněno na internetu.

Přejeme vám hodně štěstí v řešení poslední série a budeme se těšit na viděnou! :)

Organizátoři





Zadání VI. série



Termín uploadu: 30. 4. 2019 23.59

Termín odeslání: 29. 4. 2019

Úloha VI.1 ... sebeosvícení

3 body

Svítíme na zrcadlo pod úhlem $\alpha = 15^\circ$ vůči kolmici. Chceme, aby se nám paprsek vracel zpátky do zdroje. Máme skleněný hranol s indexem lomu $n = 1,8$. Jaký musí být lámavý úhel η v závislosti na α a n , pokud situace vypadá jako obrázku? Předpokládejte, že okolní prostředí tvoří vzduch s indexem lomu n_0 .

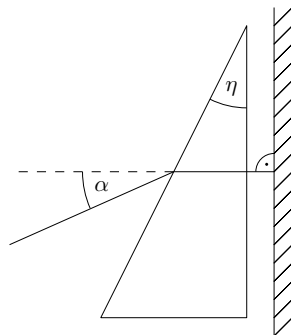
Nápověda

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

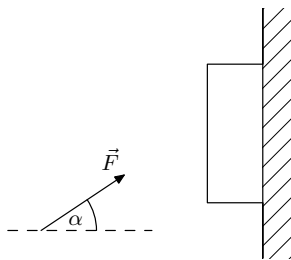
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right).$$



Úloha VI.2 ... knihomol

3 body

Vítek trávil čas v knihovně. Kvůli jeho neobratnosti jedna kniha spadla z regálu a on ji rychlým pohybem ruky stačil přimáčkнуть ke stěně. Na knihu působí silou F pod úhlem α , viz. obrázek. Kniha má hmotnost M a součinitel smykového tření mezi knihou a zdí je μ . Naleznete podmínku pro sílu, při které kniha zůstane nehybná, a určete hraniční úhel α_0 , po jehož překročení již není možné knihu udržet.



Úloha VI.3 ... dostřík

6 bodů

Hladina 98 % kyseliny sírové v lahvi sahá do výšky h . V určitém místě kolmo na stěnu nádoby vyvrtáme velmi malý otvor a kapalina začne vytékat ven. Do jaké maximální vzdálenosti od lahve může kyselina dostříknout ze všech možných poloh díry? Nádoba stojí na vodorovné rovině.

Úloha VI.4 ... lano

7 bodů

Přes břevno fotbalové branky (vodorovnou válcovou tyč) přehodíme dlouhé lano. Když bude jeden konec lana právě třikrát delší než druhý (příčměž oba budou viset volně ve vzduchu), lano

samovolně sklouzne. Nyní lano kolem břevna jednou obtočíme (čili bude „ohnuté“ o úhel 540°). Kolikrát teď může být jeden konec delší než druhý, aby lano nesklouzlo?

Úloha VI.5 ... gumová houpačka

9 bodů

Matěje začaly nudit klasické houpačky, které jsou na dětských hřištích a lze se na nich houpat pouze dopředu a dozadu. Proto vymyslel vlastní atrakci, na které se bude houpat nahoru a dolů. Mezi dva stejně vysoké body ve vzdálenosti l natáhne gumu s klidovou délkou l . Následně se posadí přesně doprostřed gumy, přičemž se její střed vychýlí dolů o vzdálenost h . Nyní se velmi lehce odstrčí směrem nahoru a začne se houpat. Určete periodu malých kmitů.

Úloha VI.P ... dálničně-bezpečnostní problém

10 bodů

- Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby byla silnice pod auty suchá, pokud prší?
- Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby na silnici nebyl žádný sníh a led, pokud sněží? Teplota dopadajícího sněhu je konstantní a srovnatelná s okolím, několik málo K pod 0°C .

Uvažujte, že prší nebo sněží nějaký konstantní objem vody na jednotku plochy za jednotku času.

Úloha VI.E ... kluzká

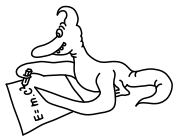
12 bodů

Najděte dvě rovné plochy ze stejného materiálu a změřte, jaký je mezi nimi koeficient tření. Následně zjistěte, jak se tento koeficient změní, když mezi plochy dáte nějakou sypkou nebo kapalnou látku. Můžete použít vše od vody a oleje, přes med a roztavenou čokoládu až po mouku a písek. Měřte pro alespoň 4 různé látky. Hodně pozornosti věnujte diskuzi výsledků a především toho, které vlastnosti použitých látek měly na výsledek největší vliv.

Úloha VI.S ... opakovacia

10 bodů

1. Majme klasické matematické kyvadlo, ktoré vychýlime zo stabilnej polohy o 120° . Dĺžka závesu kyvadla je po celý čas konštantná, záves je nehmotný a na jeho konci je upevnený hmotný bod s hmotnosťou m . Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre kyvadlo a pomocou nich určte, kedy je sila pôsobiaca na vlákno kyvadla najväčšia.
2. Vezmime klasické kyvadlo, rovnaké ako v prvej časti úlohy. K jeho hmotnému bodu pripevníme ďalšie kyvadlo s rovnakou zavesenou hmotnosťou ako aj rovnakou dĺžkou závesu. Zostavte lagrangian pre túto situáciu a určte aj Lagrangeove pohybové rovnice (2. druhu).
3. Majme hmotný bod, ktorý je schopný sa voľne pohybovať v smere osy x . Ďalej majme matematické kyvadlo, ktorého záves je upevnený v tomto bode. Nájdite lagrangian tejto sústavy a pomocou Hamiltonovej variačnej metódy nájdite príslušné pohybové rovnice tak, že postupne budete Gateauxove derivácie podľa všetkých zovšeobecnených premenných pokladať rovné nule. Celkovo tak každá nulová Gateauxova derivácia dá jednu pohybovú rovnicu. Porovnajte, či ste touto metódou dostali rovnaké pohybové rovnice ako pri použití štandardného odvodenia Lagrangeových rovníc z lagrangianu.



Řešení V. série

Úloha V.1 ... procházka u silnice

3 body; průměr 2,28; řešilo 46 studentů

Matěj jde podél silnice konstantní rychlostí a každých 7 minut potká tramvaj, která jede proti němu. Jednou za 10 minut ho mine tramvaj jedoucí opačným směrem. Tramvaje jezdí v obou směrech se stejnou frekvencí. S jakou? *Matěj se procházel.*

Uvažujme, že tramvaje jezdí konstantní rychlostí v s konstantními dráhovými rozestupy s . Jejich perioda tedy je

$$T = \frac{s}{v}.$$

Matějovu rychlost označíme u . Perioda tramvajů jedoucích proti němu bude

$$T_1 = \frac{s}{v + u}. \quad (1)$$

A pro periodu tramvajů jedoucích stejným směrem, jako Matěj jde, platí

$$T_2 = \frac{s}{v - u}. \quad (2)$$

Z (1) si vyjádříme Matějovu rychlost

$$u = \frac{s - T_1 v}{T_1},$$

kteřou dosadíme do (2) a dostáváme

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{s}{v - \frac{s - T_1 v}{T_1}}, \\ T_2 \left(2v - \frac{s}{T_1} \right) &= s, \\ 2v T_2 &= s \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right), \\ T &= \frac{s}{v} = \frac{2T_2}{1 + \frac{T_2}{T_1}} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 8,24 \text{ min.} \end{aligned}$$

Frekvence tramvajů je tedy $f = \frac{1}{T} \doteq 0,121 \text{ min}^{-1} \doteq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Z výsledného vztahu také vyplývá, že f je aritmetickým průměrem obou naměřených frekvencí.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha V.2 . . . hloubka vniku do koule

3 body; průměr 2,72; řešilo 32 studentů

Představte si, že máte podchlazenou plnou kovovou homogenní kouli, kterou vytáhnete z mrazáku, který máte nastavený na opravdu nízkou teplotu. Zajímalo by vás, jak rychle se bude zvyšovat její teplota, když ji umístíte do zahřáté místnosti. Protože by to jinak byl vysokoškolský problém, tak jsme pro vás úlohu zjednodušili. Ptáme se na odhad hloubky vniku (v metrech) „teplé oblasti“ do koule, který můžete získat rozměrovou analýzou. Přičemž známe relevantní parametry koule, konkrétně hustotu $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, měrnou tepelnou kapacitu $[c] = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a její součinitel tepelné vodivosti $[\lambda] = \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a zajímá nás závislost na čase $[t] = \text{s}$.

Karel se inspiroval problémem z Eötvös Competition.

Zadání je zjednodušením úlohy z jedné maďarské soutěže.¹ Na odkaze uvedeném v poznámce pod čarou naleznete i náznak komplikovanějšího řešení.

Nejdříve poznamenejme něco k rozměrové analýze. Jde o metodu, díky které můžeme někdy z pouhé znalosti jednotek relevantních veličin určit nějakou další veličinu se známou jednotkou. Bohužel pomocí této metody nezjistíme přesný vztah, protože nám zůstane nějaká bezrozměrná multiplikační konstanta, kterou musíme určit buď měřením, nebo poctivým fyzikálním odvozením. Také se tato metoda může hodit v nějakých úlohách FYKOSu.

Pro zajímavost - ve fyzice se používají také tzv. podobnostní čísla. Zejména v mechanice a dynamice tekutin je známé například Reynoldsovo číslo či Weberovo číslo. Jde o bezrozměrné veličiny, které nám říkají něco o tom, jestli je proudění turbulentní, jak se nám budou formovat bubliny atd. K určení těchto čísel můžeme také použít rozměrovou analýzu s tím, že hledaná veličina má být bezrozměrná.

Nyní k řešení samotné úlohy. Dle předpokladu má pro hloubku vniku x platit

$$x = C \rho^\alpha c^\beta \lambda^\gamma t^\delta.$$

Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} m &= (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})^\beta \cdot (\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})^\gamma \cdot \text{s}^\delta = \\ &= (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1})^\beta \cdot (\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{K}^{-1})^\gamma \cdot \text{s}^\delta. \end{aligned}$$

Využili jsme vztahy pro přepis jednotek energie a výkonu na základní jednotky SI ($\text{J} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ a $\text{W} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$). Vzhledem k tomu, že rovnice musí platit i pro rovnosti jednotlivých jednotek, rozepíšeme si ji do soustavy čtyř rovnic pro čtyři neznámé exponenty $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. V pořadí pro jednotky kg, m, s a K to jsou

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \gamma, \\ 1 &= -3\alpha + 2\beta + \gamma, \\ 0 &= -2\beta - 3\gamma + \delta, \\ 0 &= -\beta - \gamma. \end{aligned}$$

Když soustavu vyřešíme, dostaneme $\alpha = \beta = -1/2$ a $\gamma = \delta = 1/2$, tedy výsledná rovnice pro hloubku vniku je

$$x = C \sqrt{\frac{\lambda t}{c\rho}}.$$

¹Peter Vankó: *Eötvös Competition - a small competition with great influence*, subkapitola 3.2. Dostupné z http://eik.bme.hu/~vanko/wfphc/Eotvos_comp_Vanko_paper.pdf

Tím jsme dostali požadovaný vztah a v rámci toho, že jde o jednoduchou úlohu na rozměrovou analýzu, dále hodnotu konstanty C neřešíme.

Komentáře k došlým řešením

Rozmerová analýza je veľmi efektívna metóda pre približný odhad správnosti tvaru výsledku alebo k rýchlej kontrole korektnosti nejakého vzťahu. Stretávame sa s ňou aj v bežnej praxi, nie len počas štúdia, a preto je dobré si ju osvojiť. Nakoľko však ide o približný odhad výsledku, nemali by sme zabudnúť, že reálna hodnota sa môže a často aj bude líšiť o nejaký číselný koeficient - bezrozmernú konštantu (jej bezrozmernosť je dôležitá, inak by nám to pokazilo rozmer výsledku). Vzhľadom na zadanie a povahu príkladu sme to však nebrali ako chybu. Viacerí z vás k výsledku prišli porovnaním vzťahov pre výpočet tepla - rovnicou vedenia tepla (niekedy nazývanou aj Fourierov zákon) a vzťahom pre výpočet tepla potrebného na zvýšenie teploty telesa. Tento postup dal pri správnej úprave rovnaký, alebo len o číselný koeficient sa líšiaci výsledok, nie je však úplne fyzikálne správny, nakoľko tieto dva vzťahy spolu nutne nemusia súvisieť. Navyše, ide o veľmi veľké zjednodušenie celého deja, ktoré nebolo adekvátne odôvodnené. Pokiaľ ste však aj týmto spôsobom dospeli k správne výsledku, nebrali sme to ako chybu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha V.3 ... přepážka

6 bodů; průměr 4,40; řešilo 45 studentů

Představme si akvárium tvaru krychle o straně $a = 1$ m, které je vertikální přepážkou kolmou na stěny akvária rozděleno na dvě části. Dále uvažujme, že se tato přepážka může volně pohybovat ve směru kolmém na rovinu přepážky, ale ve zbylých dvou směrech se pohybovat nemůže. Také nemůže rotovat. Do jedné části akvária nalijeme $V_1 = 200$ l vody o hustotě $\rho_v = 1000$ kg·m⁻³ a do druhé části nalijeme $V_2 = 230$ l oleje o hustotě $\rho_o = 900$ kg·m⁻³. Jaká bude rovnovážná poloha přepážky? Jaké budou výšky hladin kapalin v jednotlivých částech akvária v rovnovážném stavu?

Bonus Najděte frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že přepážka má hmotnost $m = 10$ oz a že přesun vody probíhá bez jakéhokoli tření a odporu.

Michal čistil akvárium.

Označme vzdálenost přepážky od okraje první části x . Potom voda sahá do výšky

$$y_1 = \frac{V_1}{ax}$$

a olej sahá do výšky

$$y_2 = \frac{V_2}{a(a-x)}.$$

Sílu, kterou kapalina působí na přepážku, spočítáme jako součin tlaku v kapalině a plochy přepážky, v které tento tlak působí. Tlak v kapalině se s hloubkou mění podle vzorce $p = \rho g y$, což vede na integrál. Tomu se však můžeme vyhnout, když si uvědomíme, že nižší tlak v horní

polovině přepážky kompenzuje vyšší tlak v dolní polovině.² Můžeme tak uvažovat, že na celou přepážku působí stejný průměrný tlak. Pro sílu způsobenou tlakem vody dostáváme

$$F_1 = \frac{1}{2} y_1 \rho_v g a y_1 = \frac{V_1^2 \rho_v g}{2 a x^2},$$

zatímco pro sílu způsobenou tlakem oleje platí

$$F_2 = \frac{1}{2} y_2 \rho_o g a y_2 = \frac{V_2^2 \rho_o g}{2 a (a - x)^2}.$$

Z podmínky rovnováhy vyplývá rovnost sil, tedy $F_1(x_0) = F_2(x_0)$. Odtud dostáváme kvadratickou rovnici

$$\left(\frac{V_2^2 \rho_o}{V_1^2 \rho_v} - 1 \right) x_0^2 + 2 a x_0 - a^2 = 0,$$

jejímž řešením je

$$x_0 = \frac{a}{\left(\frac{V_2^2 \rho_o}{V_1^2 \rho_v} - 1 \right)} \left(-1 \pm \frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_v}} \right).$$

Fyzikální smysl má zřejmě kořen s +. Výsledkem úlohy tak je, že přepážka se ustálí ve vzdálenosti

$$x_0 = a \left(\frac{V_2^2 \rho_o}{V_1^2 \rho_v} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_v}} - 1 \right) = a \left(\frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_v}} + 1 \right)^{-1} \doteq 48 \text{ cm}$$

od stěny první části akvária. Výšky kapalin obou částech akvária získáme dosazením za x do prvních dvou rovnic

$$y_1 = \frac{V_1}{a x_0} \doteq 42 \text{ cm},$$

$$y_2 = \frac{V_2}{a (a - x_0)} \doteq 44 \text{ cm}.$$

Bonus

Spočítejme potenciální energii soustavy s přepážkou na souřadnici x . Opět můžeme použít střední hodnotu výšky, ve které se kapaliny nachází. Dostáváme tak

$$V = V_1 \rho_v g \frac{y_1}{2} + V_2 \rho_o g \frac{y_2}{2} = \frac{g}{2a} \left(\frac{V_1^2 \rho_v}{x} + \frac{V_2^2 \rho_o}{a - x} \right).$$

Pro frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy x_0 platí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}.$$

²Exaktní výpočet by se provedl tak, že $dF = p(y)ady$, odkud vidíme, že se integruje lineární funkce, tedy vznikne faktor 1/2.

Pokud vám tento vzorec přijde cizí, zde je jeho odvození. Potenciál, který nám vyšel, je v okolí rovnovážné polohy zřejmě spojitá a nekonečně diferenciovatelná funkce, takže ji můžeme zapsat pomocí Taylorova polynomu:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{V'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{V^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 \dots$$

Zvolíme-li $V(x_0)$ jako nulovou hladinu, bude platit $V(x_0) = 0$. Dále, $V'(x_0) = 0$ z definice rovnovážného bodu. Další členy jsou postupně čím dál tím menší (pro x dostatečně blízká x_0), takže s jistou dávkou aproximace můžeme psát

$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Tento vzorec je však velmi podobný vztahu pro potenciál harmonického oscilátoru

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

Z toho už vidíme, že člen $V''(x_0)$ hraje roli tuhosti oscilátoru k a můžeme ho dosadit do známého vzorce

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nyní se vraťme k původnímu příkladu. První derivace potenciálu je

$$\frac{dV}{dx} = \frac{g}{2a} \left(-\frac{V_1^2 \varrho_v}{x^2} + \frac{V_2^2 \varrho_o}{(a-x)^2} \right),$$

další derivací dostáváme

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{g}{a} \left(\frac{V_1^2 \varrho_v}{x^3} + \frac{V_2^2 \varrho_o}{(a-x)^3} \right).$$

Teď už jen stačí dosadit do vzorce výše a máme výsledek $f \doteq 25 \text{ Hz}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha V.4 ... rozstřík

8 bodů; průměr 2,96; řešilo 26 studentů

Uvažujte volnou kapku vody s poloměrem R , kterou pomalu nabíjíte elektrickým nábojem. Najděte velikost náboje Q potřebného na to, aby sa kapka rozstříkla.

Karel chtěl, aby si pro potkana přišel Smrt. Ivo byl mírumilovnější.

Uvažujme nejdříve elektricky neutrální vodní kapku nacházející se ve vzduchu. Povrchové napětí lze chápat jako plošnou hustotu povrchové energie, tedy energii povrchové vrstvy kapaliny vztáženou na jednotkovou plochu. To způsobí, že kapka bude mít tendenci zaujmout tvar s nejmenším povrchem, tedy kouli s poloměrem R . Na kapku působí kapilární tlak p_k způsobený povrchovým napětím mezi vodou a vzduchem a tlak vzduchu odpovídající atmosférickému tlaku p_a . Oba tyto tlaky se uvnitř kapky sečtou na výsledný tlak $p_k + p_a$. Z Youngovy-Laplaceovy rovnice³ přímo plyne vztah pro kapilární tlak uvnitř sférické kapky

$$p_k = \frac{2\sigma}{R},$$

³Více se o ní můžete dočíst na https://en.wikipedia.org/wiki/Young-Laplace_equation.

kde σ je povrchové napětí mezi vodou a vzduchem.

Nyní nabijeme kapku nábojem Q tak pomalu, že ji můžeme považovat za vodivou, takže se nanesený náboj prakticky ihned rovnoměrně rozloží po jejím povrchu. Náboj na povrchu kapky vytvoří vně kapky elektrické pole, které bude silově působit na libovolnou malou plošku ΔS povrchu kapky a vytvoří tak tlak elektrického pole p_E .

Pokusme se určit velikost tlaku p_E . Označme η plošnou hustotu náboje na povrchu kapky, která je rovna

$$\eta = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Využijeme faktu, že elektrické pole sféricky symetricky rozloženého náboje je vně koule stejné jako elektrické pole bodového náboje Q umístěného ve středu koule. Naopak uvnitř kapky je elektrické pole nulové, protože se jedná o vodič. Vnější elektrické pole je tedy radiální a pro jeho velikost platí

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (3)$$

kde $r > R$ je vzdálenost od středu kapky a ϵ_0 je permitivita vakua. Pro výpočet tlaku p_E potřebujeme zjistit, jakou silou působí elektrické pole na malou plošku ΔS s nábojovou hustotou η . Komplikace je v tom, že do výsledného elektrického pole přispívá i náboj na malé plošce ΔS , jehož příspěvek musíme odečíst. Zajímá nás totiž, jakou silou působí na náboj na malé plošce ΔS elektrické pole od zbytku koule.

Využijeme principu superpozice. Označme $E_{\Delta S}$ velikost elektrické intenzity způsobené nábojem na malé plošce ΔS v blízkosti této plošky. Vektor elektrické intenzity je zřejmě kolmý na rovinu plošky a míří směrem od povrchu této plošky (uvnitř koule směřuje do středu a vně koule směřuje od středu koule). Důležité je, že toto pole je v obou případech stejně velké. Elektrické pole nábojů na zbylé části koule uvažujeme v blízkosti plošky konstantní s velikostí E' . Uvnitř i vně má stejnou velikost a směřuje od středu koule. Teď využijeme toho, že výsledná elektrická intenzita uvnitř koule je nulová,

$$E' - E_{\Delta S} = 0.$$

Velikost výsledného pole nad ploškou je potom $E' + E_{\Delta S} = 2E_{\Delta S} = 2E'$. Srovnáním s rovnicí (3) dostáváme

$$2E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

odkud jednoduchou úpravou získáme explicitní vztah pro výpočet velikosti elektrického pole od zbytku koule v oblasti plošky ΔS ,

$$E' = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Tlak elektrického pole již spočítáme snadno jako podíl velikosti síly působící na náboj na malé plošce a velikosti dané plošky

$$p_E = \frac{E' \eta \Delta S}{\Delta S} = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q^2}{R^4}.$$

Uvědomme si, že p_E má opačný směr než kapilární tlak, neboť se souhlasné náboje v kapce zřejmě odpuzují. Podmínka rozstříku kapky je

$$p_E = p_k + p_a,$$

$$\frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q^2}{R^4} = \frac{2\sigma}{R} + p_a.$$

Odtud si už snadno vyjádříme velikost potřebného náboje

$$|Q| = 4\pi R^2 \sqrt{2\varepsilon_0} \sqrt{\frac{2\sigma}{R} + p_a}.$$

Ještě dodejme, že v zadání nebylo přímo řečeno, abychom úlohu řešili v zemské atmosféře za normálních podmínek. Proto připouštíme řešení nabitě kapky ve vakuu, které je o něco jednodušší. Řešení úlohy ve vakuu dostaneme tak, že položíme atmosférický tlak roven nule, neboli dostáváme rovnost

$$|Q| = 8\pi \sqrt{\sigma\varepsilon_0} R^3,$$

Úlohu lze také řešit vysokoškolským přístupem za použití Gaussova zákona pro tok elektrického pole uzavřenou plochou ve tvaru

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vnější normálový vektor k nějaké uzavřené ploše a Q je celkový náboj uvnitř této plochy. Aplikací Gaussova zákona na povrch nabitě kapky dostáváme rovnost

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

odkud pro velikost výsledného elektrického pole plyne

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

což je ve shodě s rovnicí (3) pro $r = R$. Abychom mohli odečíst od výsledného elektrického pole příspěvek od náboje na malé plošce ΔS , potřebujeme určit jeho velikost. Opět vyjdeme z Gaussova zákona. Uvažujme malý váleček obklopující na povrchu kapky právě plošku ΔS tak, že je jeho osa rovnoběžná s normálovým vektorem na plošce ΔS (míří v radiálním směru). Z Gaussova zákona plyne, že tok intenzity elektrického pole povrchem válečku je roven celkovému náboji uvnitř válečku vydělenému konstantou ε_0 . Tok pláštěm je zanedbatelný, protože výšku válečku můžeme uvažovat libovolně malou. Zbývá tedy tok podstavami, pro který platí

$$2\Delta S E_{\Delta S} = \frac{\eta \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

Jednoduchou úpravou získáme rovnici

$$E_{\Delta S} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Velikost elektrického pole E' v okolí plošky vypočteme podobně jako v první části

$$E' = E - E_{\Delta S} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Velikosti elektrických polí, které jsme spočítali pomocí Gaussova zákona, se shodují s již dříve získanými výsledky. K řešení úlohy bychom dále došli stejnými úvahami jako v první části.

Komentář k došlým řešením

Řada řešitelů se pokusila úlohu vyřešit užitím povrchové energie a energie elektrostatického pole. Chybně se však domnívala, že k rozstříknutí kapky dojde v okamžiku, kdy si budou dané energie rovný.

Úloha se dá řešit přes energie tak, že nejdříve nalezneme celkovou energii tvořenou energií elektrostatického pole a povrchovou energií, která je rovna

$$E_{\text{net}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} + 4\pi\sigma R^2.$$

Celková energie připadající na malou část kapky vyňaté malým prostorovým úhlem Ω je pak rovna

$$E_{\Omega} = \frac{E_{\text{net}}}{\Omega} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\Omega} \frac{Q^2}{R} + \frac{4\pi}{\Omega} \sigma R^2. \quad (4)$$

Sílu působící na tuto plošku určíme jako zaporně vzatý gradient energie E_{Ω} ,

$$\mathbf{F}_{\Omega} = -\text{grad } E_{\Omega} \equiv -\nabla E_{\Omega},$$

což je ve sférických souřadnicích pro sféricky symetrický problém rovno

$$\mathbf{F}_{\Omega} = -\frac{\partial E_{\Omega}}{\partial R} \mathbf{e}_R, \quad (5)$$

kde \mathbf{e}_R je jednotkový radiální vektor (ve směru souřadnice R). Dosazením výrazu pro energii E_{Ω} z rovnice (4) do rovnice (5) a zderivováním dostaneme

$$\mathbf{F}_{\Omega} = \left(-\frac{8\pi\sigma R}{\Omega} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0\Omega} \frac{Q^2}{R^2} \right) \mathbf{e}_R.$$

K rozstříknutí kapky pak dojde, bude-li síla \mathbf{F}_{Ω} směřovat vně kapku, neboli

$$-\frac{8\pi\sigma R}{\Omega} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0\Omega} \frac{Q^2}{R^2} \geq 0.$$

V mezním případě dostáváme pro velikost náboje Q rovnost

$$|Q| = 8\pi\sqrt{\sigma\epsilon_0 R^3},$$

což je minimální velikost náboje potřebná pro rozstříknutí kapky.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha V.5 ... odskakující hopík

9 bodů; průměr 5,32; řešilo 19 studentů

Tuhou koulí ve vzduchu roztočíme dostatečně velkou úhlovou rychlostí ω rovnoběžnou se zemí. Poté hopík pustíme z výšky h_0 na vodorovnou podložku. Od ní se odrazí do výšky h_1 a dopadne nedaleko původního místa dopadu. Určete vzdálenost těchto dvou bodů dopadu, jestliže je třecí koeficient mezi koulí a zemí f dostatečně malý. *Matěj si moc rád hraje s hopíkem.*

Z rovnic pro volný pád $h = \frac{1}{2}gt^2$ a $v = gt$ dostaneme rychlost v_0 , kterou koule dopadne na zem

$$v_0 = \sqrt{2h_0g}.$$

Koule dopadá přímo svisle, ale po odrazu bude mít jak svislou složku rychlosti v_y , tak vodorovnou složku v_x díky tření. Velikost v_y je taková, aby koule vyskočila do výšky h_1 , tedy

$$v_y = \sqrt{2h_1g},$$

Předpokládejme, že srážka trvá velmi malý čas $\Delta t = t_1 - t_0$. Hybnost ve svislém směru se během nárazu změní o

$$\Delta p_y = m(v_0 + v_y).$$

Protože změna hybnosti je rovna impulzu síly, můžeme říct, že pro svislou sílu F_y působící na kouli v průběhu nárazu platí

$$\Delta p_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt,$$

kde síla může být obecně závislá na průběhu srážky, tedy na času t . Horizontální třecí síla, která působí mezi koulí a deskou, je v každém okamžiku $F_x = fF_y$. Ze zadání vyplývá, že můžeme předpokládat, že třecí síla je tak malá, že nezastaví rychlou rotaci koule a ta tak během celé srážky neustále prokluzuje. Z toho si vyjádříme změnu hybnosti ve vodorovném směru

$$\Delta p_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt = \int_{t_0}^{t_1} fF_y dt = f \int_{t_0}^{t_1} F_y dt = f\Delta p_y.$$

Všimněme si, že jsme se nyní kompletně zbavili závislosti síly F_y na čase a také času Δt , který již ani není potřeba limitně zmenšovat k nule. V tomto triku spočívala veškerá záludnost této úlohy. Dále vyjádříme rychlost ve vodorovném směru v okamžiku po odrazu

$$v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{f\Delta p_y}{m} = f(v_0 + v_y).$$

Díky znalosti výšky h_1 jsme snadno schopni dopočítat, že celý skok koule (od prvního do druhého dopadu) trval čas

$$t = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Kombinací s v_x získáme doskočenou vzdálenost

$$s = v_x t = 2f(v_0 + v_y)\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2f\left(\sqrt{2h_0g} + \sqrt{2h_1g}\right)\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 4f(h_1 + \sqrt{h_0h_1}).$$

Je pozoruhodné, že výsledek nezávisí na momentu hybnosti koule, na gravitačním zrychlení a dokonce ani na počáteční úhlové rychlosti ω (pokud je dostatečně velká). Samozřejmě jen za docela silného předpokladu, že třecí koeficient je tak malý, že koule během dopadu prokluzuje.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha V.E ... třiceticentimetrový tón 12 bodů; průměr 5,96; řešilo 23 studentů

Každý někdy z nudy zkusil brknat na dlouhé pravítko vystrčené přes okraj lavice. Zvolte vhodný model závislosti frekvence na délce vysunutí za okraj lavice a experimentálně jej ověřte. Popište i další parametry pravítka.

Poznámka Pravítko ke stolu přitlačte tak, aby kmitala jen jeho vysunutá část.

Michal K. našel pravítko.

Teória

Po krátkom zmyslení sa nad problémom si môžeme uvedomiť, že rovnaký vzťah ako pre kmitajúce pravítko platí aj pre ladičku či konzolový nosník. Napríklad na⁴ môžeme nájsť hľadaný vzťah závislosti uhlovej frekvencie ω kmitov na dĺžke vysunutia L pravítka

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}},$$

kde E je Youngov modul pružnosti a ρ hustota materiálu, z ktorého je pravítko zhotovené, A je plocha kolmého prierezu pravítka, I je moment zotrvačnosti prierezu pravítka a $\alpha_n = \{1,875; 4,694; 7,885; \dots\}$ je číselná konštanta zodpovedajúca módu kmitov. Pre I podľa článku máme

$$I = \frac{bd^3}{12},$$

kde b je šírka a d je hrúbka pravítka. Pre frekvenciu kmitov potom máme

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\alpha_n^2}{4\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{3\rho L^4}}.$$

Frekvencia by teda na dĺžke vysunutia mala závisieť ako $f \propto L^{-2}$.

Meranie

Pri meraní bolo použité pravítko s „dĺžkou“ 30 cm šírky $s = (3,6 \pm 0,1)$ cm, hrúbky $d = (1,9 \pm 0,1)$ mm a hmotnosti $m = (23 \pm 1)$ g. Pri meraní sme ho položili na stôl tak, aby sa hrana stola nachádzala na dĺžke \tilde{l} stupnice, kde nula stupnice bola mimo stola. Vzdialenosť nuly stupnice od konca pravítka bola určená ako $\Delta l = (1,1 \pm 0,1)$ cm. Na stôl sme následne položili závažie (knihy), ktorého hrana koincidovala s hranou stola, čím sme pravítku v oblasti nad stolom zamedzili pohybu. Celkovo odhadujeme chybu merania dĺžky voľne kmitajúcej vysunutej časti pravítka na $l = \tilde{l} + \Delta l$ na $\sigma_l = 1,5$ mm.

Meranie samotné sme vykonali pomocou programu *Audacity* a mikrofónu na počítači, ktorý sme umiestnili tesne pod pravítko k hrane stola. Zaznamenávali sme teda zvuk úderov kmitajúceho pravítka do stola. Zo získaného záznamu intenzity na čase sme odčítali čas t medzi n po sebe idúcimi nárazmi, z čoho sme určili periódu kmitov ako $T = t/n$. Pre každú dĺžku vysunutia boli vykonané štyri merania. Namerané hodnoty sú zanesené do tabuľky 1 spolu s vypočítanými priemernými hodnotami periódy \bar{T} a jej štandardnou odchýlkou $\sigma_{\bar{T}}$.

⁴<http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=175&sim=1080&cnt=1>

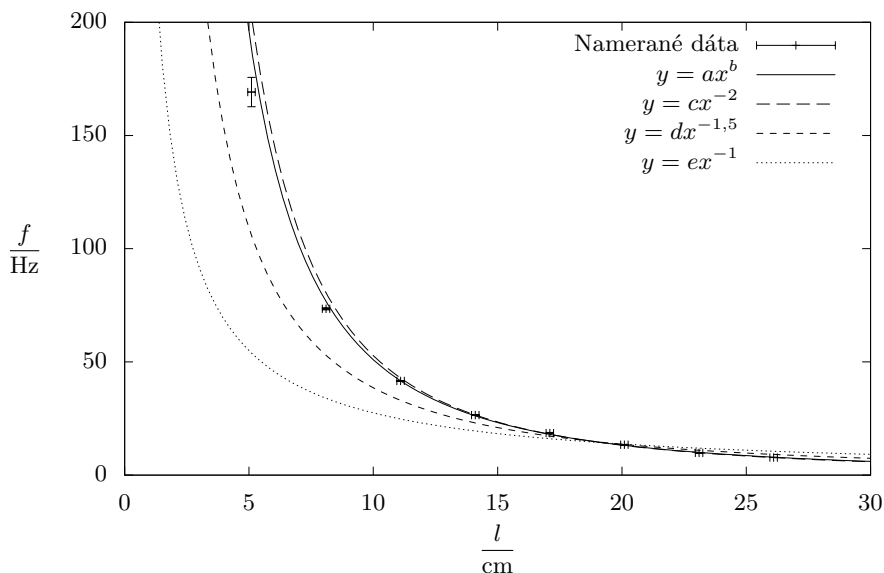
Tab. 1: Namerané periody kmitov pravitka.

\tilde{l} cm	l cm	n	t ms	T ms	\bar{T} ms	$\sigma_{\bar{T}}$ ms
25,0	26,1	9	1157	128,6	128,4	0,4
		7	898	128,3		
		8	1 031	128,9		
		9	1 151	127,9		
22,0	23,1	5	517	103,4	101,5	1,3
		7	708	101,1		
		3	303	101,0		
		9	905	100,6		
19,0	20,1	4	301	75,3	74,4	0,7
		4	299	74,8		
		1	74	74,0		
		3	221	73,7		
16,0	17,1	5	273	54,6	53,8	0,8
		16	849	53,1		
		13	693	53,3		
		5	272	54,4		
13,0	14,1	14	526	37,57	37,73	0,15
		14	527	37,64		
		6	227	37,83		
		9	341	37,89		
10,0	11,1	21	504	24,00	24,04	0,11
		17	411	24,18		
		18	433	24,06		
		25	598	23,92		
7,0	8,1	18	246	13,67	13,62	0,09
		18	244	13,56		
		19	257	13,53		
		14	192	13,71		
4,0	5,1	24	143	5,96	5,9	0,2
		11	68	6,18		
		22	129	5,86		
		22	124	5,64		

Z periód kmitov bola určená ich frekvencia ako

$$f = \frac{1}{T},$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_T}{T^2},$$



Obr. 1: Závislost frekvencie f kmitov pravítka na dĺžke vysunutia l .

ktorej závislosť bola vynesená do grafu 1. Týmito bodmi boli pomocou metódy najmenších štvorcov preložené nasledujúce závislosti

$$\begin{aligned}
 y_1 &= ax^b, \\
 y_2 &= cx^{-2}, \\
 y_3 &= dx^{-1,5}, \\
 y_4 &= ex^{-1},
 \end{aligned}$$

kde za x bola braná dĺžka v centimetroch a y frekvencia v kilohertzoch. Prvý fit vyjadruje všeobecný tvar hľadanej závislosti, druhá závislosť je závislosť nášho modelu, tretia a štvrtá sú pre porovnanie závislosti, ktoré sa objavovali v prišlých riešeniach. Hodnoty parametrov boli určené nasledovne

$$\begin{aligned}
 a &= 4,44 \pm 0,36, \\
 b &= -1,94 \pm 0,03, \\
 c &= 5,28 \pm 0,06, \\
 d &= 1,22 \pm 0,07, \\
 e &= 0,275 \pm 0,04.
 \end{aligned}$$

Vhodnosť fitu sa dá popísať napríklad pomocou RMS , strednej hodnoty kvadrátu rezidui, t.j. odchýlok nameraných hodnôt od fitu. Pre prvú závislosť $RMS = 1,392$, pre druhú $RMS = 1,56$, tretiu $RMS = 10,7$ a štvrtú $RMS = 33$.

Diskusia

Z hodnôt *RMS*, ale aj z grafu samotného, vidíme, že za správne sa dajú pokladať prvé dve závislosti. Exponent *b* prvej závislosti je ale značne nefyzikálny, preto ako správnu volíme druhú závislosť. Pre koeficient *c* máme po prevode do základných jednotiek $c = (0,528 \pm 0,006) \text{ m}^2 \cdot \text{Hz}$. Po porovnaní so vzťahom z teoretického úvodu by malo platiť

$$c_{\text{teor}} = \frac{1,875^2}{4\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{3\rho}}.$$

PVC, z ktorého je pravítko zhotovené, má modul pružnosti $E = 2,2 - 3,3 \text{ GPa}$ a hustotu⁵ $\rho = 1,15 - 1,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Z rozmerov pravítka a jeho hmotnosti vychádza hustota ako $\rho = (1\,280 \pm 90) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Po dosadení krajných hodnôt dostávame $c_{\text{teor}} = 0,36 - 0,53 \text{ m}^2 \cdot \text{Hz}$, teda nameraná hodnota zodpovedá PVC s vysokým Youngovým modulom, nízkou hustotou a hrubšiemu pravítku.

Nami nameraná závislosť je teda celkom dobre popísaná teoretickým modelom, no ako si z grafu môžeme všimnúť, pre malé dĺžky vysunutia teoretická závislosť neprechádza nameranými hodnotami. Toto môže byť spôsobené javmi odohrávajúcimi sa na hrane stola a pod závažím, ktoré by sa dali odstrániť pevnejším uchytením, čo by ale zamedzilo vzniku zvuku, pomocou ktorého sme závislosť merali. Lepšie uchytenenie by znížilo aj chybu určenia *l*. Frekvencia kmitov sa dala merať s pomerne vyššou presnosťou. Pri určení teoretickej hodnoty konštanty *c* spôsobuje veľký problém značný rozptyl hustôt a Youngových modulov PVC. Tento problém by sa dal vyriešiť zmeraním týchto veličín priamo pre pravítko.

Záver

Závislosť frekvencie kmitov pravítka *f* na dĺžke jeho vysunutia *l* sme určili ako

$$f = \frac{c}{l^2},$$

$$c = (0,528 \pm 0,006) \text{ m}^2 \cdot \text{Hz},$$

čo sa zhoduje s teoretickou závislosťou

$$f = \frac{1,875^2}{4\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{3\rho L^4}},$$

pre základný mód kmitov.

Poznámky k došlým riešením

Veľká väčšina z vás, ktorí úlohu merali pomocou zvukového záznamu, sa snažila určiť frekvenciu kmitov zo spektra, ktoré program *Audiacity* ponúkal. Avšak pri predvolenom nastavení sa frekvencie, s ktorými pravítko kmitá, ani nezobrazujú. V prípade, ak sa nastaví väčší frekvenčný rozsah, je možné frekvencie určiť aj zo spektra. Vzhľadom na malý počet zachytených periód je však signál pomerne slabý a široký. Preto bolo vhodnejšie frekvenciu odčítať priamo z intenzitnej závislosti. Mnohých z vás ale v spektre zviazol najvýreznejší signál, často pri frekvencii v stovkách hertzov, z ktorého ste zostavili hľadanú závislosť. Tento signál ale zjavne

⁵WolframAlpha

nepochádza od veľkých, okom viditeľných kmitov pravítka (Veď kto vidí okom 100 Hz?), ale od iného vlnenia, pravdepodobne zvuku po údere pravítka do hrany stola. Je zrejmé, že takýmto riešeniam som nemohol udeliť veľa bodov.

Niektorí sa tomuto problému vyhli a merali pomocou videozáznamu, ktorý však neumožňoval meranie pre malé vysunutia.

Zaujímavé boli aj rôzne teoretické modely. Od konštantnej rýchlosti šírenia impulzu ($f \propto l^{-1}$), cez úvahy s priehybom nosníka, ktoré často viedli na $f \propto l^{-1,5}$ až po správnu závislosť $f \propto l^{-2}$. Graf v riešení som okrem všeobecnej mocniny závislosti preto na ukážku preložil aj týmito závislosťami. Zaujímavé ale boli najmä tvrdenia riešiteľov, ktorým exponent mocninného fitu vyšiel okolo $-1,75$, že tým potvrdili predpokladanú závislosť, či už $f \propto l^{-1,5}$, alebo $f \propto l^{-2}$. Záverom, ak niečo nameriate, je vhodné si rozmyslieť, či získaný výsledok dáva fyzikálne zmysel.

Úloha V.S ... nebesko-mechanická

10 bodů; průměr 4,07; řešilo 14 studentů

1. *Mějme nějaké kosmické těleso s hmotností pěti Sluncí, okolo kterého se nachází sférický symetrický homogenní oblak plynu a prachu s hmotností dvou Sluncí a s průměrem 1 ly. Oblak začne kolabovat do centrálního kosmického tělesa. Zanedbejte vzájemnou interakci částic oblaku (kromě gravitace). Určete, jak dlouho bude trvat, než celý oblak zkolabuje do centrálního tělesa. Úlohu neřešte numericky.*
2. *V úvodu seriálu jsme řešili diferenciální rovnici pro pohyb částic v centrálním poli, při jejímž řešení jsme použili takzvaný Binetův vzorec. Ukažte, že tento vzorec skutečně řeší zadanou diferenciální rovnici.*
3. *Sestavte lagrangián pro soustavu Slunce-Země-Měsíc. Předpokládejte, že Slunce je nehybné. Země i Měsíc se pohybují jak pod vlivem Slunce, tak pod vlivem sebe navzájem. Při sestavování lagrangiánu se zamyslete nad tím, jestli používáte správný počet zobecněných souřadnic.*

1. *Predstavovať si celú situáciu budeme tak, že máme nejaký malý kúsok hmoty na okraji oblaku. Tento kúsok hmoty je priťahovaný gravitáciou centrálného telesa, ako aj gravitáciou zvyšku mraku. Keďže mrak je sféricky symetrický a homogénny, má ťažisko vo svojom strede, teda v centrálnom hmotnom telese. Celý oblak vieme teda nahraďiť hmotným bodom umiestneným v jeho ťažisku. (K tomuto predpokladu stačí sférická symetria, teda aj ak sa počas pohybu bude homogenita meniť, naša úvaha platí.) Z hľadiska malého kúska hmoty na okraji oblaku je teda problém rovnaký ako keby sa pohyboval v centrálnom poli jedného hmotného bodu o hmotnosti 7 hmotností Slhka. V tomto prípade môžeme preto použiť 3. Keplerov zákon.*

Kúsok hmoty sa teda bude podľa prvého keplerovho zákona pohybovať po elipse s ohniskom v centrálnom telese. Keďže má ale nulovú počiatočnú rýchlosť a pôsobí naň sila smerom do stredu, elipsa sa nám zredukuje na úsečku, ktorej ohniská budú na jej koncoch. Perióda „obehu“ nášho kúska hmoty bude podľa tretieho Keplerovho zákona

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (0,25 \text{ ly})^3}{7GM_{\text{S}}}}$$

kde M_S je hmotnosť Slnka. Nesmieme samozrejme zabudnúť, že keďže priemer oblaku je jeden svetelný rok a táto elipsa (zredukovaná na úsečku) má pol svetelného roka, tak potom je jej veľká poloos len štvrtina svetelného roka.

Polovica takto vypočítanej periódy je potom čas, ktorý zaberie kúsok hmoty dostať sa k centrálnemu telesu. Pre zadané hodnoty tento čas výjde 376 000 rokov.

Poznámka.

Vzhľadom na to, že celý oblak má na počiatku obrovský priemer by sa mohlo zdať, že bude hrať rolu konečná rýchlosť šírenia svetla, keďže sa gravitačné účinky šíria práve touto rýchlosťou. Častica na okraji oblaku teda zistí až o rok, že sa častica na druhej strane pohla. Keďže z výpočtu vychádza celkový čas pozorovaného deja v stotisícoch rokov, môžeme oproti tomu 1 rok bezpečne zanedbať a pri riešení neuvažovať. Taktiež netreba uvažovať relativistické javy spôsobené veľkou rýchlosťou pohybu, ktoré budú mať vplyv v posledných fázach kolapsu, ktoré ale tvoria zanedbateľnú časť celého procesu. Z toho istého dôvodu sme pri výpočte zanedbali aj rozmer centrálného objektu.

2. Pri dôkaze budeme postupovať vcelku priamočiari. Vezmeme želanú diferenciálnu rovnicu

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)$$

a miesto premennej $r(\varphi)$ dosadíme premennú $u(\varphi)$, kde $r = u^{-1}$ ako bolo uvedené v texte seriálu. Dosadením vyjadríme diferenciálnu rovnicu pomocou novej premennej

$$\left(\frac{d}{dt} u^{-1} \right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m} u^2 \right).$$

Prederivujeme ľavú stranu podľa času. Nesmieme zabudnúť, že u je funkciou φ a to je funkciou t , tj. $u(\varphi(t))$. Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m} u^2 \right).$$

Za $\dot{\varphi}$ dosadíme vzťah zákona zachovania momentu hybnosti $\dot{\varphi} m r^2 = l$ (toto bola prvá triková časť úlohy), vďaka čomu sa nám pokráti u^2 v menovateli a už po umocnení ľavej strany dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{l^2}{m^2} = \frac{2}{m} \left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m} u^2 \right).$$

Po vykrátení konštant a preusporiadaní členov dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2} (E - V(u)).$$

Teraz prichádza druhá triková časť. Vieme, že na pravej strane chceme dostať deriváciu V a na ľavo chceme mať druhú deriváciu u . Preto nás môže rýchlo napadnúť skúsiť prederivovať celú rovnicu podľa φ . Po prederivovaní dostaneme

$$2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{2m}{l^2} \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Všimneme si, že derivácie u podľa φ sa vyskytuje v každom člene, preto môžeme tento člen z rovnice spolu s dvojkami vykrátiť, vďaka čomu dostaneme nami hľadaný Binetov vzorec

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{\partial V}{\partial u}.$$

3. Určite existuje mnoho spôsobov, ako zvoliť súradnice tak, aby sme dostali správny lagrangian. Dôležité je, aby vo výslednom lagrangiane vystupoval minimálny potrebný počet zo všeobecných súradníc. V tomto vzorovom riešení zvolíme také zovšeobecnené súradnice, ktoré sme použili aj pri riešení problému dvoch telies. Tentokrát vlastne riešime takisto len pohyb dvoch telies, ale v nejakom potenciálovom poli budenom tretím telesom (Slnkom), ktoré je nehybné v dôsledku toho, že má rádovo vyššiu hmotnosť, a teda sa vplyvom ostatných dvoch telies zdanlivo nepohybuje. Prvými súradnicami budú R a k nemu prislúchajúca uhlová súradnica φ_R vyjadrujúca polohu ťažiska sústavy Zem-Mesiak voči Slnku. Druhou bude r a k nemu prislúchajúca uhlová súradnica φ_r udávajúca polohu Zeme, respektíve Mesiaka voči ťažisku sústavy Zem-Mesiak, pričom samotná súradnica r udáva vzdialenosť Zeme a Mesiaka. Kinetická energia takejto sústavy bude potom mať rovnaký tvar ako kinetická energia pri probléme dvoch telies po zavedení obdobných súradníc. (Zmysel tohto príkladu bolo aj to, aby ste využili už predpočítané vzťahy pre problém dvoch telies. Samozrejme sa na to dalo ísť aj ináč.) Preto

$$T = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}_r^2) + \frac{1}{2} (m_Z + m_M) (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}_R^2),$$

kde $\mu = \frac{m_Z m_M}{m_Z + m_M}$ je redukovaná hmotnosť. Pridanou hodnotou tohto príkladu je spočítať, ako bude vyzeráť potenciál. Ten sa bude skladať z dvoch častí. Prvou je potenciálna energia Mesiaka a Zeme, ktorá je rovnako ako v prvom príklade

$$V = -\frac{G m_Z m_M}{r},$$

kde m_M a m_Z sú hmotnosti Mesiaka a Zeme. Jedná sa o klasický stredoškolský potenciál dvoch hmotných bodov vo vzdialenosti r . Čo sa týka potenciálu Zemi a Mesiaka voči Slnku, vieme si to predstaviť tak, že ich spoločný potenciál bude rovný potenciálu ich ťažiska. Analogicky postupujeme napríklad keď počítame potenciálnu energiu napríklad človeka voči Zemi. Človeka ako súbor hmotných bodov si predstavíme ako jediný hmotný bod umiestnený v jeho ťažisku. Preto bude potenciál Zeme a Mesiaka

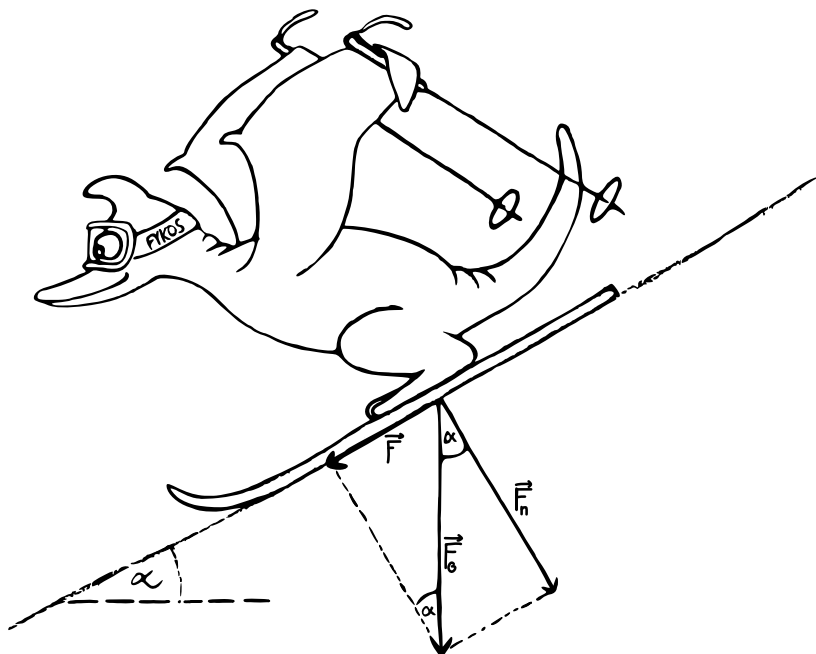
$$V = -\frac{G (m_Z + m_M) M_S}{R}.$$

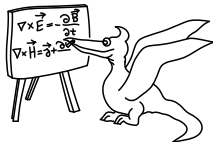
Je zásadné si ale uvedomiť, že táto analógia nie je celkom správna. Teleso na Zemi môžeme nahtadiť hmotným bodom čisto z dôvodu (takmer) homogénneho gravitačného poľa. V tomto prípade je ťažisko ako výsledné pôsobisko gravitačných síl zhodné s hmotným stredom telesa. V nehomogénnom gravitačnom poli (napríklad v našom centrálnom poli Slnka) sú však ťažisko a hmotný stred v rôznych bodoch. Ak ale uvážime, že vzdialenosť R je o veľa väčšia ako vzdialenosť r , môžeme pole v okolí Zeme aproximovať homogénnym polom. To nám dáva hľadaný lagrangian sústavy

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} (m_Z + m_M) (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}_R^2) + \frac{G m_Z m_M}{r} + \frac{G (m_Z + m_M) M_S}{R}.$$

V prípade bez tejto aproximácie by sme dostali tri potenciálové členy pre tri dvojice objektov. Tento presný lagrangián by nám poskytol napríklad vplyv slapových síl Slnka na sústavu Zem-Mesiac.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz





Seriál: Mechanika

Okrem Lagrangeovho formalizmu je ďalším pilierom, na ktorom stojí teoretická mechanika Hamiltonov formalizmus. V tomto seriáli sa nebudeme venovať Hamiltonovmu formalizmu. Dôvod, prečo ho ale vôbec spomínam, je ten, že sa budeme venovať niečomu, čo je akýmsi medzistupňom medzi Lagrangeovým a Hamiltonovým formalizmom. Tým je Hamiltonov variačný princíp. K pochopeniu Hamiltonovho variačného princípu ale budete potrebovať vedieť, čo je to Variačný počet a ako sa s ním pracuje. Pustime sa teda do toho.

Variačný počet

V roku 1696 Johann Bernoulli v časopise *Acta Eruditorum* sformuloval matematickú výzvu o nájdenie krivky spájajúcej dva body (neležiacie v jednej horizontálnej ani vertikálnej rovine) tak, aby sa po nej pohybujúci hmotý bod v homogénnom tiažovom poli bez trenia dostal z jedného bodu do druhého za najkratší čas. Z toho je odvodený aj názov úlohy *Brachystochrona*, čo je z gréckych slov *brachystos* = najkratší a *chronos* = čas.

Výzvu Johanna Bernoulliho prijalo mnoho matematikov, medzi inými aj Newton, Huygens či Leibnitz, a všetci, ktorý na výzvu odpovedali, ju vyriešili správne. Jedným z mnohých riešení je aj možnosť využiť variačný počet, ktorý vznikol práve popri hľadaní riešenia tejto úlohy vďaka Leonardovi Eulerovi. Variačný počet je (vtedy ešte neexistujúca) časť matematiky, ktorá sa zaoberá hľadaním takzvaných extrémál funkcionálov. Môžeme si všimnúť, že názvoslovie nie je použité veľmi kreatívne. Medzi pojmi funkcia – funkcionál a extrém – extrémála existuje analógia, ktorá je zároveň analógiou medzi klasickou analýzou funkcií (derivácie, hľadanie extrémov) a novou disciplínou, už viackrát spomínaným variačným počtom, ktorý skúma funkcionály, teda zobrazenia, ktoré funkciám priradzujú čísla.

Funkcionálom je teda (vo všeobecnej rovine) každé zobrazenie, ktoré funkciám priradzuje číslo. Teda napríklad, ak vezmete tabuľku a do jedného stĺpca budete vpisovať rôzne funkcie a do druhého rôzne čísla priradené týmto funkciám, definujete tak touto tabuľkou funkcionál. V praxi sa ale používajú funkcionály, ktoré majú nejaký lepší zmysel, a preto typickým príkladom funkcionálu je určitý integrál. Určitý integrál zrejme poznáte ako spôsob, akým spočítat plochu pod nejakou krivkou. Počíta sa tak, že krivku vyjadrenú pomocou funkcie $y = f(x)$ najprv zintegrujeme v zmysle neurčitého integrálu. Následne od seba odčítame funkčnú hodnotu neurčitého integrálu odpovedajúcu hornej hranici intervalu od funkčnej hodnoty odpovedajúcej dolnej hranici intervalu, čím dostaneme číslo, ktoré sa rovná ploche pod danou krivkou na danom intervale.

Predstavme si ale, že máme nejaký interval, v ktorého krajných bodoch máme definované hodnoty, napríklad interval $(0,1)$, v nule hodnotu 0 a v jedničke hodnotu 1. Tieto dva body môžeme spojiť ľubovoľne veľa krivkami. Zadaťme si teda úlohu nájsť spomedzi týchto kriviek takú, ktorá je zo všetkých možných kriviek najkratšia. Všetci z vás samozrejme viete, že riešením tejto úlohy je priamka, v tomto prípade priamka $y = x$. Táto úloha je ale typickou úlohou variačného počtu, to znamená úlohou, kde hľadáme, kedy je nejaký funkcionál extrémálny. Jednoduchšie povedané, vieme zostaviť funkcionál, ktorý zadanej krivke popísanej funkciou $y(x)$ na nejakom intervale (v našom prípade na $(0,1)$) priradí dĺžku tejto krivky. Takýto funkcionál

vie spočítať dĺžku ľubovoľnej krivky, je teda dobrou analógiou funkcie. Líši sa akurát v tom, že funkcia je zobrazenie zobrazujúce z množiny reálnych čísel, kdežto tento funkcionál zobrazuje z množiny všetkých funkcií, ktoré majú na danom intervale pevne zadané hodnoty v krajných bodoch. Už všetci poznáme metódu, ako nájsť extrém funkcie - stačí položiť deriváciu tejto funkcie rovnú nule. Veľmi podobnej logiky využíva aj variačný počet. Vieme v ňom definovať takzvanú Gateauxovu (Gateaux čítaj „Gató“) deriváciu (názov je podľa mena matematika, nie je za tým nič hlbšie), ktorá je nulová pre funkciu ktorá maximalizuje/minimalizuje daný funkcionál.

Derivácia Gateaux

Definujeme si deriváciu Gateaux podobne ako klasickú deriváciu funkcie. Keď S je nejaký funkcionál, v našom prípade reprezentovaný vždy určitým intergalom nejakej funkcie $y(x)$, a t je nejaké reálne číslo, potom limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S[y(x) + t \cdot h(x)] - S[y(x)]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_a^b f(y(x) + t \cdot h(x)) dx - \int_a^b f(y(x)) dx}{t}$$

nazveme deriváciou Gateaux v smere $h(x)$. Dôležité je, ako si takúto deriváciu predstaviť. Predstavme si to nasledovne. Máme dva pevné body, ktoré môže spájať ľubovoľné množstvo funkcií. Chceme nájsť napríklad takú, ktorá by spĺňala zadanie úlohy o brachistochrone. Vezmeme teda nejakú krivku spájajúcu tieto dva body (reprezentovanú nejakou funkciou) a skúsime k nej pričítať rôzne iné funkcie. Sledujeme, ako sa mení (v tomto prípade) čas, za ktorý prejde naša guľička po tejto krivke z jedného bodu do druhého. Príčitávanie funkcií je v limite reprezentované pričítaním malého násobku nejakej reálnej funkcie $h(x)$, čo môže byť pre pôvodnú predstavu zradné. Jednoduchšie je si to predstaviť tak, že máme nejakú krivku spájajúcu tieto dva body. Pustíme po nej guľičku a odmeriame čas, po ktorý pohyb tejto guľičky trval. Potom krivku maličko upravíme (niektoré jej body pusunieme o trochu vyššie, iné trochu nižšie v zmysle osy y). Znova spustíme po krivke guľičku a znova odmeriame čas. Ak bol druhý nameraný čas kratší, znamená to, že naše „modifikácie dráhy“ boli úspešné a spôsob, ktorým sme ich realizovali, bol správny. Teda sa pokúsime znova realizovať úpravy podobným smerom, čo robíme až dovtedy, kým sa čas pohybu guľičky skracuje. Potom sa môžeme naďalej pokúšať modifikovať dráhu guľičky iným spôsobom, až nakoniec dospejeme do štádia, že akákoľvek ďalšia modifikácia dráhy by znamenala predĺženie doby putovania guľičky. Vtedy môžeme prehlásiť, že sme našli trajektóriu, ktorá rieši zadanie úlohy brachistochrony.

Podme sa teraz na to pozrieť z matematickejšieho hľadiska a vysvetliť si, ako nám matematika pomôže túto nekonečnú postupnosť natahovaní špagátiku medzi dvoma bodmi zjednodušiť. Drobné zmeny v tvare dráhy guľičky sa dajú vyjadriť, ako už bolo spomenuté, tak, že k súčasnému tvaru špagátiku (reprezentovanému nejakou funkciou $y(x)$) prirátame nejakú „malú“ funkciu $h(x)$. Malú v zmysle, že sa na skoro celom nami uvažovanom intervale veľmi málo líši od nuly. Potom sčítaním $h(x)$ a $y(x)$ dostaneme funkciu, ktorá sa bude len veľmi málo líšiť od $y(x)$. Tieto drobné zmeny funkcie nazývame *variácie* funkcie, z čoho aj pochádza názov variačný počet.

Ak sa ďalej pozrieme na výslednú funkciu, ktorá v našom príklade minimalizovala dobu pohybu guľičky, zistíme, že ak k nej pričítame akúkoľvek malú funkciu, doba pohybu guľičky sa predĺži. To si vieme predstaviť aj tak, že zo všetkých okolitých kriviek je táto najoptimálnejšia pre riešenie našej úlohy. Nejakým spôsobom je „najminimálnejšia“ alebo „najextremálnejšia“.

A práve na takomto princípe funguje variačný počet. Fyzikálne problémy sú častokrát formulované podmienkou extrémaly.⁶ My túto extrémalu nájdeme podobne ako pri hľadaní extrémov funkcií. Položíme Gateaux deriváciu funkcionálu rovnú nule a nájdeme takú funkciu, ktorá tento zderivovaný funkcionál nuluje. Prečo je to tak si hovoriť nebudeme, ale dá sa to povšimnúť z analógie, ktorú som načrtol vyššie. Minimum funkcie je taký bod, že ak sa pohnem ľubovoľným smerom, hodnota tejto funkcie bude stále vyššia. *Minimizér* funkcionálu je taká funkcia, že akákoľvek jej malá zmena (kde znova opakujem, že túto zmenu si vieme najlepšie predstaviť ako natiahnutie danej krivky nejakým smerom) spôsobí to, že náš funkcionál jej priradí vyššiu hodnotu ako tej nezmenenej/nevariovej funkcii.

Dúfam, že teraz máte lepšiu predstavu o tom, ako variačný počet funguje. Vrhne sa teda k ďalšej časti. Vieme už, že ak je nejaká funkcia *minimizér*, príp. *maximizér* (význam tohoto slova asi nie je potrebné vysvetľovať) funkcionálu, tak je pre túto funkciu Gateaux derivácia nášho funkcionálu nulová. Teraz si ešte ukážeme, ako sa táto derivácia počíta jednoducho, len pomocou znalostí derivácii funkcií jednej premennej.

Ako sme už povedali mnohokrát, funkcionál je zobrazenie z množiny funkcií do reálnych čísel. Zadefinujem si pomocné zobrazenie pre konkrétny funkcionál S , ktoré bude funkcia $g(t)$ z reálnych čísel do reálnych čísel, a to čisto pre účely výpočtu derivácie Gateaux tohto konkrétneho funkcionálu S

$$g(t) = S(y(x) + t \cdot h(x)).$$

Vidíme, že sa skutočne jedná o funkciu reálnej premennej t , ktorá nám na výstupe vráti reálne číslo. Poprosím usilovných čitateľov seriálu, aby si za úlohu vyskúšali, že derivácia tejto funkcie v nule

$$\frac{dg}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

je rovná Gateaux derivácii funkcionálu v smere⁷ $h(x)$. Poďme si toto všetko ukázať na nejakom konkrétnom príklade.

Príklad: Hľadanie najkratšej spojnice dvoch bodov

Využijeme príklad z úvodu seriálu: Nájdite najkratšiu možnú krivku spájajúcu bod $[0, 0]$ a bod $[1, 1]$.

Kľúčové pre riešenie tohto príkladu je poznať funkcionál, ktorý nám určí dĺžku nejakej krivky vyjadrenej pomocou funkcie $y(x)$. Odvodiť tvar tohto funkcionálu je jednoduché. Dá sa to pri správne nakreslenom obrázku za použitia Pythagorovej vety.

Bonus Na tomto mieste vyhlasujeme bonusovú úlohu, a tou je odvodiť tvar nasledujúceho funkcionálu

$$l_y = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

⁶Minimalizujeme energiu, svetlo sa pohybuje tak, aby mu dráha v priestore trvala čo najkratší čas (tzv. Fermatov princíp), kvapka vody má guľový tvar, pretože pri ňom má najnižšiu energiu. Na druhej strane, termodynamické deje sa dejú tak, aby sa maximalizovala entropia. To udávam ako veľmi dôležitý príklad, pretože mnoho ľudí to zjednodušuje tak, že príroda sa snaží veci minimalizovať. Toto ale nie je pravda, ako vidíme na príklade entropie. Pravdivý je teda skutočne princíp extremalizácie prírodných dejov, čo si ukážeme onedlho v tomto seriáli.

⁷Pojem v smere $h(x)$ si môžete predstaviť tak, že ak Gateaux derivácia nejakého funkcionálu nadobúda istú hodnotu, napríklad nulu, tak extrémala je to vtedy, ak nadobúda nulu pre všetky funkcie $h(x)$. Jednoduchšie povedané, ak je nejaká derivácia nulová, znamená to, že daný zderivovaný funkcionál je nula bez ohľadu na to, ako zvolím funkciu $h(x)$. To je niečo, čo si o chvíľku ukážeme na funkcionále v praxi.

kde l_y je délka krivky vyjadrenej pomocou funkcie $y(x)$ ležiacej v intervale $[a, b]$ na osi x .

Potom vieme dĺžku krivky, ktorú hľadáme, zapísať ako

$$l_y = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Teraz chceme spočítať jej Gateaux deriváciu a položiť ju rovnú nule, aby sme našli extrémálne hodnoty dĺžky kriviek spájajúce body $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Zapišeme si našu funkciu $g(t)$ a vypočítame jej deriváciu

$$\frac{dg}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y + t \cdot h)\right)^2} dx \Big|_{t=0}.$$

Pre zjednodušenie zápisu si označíme pre ľubovoľnú funkciu $a(x)$ jej deriváciu podľa x ako $\dot{a}(x) = \dot{a}$. Potom sa nám výraz vizuálne zjednoduší. Zároveň rozpišeme dvojčlen umocnený na druhú, čím dostaneme

$$\frac{dg}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}^2 + 2t\dot{h}\dot{y} + t^2\dot{h}^2} dx \Big|_{t=0}.$$

Teraz zameníme integrál a deriváciu podľa t . Derivovaním výrazu pod integrálom dostaneme

$$\frac{dg}{dt}(0) = \int_0^1 \frac{\dot{h}\dot{y} + t\dot{h}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + 2t\dot{h}\dot{y} + t^2\dot{h}^2}} dx \Big|_{t=0}.$$

Teraz nám stačí dosadiť za $t = 0$ a dostaneme

$$\frac{dg}{dt}(0) = \int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \dot{h} dx.$$

Extremála je taká funkcia, že pre ľubovoľnú funkciu $h(x)$ spĺňajúcu podmienky, ktoré sme spomínali vyššie, nuluje daný integrál. My máme pod funkcionálom ale niečo vynásobené deriváciou funkcie $h(x)$. Tejto derivácie sa zbavíme pomocou per-partes. Čitateľovi, ktorému nebude nasledujúci krok hneď jasný, odporúčam si to vedľa na papieri spočítať pomalšie

$$\int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \dot{h} dx = \left[h \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) h dx.$$

My vieme, že funkcia $h(x)$ – variácia funkcie $y(x)$ – mení tvar funkcie $y(x)$ ale tak, aby krivka popísaná súčtom týchto funkcií spájala tie isté body ako spája samotná krivka $y(x)$. Z toho vieme, že funkcia $h(x)$ musí vždy spĺňať podmienku, že v krajných bodoch intervalu je nulová. Ak budeme vyčíslovať „preintegrovateľný“ člen v per-partes, ktoré sme práve urobili, tak hodnoty v krajných bodoch budú nulové, pretože je tam nejaká funkcia prenášobaná funkciou $h(x)$. Chceme teda riešiť rovnicu

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) h dx = 0.$$

⁸Z matematického hľadiska nie je jasné, či ak zameníme poradie derivácie a integrálu, tak dostaneme ten istý výsledok. Rozhodne totižto existujú funkcie, pre ktoré to neplatí. Jedná sa však skôr o výnimky a z fyzikálneho hľadiska, kde uvažujeme spojité a diferencovateľné (derivovateľné) funkcie, môžeme vymeniť poradie týchto dvoch operácií. Rovnako tak aj poradie limity a derivácie alebo limity a integrálu a podobne.

Hledáme funkci, pre ktorú je Gateaux derivácia funkcionálu nulová. Ako sme už naznačili vyššie, keďže táto rovnosť má platiť pre ľubovoľnú funkciu $h(x)$, musí platiť, že zvyšok pod integrálom je nulový (pre každé x). Potom máme

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \text{konst} = c.$$

Riešiť túto rovnicu je možné metódou separácie premenných. Môžeme si tiež všimnúť, že ju možno upraviť do tvaru $\dot{y} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$, teda \dot{y} je konštantné. Pre tých, ktorí nevedia riešiť diferenciálne rovnice, pomôže univerzálny nástroj Wolfram Alpha. Ako riešenie dostanete rovnicu všeobecnej priamky

$$y = ax + b.$$

Keďže v našom prípade sme chceli najkratšiu cestu z bodu $[0,0]$ do $[1,1]$, teda $y(0) = 0$ a $y(1) = 1$, vieme rýchlo dopočítať, že nami hľadaná extrémála je $y = x$.

Hamiltonov variačný princíp

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, ako funguje variačný počet. V tejto časti sa vrátíme naspäť k fyzike. Bude to ale skôr rozprávacía časť o samotnej podstate toho, ako funguje svet (alebo ako sa nám na základe doterajších pozorovaní zdá, že funguje). Celé toto rozprávanie bude ale založené na pochopení toho, čo to je a aký význam má variačný počet. Preto ak si nie ste istí, či ste predchádzajúcu časť pochopili dostatočne správne, tak odporúčam si ju ešte raz prejsť predtým, ako sa vrhneme k fyzike.

Hamiltonov variačný princíp nám, zjednodušene, vraví o tom, že všetko, čo príroda robí, robí tak, aby pritom musela vynaložiť čo najmenej „námahy“. V potenciálovom poli sa rozmiestnia hmotné objekty tak, aby mali čo najmenší potenciál. Svetlo sa medzi dvoma bodmi šíri vždy tak, aby mu to trvalo najkratší (alebo najdlhší) možný čas. Telesá si pri vzájomnom kontakte začínú vymieňať teplo, až kým nedosiahnu tepelnú rovnováhu, a to preto, aby dosiahli najvyššiu možnú entropiu. Najvyššia entropia potom zároveň ale bude zodpovedať aj najnižšej možnej celkovej vnútornej energii telies, ktoré si vymieňali teplo. Všetky tieto fyzikálne zákonitosti má väčšina ľudí odpozorované a my si to teraz matematicky popíšeme. Ako sa dá vôbec vyjadriť „úsilie“ prírody veci minimalizovať?

Vo fyzike je definovaná veličina *akcia*. Ako už z názvu vyplýva, jedná sa akoby o množstvo „akcie“, ktoré bolo pri nejakom deji vykonané. Akcia S je definovaná ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t)) dt,$$

kde L je naša stará známa Lagrangeova funkcia. Pripomeňme si značenie - $q(t)$ je zovšeobecnená súradnica lagrangiánu a jej derivácia je zovšeobecnená rýchlosť v smere tejto súradnice. Lagrangián môže samozrejme závisieť od viacerých súradníc.

Hamiltonov variačný princíp, alebo aj princíp najmenej akcie, hovorí o tom, že každý fyzikálny dej medzi časovými bodmi t_1 a t_2 sa deje tak, aby bola akcia minimálna. Keď formulujeme

zákon o nejakej funkcii $f(x)$, ktorý spočíva v tom, že táto funkcia nadobúda za istých podmienok svojho minima, znamená to, že za tých daných podmienok je derivácia tejto funkcie nulová. Rovnako, ak chceme o funkcii definovanej pomocou integrálu (napríklad našej akcii) povedať, že nadobúda svoje minimum, povieme, že je to vtedy, keď je jej Gateaux derivácia nulová. Spomínali sme si, že o Gateaux derivácii sa hovorí aj ako o variácii nejakej funkcie pod integrálom, z čoho pochádza asi najznámejšia slovná formulácia tohto princípu, a síce: *Variácia akcie je nula*. (Znovu rozumej Gateaux derivácia funkcionálu nazvaného „akcia“ je nulová.) Z tejto formulácie je samozrejme odvodený aj názov „Hamiltonov variačný princíp“.

Variačné princípy sú vo fyzike veľmi obľúbené, lebo skúsenému fyzikovi dávajú pri znalosti lagrangiánu nejakého systému častokrát rýchly nástroj, ako odvodiť isté všeobecné závery. Dá sa napríklad jednoducho ukázať, že Lagrangeove rovnice druhého druhu plynú z princípu najmenej akcie, čo si my na úplný záver celého seriálu ukážeme.

Odvedenie Lagrangeových rovníc z Hamiltonovho variačného princípu

Ako z názvu a odseku predtým vyplýva, budeme chcieť z nejakého všeobecného lagrangiánu odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice. Ako uvidíme, bude sa jednať o matematicky omnoho korektnšie a aj prirodzenejšie odvedenie Lagrangeových rovníc. Majme teda náš funkcionál, ktorého Gateaux deriváciu chceme mať nulovú

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t)) dt.$$

Parameter t pri Gateaux derivácii si preznačíme na s

$$0 = \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{d}{dt}(q(t) + s \cdot h(t)), q(t) + s \cdot h(t)\right) dt = 0.$$

Prederivujeme podľa s (Lagrangeovu funkciu L derivujeme ako zloženú funkciu podľa retiazkového pravidla) a dosadíme za $s = 0$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot h(x) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{h}(x) \right) dt.$$

Prvý člen je presne v tvare, v akom ho potrebujeme. Teda v tvare nejakej funkcie $\dot{q}(t)$ a $q(t)$ krát nejaká naša funkcia $h(x)$, ktorá je nulová na hranici nášho uvažovaného intervalu. Druhý člen ale neobsahuje funkciu $h(x)$, ale jej deriváciu. Spravíme preto znova per-partes, pričom preintegrovateľný člen znova zmizne, nakoľko bude obsahovať aj funkciu $h(x)$, ktorá je nulová na okrajoch intervalu, v ktorých sa celý člen vyčísľuje. Usilovným čítateľom, tentokrát už naposledy, odporúčam si to prepísať a celé spočítať vedľa na papieri. Potom dostaneme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \cdot h(x) dt.$$

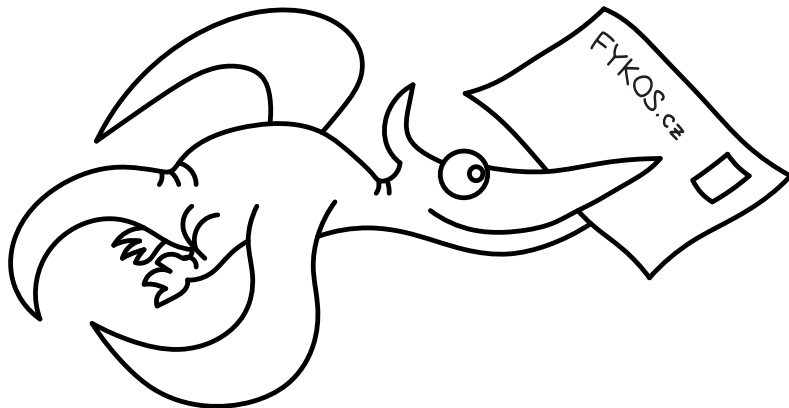
My už ale vieme, že ak má byť pre všetky nami uvažované funkcie $h(x)$ integrál nulový, musí byť nulový zvyšok pod integrálom. Z toho hneď plynú Lagrangeove rovnice v tvare, ako ich poznáme

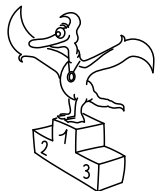
$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right).$$

Záver

Po tom, ako sme v minulom seriáli ukončili kapitolu Lagrangeových rovníc, sme v tomto diele predstavili ešte mierne odlišný pohľad na mechaniku a na odvodenie Lagrangeových rovníc. Tento pohľad si vyžadoval hlbšie matematické znalosti, ktoré sme sa pokúsili čitateľovi sprostredkovať v natoľko stráviteľnej podobe, aby dokázal pochopiť záverečné odvodenie v seriáli. Toto odvodenie má totižto hlboký význam, nakoľko nám ukazuje, že tá „najelegantnejšia formulácia mechaniky“ vlastne nie je výsledkom nejakého vymysleného formalizmu, ktorý nemá reálny význam, ale je výsledkom princípu extremalizácie akcie, čo je... jednoducho povedané. Autor seriálu pevne dúfa, že to na vás spravilo rovnaký dojem ako naňho, keď sa to dozvedel.

Seriálové úlohy, ako zrejme mnohí z vás už vedia, sú zamerané na opakovanie toho, čo bolo spomenuté v predchádzajúcich častiach seriálu. To dáva možnosť precvičenia všetkého doteraz spomenutého. Zároveň sa vám chcem poďakovať za váš záujem a za vaše spätné väzby k seriálu a rád príjem aj ďalšie, záverečné, aj keď tie už vývoj seriálu neovplyvnia. Samozrejme, nezabudnite riešiť FYKOS aj ďalší rok a s mnohými z vás sa určite uvidíme na sústreďení, kde môžeme niečo, ak by to z doterajšieho výkladu nebolo jasné, prekonzultovať.





Pořadí řešitelů po V. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	6	6	6	8	8	9	9	12	10	66	100	330
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	8	8	4	5	1	8	46	76	211	
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	6	6	-	-	-	8	-	26	85	190	
3. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	6	6	2	-	9	1	9	-	33	68	161	
4. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	-	5	-	2	-	-	-	9	60	109	
5. <i>Adam Húšťava</i>	European School Luxembourg II	2	-	6	-	-	-	-	-	8	73	97	
6. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	82	
7. <i>Benedikt Bareš</i>	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	73	
8. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	-	6	-	-	-	-	-	12	89	67	
9. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	41	56	
10. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	4	6	6	1	-	-	-	4	21	68	54	
11. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	2	-	1	1	-	1	-	-	5	52	46	
12. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	-	-	1	-	-	1	6	-	8	42	45	
13. <i>Sára Byšková</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	33	
14. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	2	-	0	0	-	-	-	-	2	40	31	
15. <i>Kristýna Jenčíková</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	6	6	6	-	-	-	-	-	18	100	30	
16. <i>Filip Zikeš</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	24	
17.-18. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	18	
17.-18. <i>Petr Šícho</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	32	18	
19. <i>Meshkat KM</i>	RUMC, Dhaka, Bangladesh	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	17	
20. <i>Milan Marek</i>	G Neumannova, Ždár n. S.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	35	15	
21. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	11	
22. <i>Adam Korběl</i>	G, Strakonice	2	-	1	-	-	-	-	-	3	38	9	
23. <i>Lukáš Veškerna</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38	8	
24.-25. <i>Natália Kalinová</i>	G, P. Horova, Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	7	
24.-25. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	7	
26.-31. <i>Jiří Antoňů</i>	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6	
26.-31. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6	
26.-31. <i>Radim Skála</i>	G, Hořovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6	
26.-31. <i>Matyáš Svoboda</i>	G, Mikulov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6	
26.-31. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6	
26.-31. <i>Jan Šuráň</i>	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6	
32. <i>Tomáš Nevrłka</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	-	-	-	-	-	-	-	2	33	2	

Kategorie druhých ročníků

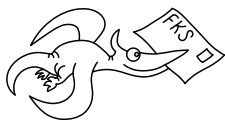
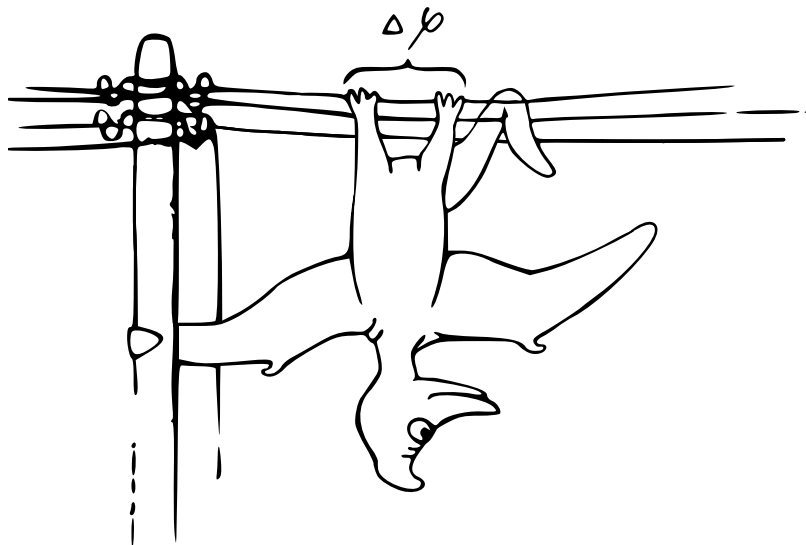
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	6	6	6	8	9	9	12	10	66	100	330
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	6	6	6	6	5	9	9	–	47	82	253
2. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	6	6	2	–	–	9	7	–	30	86	185
3. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	6	6	2	4	4	4	10	–	36	70	176
4. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	2	6	6	1	–	5	6	2	28	63	174
5. <i>Adam Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	–	8	4	9	–	6	4	37	77	154
6. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	4	1	–	2	2	4	–	15	50	142
7. <i>Elena Chochoňáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	6	–	–	3	–	–	21	86	134
8. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	111
9. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	6	–	–	–	–	–	18	93	99
10. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	4	–	2	–	–	–	–	–	6	61	70
11. <i>Radek Lacko</i>	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	47
12. <i>Daniel Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	45
13. <i>Martin Polyácko</i>	G Alejová, Košice	6	0	1	3	–	–	–	–	10	61	43
14. <i>Jan Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	6	6	1	–	–	–	–	1	14	51	37
15. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	30
16.–17. <i>Duong Phan</i>	Cumberland Valley HS, USA	4	6	6	–	9	3	–	–	28	78	28
16.–17. <i>Jarmila Terpáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	28
18. <i>Karolína Letochová</i>	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	26
19. <i>Jan Vavřín</i>	PORG, Praha	6	6	6	0	2	–	0	–	20	43	20
20.–21. <i>Jakub Kliment</i>	G Tajovského, B. Bystrica	6	6	7	–	–	–	–	–	19	106	19
20.–21. <i>Šárka Štěpánková</i>	G J. Resslera, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	19
22. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	18
23.–24. <i>Laura Hanousková</i>	G J. Wolkera, Prostějov	0	–	1	1	–	1	1	–	4	20	16
23.–24. <i>Kristýna Chlupáčová</i>	G J. Resslera, Chrudim	2	4	1	–	–	–	–	–	7	44	16
25. <i>Gabriel Ščurka</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10
26. <i>Daniel Czinege</i>	SPŠ chemická, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	9
27. <i>Vojtěch Janota</i>	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	7
28. <i>František Krůs</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	6

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK									
		3	3	6	8	9	9	12	10	60	100	300
1. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	6	5	4	3	10	2	36	85	233
2. Jaroslav Herman	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	8	5	4	3	10	4	40	74	222
3. Jakub Jobus	G Jura Hronca, Bratislava	3	3	6	2	7	4	7	5	37	72	217
4. Martin Schmieď	G, Jihlava	3	3	6	3	5	2	5	10	37	71	214
5. Jaroslav Scheinpflug	G Jírovcova, České Budějovice	3	3	2	4	9	7	5	7	40	68	192
6. David Kománek	G, Špitálská, Praha	3	3	6	5	9	6	6	0	38	75	188
7. Radka Křížová	G J. Heyrovského, Praha	3	3	2	3	–	–	–	–	11	80	168
8. Jan Benda	G, Litoměřická, Praha	3	–	8	5	–	–	–	–	16	89	164
9. Jakub Strnad	Klvaňovo G Kyjov	3	3	6	2	4	–	3	–	21	60	145
10. Jiří Zelenka	G Z. Wintra, Rakovník	3	2	6	–	–	2	4	–	17	60	122
11. Martin Vavřík	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	95
12. Veronika Hendrychová	G, Turnov	–	2	1	3	–	–	4	–	10	59	86
13. Samuel Jankovjch	G Hubeného, Bratislava	2	2	6	3	6	3	–	1	23	67	72
14. Lukáš Hronek	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	9	9	96	64
15. Jan Divila	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	52
16.–17. Ronald Doboš	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	51
16.–17. Pavla Rudolfová	G, Videňská, Brno	0	–	–	–	–	–	–	–	0	86	51
18. Matěj Holubička	Zemědělská akademie a Gymnázium	1	2	1	2	–	–	–	–	6	48	43
19. Jan Obořil	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	37
20. Jakub Pravda	ŠpMNDA G, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	34
21. Kateřina Barotová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	28
22. Matěj Krátký	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	27
23.–24. Petra Pálkovácsová	G, Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	23
23.–24. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	23
25. Josef Polášek	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	22
26.–27. Rachel Johnson	Richardson High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	21
26.–27. Jana Večerková	G, Šumperk	3	3	6	5	4	–	–	–	21	72	21
28. Milan Tichavský	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	20
29.–30. Kryštof Jasenský	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	19
29.–30. Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	0	–	–	–	–	–	–	–	0	48	19
31.–32. Minh Khoi Ho	Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	16
31.–32. Filip Zukal	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	16
33. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	13
34. Dominika Kodlová	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	11
35. Daniel Krátký	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	10
36.–37. Kateřina Roupová	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	9
36.–37. Zuzana Šimáčková	NLCS, London, UK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	9
38. Erika Žitňáková	Evanjelické G, Banská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	5
39.–40. Lucia Krajčoviechová	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	4
39.–40. Martina Pivková	Evanjelické G, Banská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	4
41. Kateřina Vokálová	G, Kolín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	2

Kategorie čtvrtých ročníků


jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK									
		3	3	6	8	9	9	12	10	60	100	300
1. <i>Martin Vaněk</i>	G, Vysoké Mýto	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	186
2. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Orteny, Kutná Hora	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	138
3. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	–	–	–	–	–	–	–	–	–	93	130
4. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	3	–	6	0	–	2	7	0	18	53	94
5. <i>Kristián Matušík</i>	G, Benešov	3	–	6	–	–	–	9	–	18	51	88
6. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	84
7.–8. <i>Vojtěch Ulman</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	80
7.–8. <i>Leonardo Wimmer</i>	Colégio pH, Tijuca, Brazil	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	80
9. <i>Marie Grunová</i>	G, Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	78
10. <i>Filip Koňářík</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	72
11. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	108	65
12. <i>Matej Moško</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	59
13. <i>Vojtěch Klimeš</i>	G, Třeboň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	40
14. <i>YUQING XU ARIA</i>	Dulles High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	38
15. <i>Tomáš Drobil</i>	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	36
16. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	–	3	6	1	3	–	–	–	13	65	35
17. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	34
18. <i>Tadeáš Wilczek</i>	G F. Živného, Bohumín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	32
19. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	27
20. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	3	–	–	–	–	–	–	–	3	87	26
21.–22. <i>Andrej Rendek</i>	G, Dubnica n. Váhom	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	24
21.–22. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	24
23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	17
24. <i>Miroslav Horský</i>	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	16
25. <i>Dominik Majkus</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	13
26. <i>Jaromír Sladkovský</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	12
27. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	11
28.–30. <i>Bernadeta Maříková</i>	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	9
28.–30. <i>Štěpán Tichý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	9
28.–30. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	9
31.–32. <i>Vratislav Besta</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	6
31.–32. <i>Marek Talíř</i>	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	6
33. <i>Marek Božon</i>	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	3



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.