

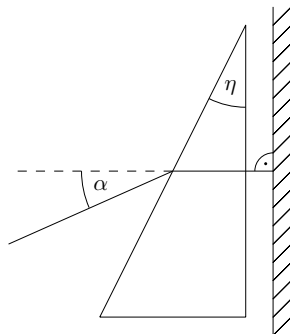
## Úloha VI.1 ... sebeosvětlení

3 body; (chybí statistiky)

Svítíme na zrcadlo pod úhlem  $\alpha = 15^\circ$  vůči kolmici. Chceme, aby se nám paprsek vracel zpátky do zdroje. Máme skleněný hranol s indexem lomu  $n = 1,8$ . Jaký musí být lámavý úhel  $\eta$  v závislosti na  $\alpha$  a  $n$ , pokud situace vypadá jako obrázku? Předpokládejte, že okolní prostředí tvoří vzduch s indexem lomu  $n_0$ .

Nápověda

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).\end{aligned}$$



Karel se díval na Dančinu úlohu.

Klíčem k řešení úlohy je uvědomit si, jak můžeme na rozhraní vzduch-sklo využít Snellův zákon lomu. Na obrázku 1 je tečkovanou čarou vyznačena kolmice na povrch skla. Také tu jsou zakresleny další úhly s velikostí  $\eta$ . Můžeme psát

$$n_0 \sin(\alpha + \eta) = n \sin \eta,$$

kde jsme ještě pro pořádek uvedli index lomu vzduchu  $n_0$ , který ale můžeme vzhledem k přesnosti dalších zadaných veličin<sup>1</sup> považovat za 1,00. Levou stranu rovnice rozepíšeme podle součtového vzorce pro sinus a postupně obecně upravujeme

$$\begin{aligned}n_0 (\sin \alpha \cos \eta + \cos \alpha \sin \eta) &= n \sin \eta, \\ n_0 \sin \alpha \cos \eta &= (n - n_0 \cos \alpha) \sin \eta, \\ \operatorname{tg} \eta &= \frac{n_0 \sin \alpha}{n - n_0 \cos \alpha}, \\ \eta &= \operatorname{arctg} \left( \frac{n_0 \sin \alpha}{n - n_0 \cos \alpha} \right).\end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty úhlu a indexu lomu dostáváme hledaný lámavý úhel  $17,2^\circ$ , při kterém se nám bude světlo vracet zpět do zdroje.

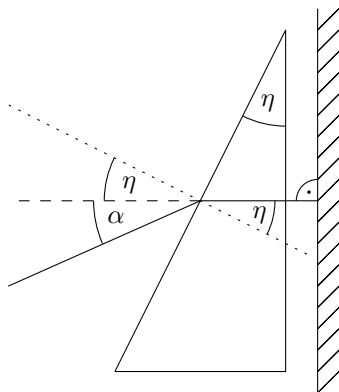
Ještě poznamenejme, že naše řešení platí pro situaci, kde  $\alpha + \eta \leq 90^\circ$ , protože úhel dopadu nemůže být větší, než  $90^\circ$ . Pokud by zadané hodnoty  $\alpha$  a  $n$  nesplňovaly nerovnost

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{n_0 \sin \alpha}{n - n_0 \cos \alpha} \right) \leq 90^\circ - \alpha,$$

pak nelze najít takový lámavý úhel  $\eta$ , aby se nám paprsek vracel zpět. Nicméně v našem případě tato nerovnost splněna je.

Více součtových vzorců jsme do nápovědy uvedli proto, aby nebylo okamžitě jasné, který je nutně použít. Dále aby se o nich případně dozvěděli i ti, kteří se s nimi ještě nesetkali.

<sup>1</sup>Index lomu vzduchu na 5 platných cifr je  $n_0 = 1,0003$ . Úhel paprsku a index lomu skla máme zadané pouze na dvě platné cifry, takže zaokrouhlení na 1,00 je korektní.



Obr. 1: Nákres situace.

*Karel Kolář*  
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.