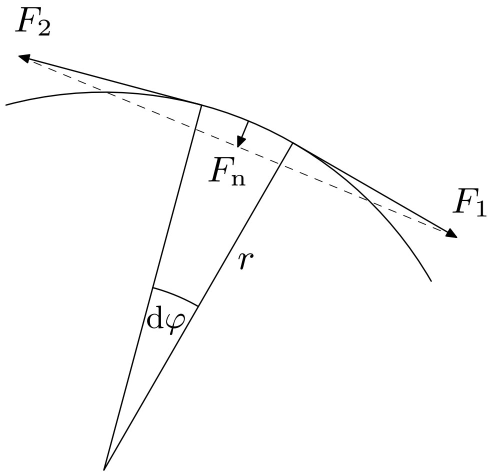
Úloha VI.4 ... lano

7 bodů; (chybí statistiky)

Přes břevno fotbalové branky (vodorovnou válcovou tyč) přehodíme dlouhé lano. Když bude jeden konec lana právě třikrát delší než druhý (přičemž oba budou viset volně ve vzduchu), lano samovolně sklouzne. Nyní lano kolem břevna jednou obtočíme (čili bude „ohnuté“ o úhel 540°*). Kolikrát teď může být jeden konec delší než druhý, aby lano nesklouzlo?*

Matěj stahoval lezecké lano.



Obr. 1: Přiblížení části namotaného lana.

Nejprve si musíme uvědomit, jak se chová lano namotané na válci. Předpokládáme-li, že na prvním konci lana působí určitá napěťová síla F_1, jaká síla F_2 bude působit na druhém konci, je-li lano namotáno úhlem φ?

V každé části dotyku lana a válce je lano určitou silou přitlačováno k válci a tedy vzniká statická třecí síla, která mění napěťovou sílu lana. Dále víme, že se lano nachází v *kritické* situaci, tedy při malém zvýšení síly F_1 už sklouzne. To znamená, že veškerá síla statického tření působí proti síle F_1. Situaci si zjednodušíme a uvažujeme velmi malý úhel $d\varphi$. Na začátku (viz obrázek 1) bude působit síla F_1. Na druhé straně působí síla F_2, která je jen o malinko menší ($F_2 = F_1 - dF$). Složku síly F_1 (resp. F_2) kolmou k povrchu válce označíme F_n. Pro malé $d\varphi$ platí

$$F_n = F_1 \sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{F_1 d\varphi}{2} \approx \frac{F_2 d\varphi}{2}\,.$$

Lano je tedy přitlačováno silou

$$2F_n \approx \frac{(F_1 + F_2)\, d\varphi}{2} \approx F d\varphi\,,$$

kde F je napěťová síla na daném úseku lana a pro požadovanou přesnost výpočtu F_n nám pro dostatečně malá $d\varphi$ stačí aproximace $F_1 \approx F_2 \approx F$. Třecí síla potom bude

$$F_t = 2fF_n \approx fF d\varphi\,,$$

kde f značí koeficient statického tření mezi lanem a válcem. Velikost této třecí síly je rovna rozdílu velikostí sil F_1 a F_2, což je právě změna napěťové síly mezi počátečním a koncovým bodem daného úseku lana. Odtud dostáváme jednoduchou rovnici

$$\mathrm{d}F = fF\mathrm{d}\varphi\,,$$

Rovnici lze řešit například separací proměnných

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = f\mathrm{d}\varphi\,,$$
$$\ln(F) = f\varphi + C\,,$$
$$F(\varphi) = K\mathrm{e}^{f\varphi}\,,$$

kde $K = \mathrm{e}^C$ je integrační konstanta. Dosazením $\varphi = 0$ zjistíme, že K má význam počáteční napěťové síle F_0. Pro napěťovou sílu po úseku lana s úhlem φ potom platí

$$F(\varphi) = F_0\mathrm{e}^{f\varphi}\,.$$

Zbytek výpočtu je už poměrně jednoduchý. Při přehození lana přes břevno na jedné straně působí síla $F_\mathrm{A} = F(0)$ a na druhé straně působí síla $3F_\mathrm{A} = F(\pi)$, protože působící síly jsou přímo úměrné hmotnosti a tedy i délce volných konců lana. Z těchto rovnic vyplývá

$$3F_\mathrm{A} = F_\mathrm{A}\mathrm{e}^{f\pi}\,,$$
$$f = \frac{\ln 3}{\pi}\,.$$

Po obtočení lana o úhel 3π bude na jedné straně opět působit síla $F_\mathrm{A} = F(0)$, zatímco na druhé straně bude působit neznámá síla $F_\mathrm{B} = F(3\pi)$. Nyní už jen snadno dosadíme za f do vzorce pro $F(\varphi)$ výše a dostáváme

$$F_\mathrm{B} = F(3\pi) = F_\mathrm{A}\mathrm{e}^{3\ln 3} = F_\mathrm{A}\mathrm{e}^{\ln 3^3} = 3^3F_\mathrm{A} = 27F_\mathrm{A}\,.$$

To znamená, že při jednom obtočení lana může být druhý konec až 27krát delší a lano stále samovolně nespadne.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.