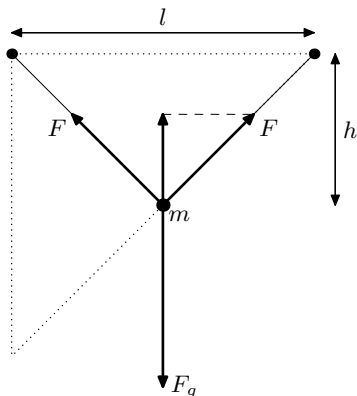


Úloha VI.5 ... gumová houpačka

9 bodů; (chybí statistiky)

Matěje začaly nudit klasické houpačky, které jsou na dětských hřištích a lze se na nich houpat pouze dopředu a dozadu. Proto vymyslel vlastní atrakci, na které se bude houpat nahoru a dolů. Mezi dva stejně vysoké body ve vzdálenosti l natáhne gumu s klidovou délkou l . Následně se pomalu posadí přesně doprostřed gumy, přičemž se její střed vychýlí dolů o vzdálenost h . Nyní se velmi lehce odstrčí směrem nahoru a začne se houpat. Určete periodu malých kmitů.

Matěj přemýšlí, jak zranit děti na hřištích.



Obr. 1: Schéma gumové houpačky

Výpočet hmotnosti

Abychom mohli sestavit pohybovou rovnici, potřebujeme znát Matějovu hmotnost. Tu si můžeme dopočítat z tuhosti gumy k a ze zadaných údajů, jelikož víme, jak hluboko se houpačka prohnula. S použitím Pythagorovy věty lze spočítat, že pokud se střed gumy posunul o h dolů, zvětšila se její celková délka na $\sqrt{l^2 + 4h^2}$ (přepona tečkovaného trojúhelníka na obrázku 1). Guma je napínána silou

$$F = k \left(\sqrt{l^2 + 4h^2} - l \right). \quad (1)$$

Tato síla působí ve směru gumy. V bodě, kde sedí Matěj, se mění její směr o určitý úhel. Síly F na Matěje působí dvě (jedna z každého směru), přičemž je nadnášen pouze jejich svislými složkami. Jejich součtem je

$$F_y = 2F \frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} = \frac{4hk}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \left(\sqrt{l^2 + 4h^2} - l \right) = 4hk \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \right), \quad (2)$$

kde $\frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}}$ je kosinus úhlu, který svírají obě síly F se svislicí, a za F jsme dosadili ze vztahu (1). Tuto sílu položíme rovnou tíhové síle mg , odkud pro Matějovu hmotnost dostáváme

$$m = \frac{4hk}{g} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \right).$$

Výpočet periody

Když se Matěj odrazí o kousek nahoru, síla gumiček bude menší než tíhová síla a Matěj začne zrychlovat zpět k zemi. Po průchodu rovnovážnou polohou se gumičky natáhnou více, čímž ho znovu vytáhnou nahoru. Proto bude oscilovat tam a zpět.

Hledáme závislost síly F_y na výchylce z rovnovážné polohy y . Vzdálenost h v rovnici (2) může být obecně libovolná a vzorec bude stále platný. Místo zadané hodnoty h tak můžeme dosadit souřadnici $h + \Delta h$, čímž dostaneme

$$F_y = 4(h + \Delta h)k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h + \Delta h)^2}} \right).$$

Nyní označme $y = -\Delta h$, což je svislá souřadnice udávající Matějovu výchylku z rovnovážné polohy

$$F_y = 4(h - y)k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h - y)^2}} \right).$$

Sestavíme pohybovou rovnici

$$m\ddot{y} = -mg + F_y(y),$$

kde \ddot{y} je Matějovo aktuální zrychlení a tíhová síla $-mg$ má znaménko mínus, protože působí směrem dolů proti síle F_y . Dosadíme za $F_y(y)$ a upravíme

$$\ddot{y} = -g + \frac{4(h - y)k}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h - y)^2}} \right). \quad (3)$$

To je poměrně nehezky vypadající diferenciální rovnice a proto se jí radši nebudeme snažit vyřešit přesně. Stačí si uvědomit, že nás zajímá pouze perioda *malých* kmitů, což znamená, že výchylka může být libovolně malá. Výraz pro sílu tedy rozvineme pomocí Taylorova rozvoje kolem bodu $y = 0$ a členy obsahující vyšší mocniny y zanedbáme, protože po celou dobu pohybu budou oproti y dostatečně malé

$$\begin{aligned} F_y(y) &= F_y(0) + \frac{dF_y}{dy}(0)(y - 0) + \dots \approx \\ &\approx 4hk \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \right) - 4k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} + \frac{4h^2l}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) y, \\ \ddot{y} &= -\frac{4k}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} + \frac{4h^2l}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) y = -\frac{g}{h} \left(1 + \frac{l^3}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) y = \\ &= -\frac{g}{h} \left(1 + \frac{4hl}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}} - l(l^2 + 4h^2)} \right) y = \\ &= -Ky. \end{aligned}$$

To už je klasická rovnice harmonického oscilátoru

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Periodu už snadno vyjádříme z úhlové frekvence jako

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \left(1 + \frac{4h^2l}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}} - l(l^2 + 4h^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \left(\frac{4h^2 + l^2}{4h^2 + 2l^2 + l\sqrt{4h^2 + l^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Povšimněme si, že perioda vůbec nezávisí na tuhosti gumy k . Zato ale závisí na rozměrech l i h , nelze proto uvažovat pouze jejich poměr. To je z toho důvodu, že pro pružiny ze stejného materiálu se stejným průřezem závisí tuhost na ještě i na jejich délce.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.