

## Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

první série je za námi a stejně tak je za námi podzimní soustředění. Těm, kdo se ho zúčastnili, děkujeme za příjemně strávený týden a těšíme se na příště! Pokud jste ale na soustředění nebyli, nezoufejte, ještě máte šanci se dostat na jarní soustředění, které bude určitě super!

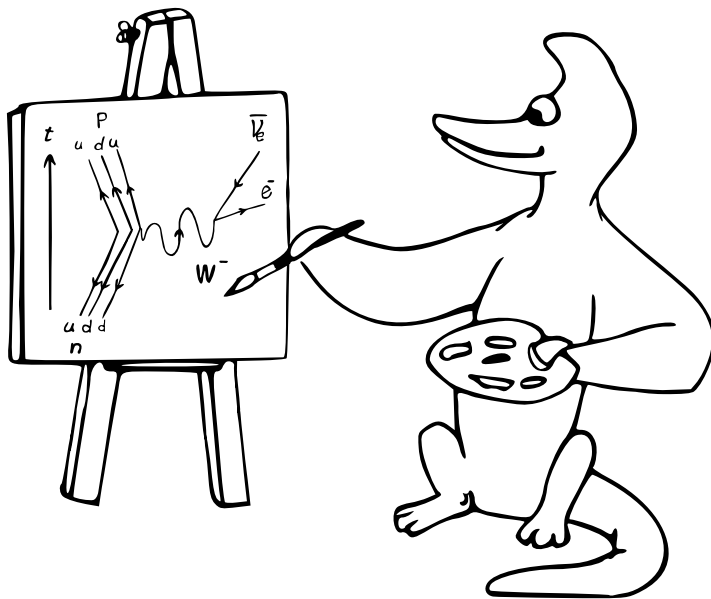
Ve druhé sérii budete jezdit výtahem, počítat barvy motýlích křídel nebo si hrát s diskem na gumičce. Pokud vám to nestačí, zkuste třeba zapálit Zemi (pozor na ekologické aktivisty). Zato při řešení experimentální úlohy si určitě uděláte spoustu přátel – každý někdy potřebuje obejmout. V seriálu nám pomůžete určit náklady na vytištění Karlových vzorových řešení.

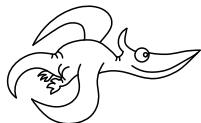
I letos proběhne v pátek 8. 11. Fyzikální Náboj. Sestavte tým a přijďte, rádi vás uvidíme! Po víkendu, v pondělí 11. 11., se bude konat Den s experimentální fyzikou (zkráceně DSEF). Během DSEFu navštívíte řadu zajímavých pracovišť a přednášek. Pokud se zajímáte o studium na Matfyzu, určitě se přijďte ve čtvrtek 21. 11. podívat na Den otevřených dveří MFF UK.

A konečně, v neděli 10. 11. (před DSEFem) pořádáme neformální FYKOSí setkání v čajovně, kde si můžete popovídat s kamarády. Pokud máte v plánu přijít, dejte nám vědět :) . Moc se na vás těšíme!

Mějte se krásně a řešte FYKOS!

*Vaši organizátoři*





## Zadání II. série

Termín uploadu: 19. 11. 2019 23.59

Termín odeslání: 18. 11. 2019

## Úloha II.1 ... rychlovýtah

3 body

Říká se, že lidé ve výtahu bez větších problémů snesou zrychlení  $a = 2,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Také bychom chtěli dorazit do plánovaného patra co nejdříve. Pokud by se výtah čtvrtinu doby jízdy rozjížděl s tímto zrychlením, polovinu doby jel konstantní rychlostí a zbývající čtvrtinu doby zpomaloval, jak vysoko by dokázal vyjet za celkovou dobu jízdy  $t = 1,00 \text{ min}$ ?

## Úloha II.2 ... slabý naviják

3 body

Uvažujme pevně zavěšenou kladku, na níž je umístěno lano zanedbatelné hmotnosti. Na jednom konci lana je upevněno závaží o hmotnosti  $m_1$  a na druhém konci se ve stejné úrovni nachází naviják o hmotnosti  $m_2$ . V prvním případě je naviják ukotven na zemi a při navíjení lana se zvedá pouze závaží. V druhém případě je závaží pevně spojeno s navijákem tak, že při navíjení se zvedají společně závaží i naviják. Určete, ve kterém případě bude zapotřebí menší síly pro zdvihnutí závaží (a tudíž slabšího navijáku).

## Úloha II.3 ... Dančina (ne)rovnovážná destička

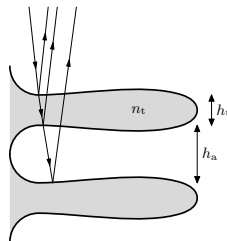
6 bodů

Destička tloušťky  $t = 1,0 \text{ mm}$  se šířkou  $d = 2,0 \text{ cm}$  se skládá ze dvou částí. První část o hustotě  $\rho_1 = 0,20 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  má délku  $l_1 = 10 \text{ cm}$ , druhá část o hustotě  $\rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  má délku  $l_2 = 5,0 \text{ cm}$ . Desku položíme na hladinu vody s hustotou  $\rho_v = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a počkáme, až se ustálí v rovnovážné poloze. Jaký úhel bude svírat rovina desky s hladinou vody? Jaká část destičky zůstane trčet nad hladinou?

## Úloha II.4 ... motýli

7 bodů

Duhové modrozelené zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu MORPHO je důsledkem konstruktivní interference světla odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných blan na povrchu křídel). Stupně mají index lomu  $n_t = 1,53$  a tloušťku  $h_t = 63,5 \text{ nm}$  a jsou odděleny mezerou vzduchu tloušťky  $h_a = 120,3 \text{ nm}$ , viz obrázek. Světlo na ně dopadá kolmo. Pro jaké vlnové délky viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum?



## Úloha II.5 ... kolečko s pružinkou

8 bodů

Máme tenký dokonale tuhý homogenní disk o poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$ , ke kterému je připojena gumička. Jedním koncem je upevněna ve vzdálenosti  $2R$  od okraje disku a druhým koncem na jeho okraji. Gumička funguje jako dokonalá tenká pružina o tuhosti  $k$ , klidové délce  $2R$  a zanedbatelné hmotnosti. Disk je upevněný ve svém středu tak, že se může v jedné rovině volně

otáčet kolem tohoto bodu, ale nemůže se posouvat či měnit rotační rovinu. Určete závislost velikosti momentu síly, kterou bude gumička urychlovat či zpomalovat rotaci disku v závislosti na úhlové výchylce  $\varphi$ , a sestavte pohybovou rovnici disku.

*Bonus* Určete periodu malých kmitů soustavy.

### Úloha II.P ... Země vzplála

10 bodů

Odhadněte, o kolik by stoupl obsah  $\text{CO}_2$  v atmosféře, pokud by shořela veškerá vegetace na zemském povrchu.

### Úloha II.E ... potřebuji obejmout

13 bodů

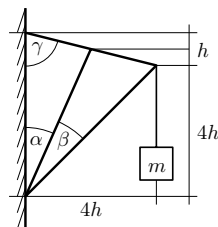
Změřte svůj objem několika různými způsoby.

### Úloha II.S ... směs souřadnic a grafiky

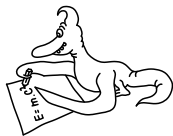
10 bodů

1. Určete, kolik procent první stránky vzorového řešení úlohy 26-IV-5 zabírá černá barva. Řešení této úlohy najdete na [https://fykos.cz/\\_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26\\_4\\_5.pdf](https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf).
2. Představte si, že máte tužku, jejíž tuha má poloměr  $r = 0,8 \text{ mm}$ . Tuha je vyrobena z grafitu v šesterečné soustavě, kde vzdálenost atomů uhlíku v jedné vrstvě je rovna  $a = 2,46 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  a jednotlivé vrstvy jsou od sebe vzdáleny  $c = 6,71 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Jakou délku tuhy spotřebujete na pomalování celé čtvrtky A4, pokud se papír při barvení pokryje průměrně 100 vrstvami tuhy?
3. Na obrázku 1 je zobrazena stabilní tyčová soustava, která se nachází v tíhovém poli se zrychlením  $g$ . Nejtlustší linka znázorňuje dokonale tuhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Na konci těchto tyčí je na nehmotném provázku upevněno závaží o hmotnosti  $m$  (na obrázku zobrazeno středně tlustou linkou). Tenké čáry symbolizují délky tyčí. Platí, že  $\alpha + \beta = 45^\circ$ . Tyč mezi úhly  $\alpha$  a  $\beta$  půlí horní tyč. Tyče mohou působit silou pouze ve svém směru (žádná složka není kolmá na tyč). Tyče jsou v místech dotyku s levou stěnou pevně upevněny. Určete, které tyče jsou namáhány v tlaku a které v tahu a spočítejte velikosti sil, které na ně působí.
4. Uvažujme spirálu, která začíná v počátku soustavy souřadné a odvíjí se rovnoměrně. Vzdálenost mezi jednotlivými závitů  $a$  je konstantní. Popište pohyb po této spirále ve vhodných souřadnicích.
5. Mějme šroubovici, která se odvíjí rovnoměrně. Šroubovice má konstantní poloměr  $R$  a konstantní vzdálenost mezi závitů  $h$ . Popište pohyb po šroubovici ve vhodných souřadnicích a určete, jaká je délka jednoho závitu této šroubovice.

*Bonus* Vymyslete nebo najdete (a citujte) souřadnice, které nejsou v knihovničce FO a byly by vhodné pro popis nějakého fyzikálního problému (uveďte jakého). Souřadnice popište převodem z kartézských souřadnic na vámi vybrané a zpět. Dále ukažte, jak lze ve vašich souřadnicích obecně určit vzdálenost dvou bodů.



Obr. 1: Soustava.



## Řešení I. série

### Úloha I.1 ... D1

3 body; průměr 2,90; řešilo 131 studentů

Kamionák se rozhodne na dálnici předjet autobus. Kamion jede o 2% vyšší rychlostí než autobus. Když je kamion přesně vedle autobusu, začne na dálnici pravotočivá zatáčka, která způsobí, že po celou zatáčku jedou obě vozidla vedle sebe a za nimi se už začíná tvořit značná kolona. Určete poloměr zatáčky (vnitřního jízdního pruhu), je-li šířka jízdních pruhů 3,75 m. *Matěj nemá rád kamiony na dálnicích.*

Jako rychlost vozidla budeme uvažovat rychlost jeho středu. Dále předpokládejme, že jak kamion, tak autobus jedou středem svého pruhu. Vzdálenost kamionu a autobusu potom bude  $d = 3,75$  m. Poloměry zatáček pravého a levého pruhu označíme po řadě  $r$  a  $R$ . Zřejmě platí  $R = r + d$ . Rychlost autobusu nechť je  $v$ , rychlost kamionu potom bude  $qv$ , kde  $q = 1,02$ . Jelikož celou zatáčku jedou vedle sebe, musí být jejich úhlové rychlosti stejné, neboli

$$\begin{aligned} \frac{v}{r} &= \frac{qv}{R}, \\ qr &= R = r + d, \\ r &= \frac{d}{q - 1} \doteq 200 \text{ m}. \end{aligned}$$

Poloměr zatáčky vychází přibližně 200 m.

*Matěj Mezera*

`m.mezera@fykos.cz`

### Úloha I.2 ... bateriový problém na dovolené

3 body; průměr 2,91; řešilo 131 studentů

Jak dlouho potrvá vybití plně nabité autobaterie (12 V, 60 Ah), zapomeneli někdo vypnout potkávací světla auta, zamkne a odejde pryč? Konkrétně nás zajímá situace pro přední světla H4 (výrobce udává 55 W každé) a zadní světla P21/5W (dle výrobce 5 W každé). Pro jednoduchost považujte transport energie z baterie do světel za bezztrátový, odběr dalších spotřebičů (jako GPS sledování) za zanedbatelný a napětí na baterii za konstantní. *Karel. Ani se neptejte.*

Nejprve určíme celkový výkon světel. Ten je součtem dvou předních a dvou zadních světel, tedy

$$P = 2 \cdot 55 \text{ W} + 2 \cdot 5 \text{ W} = 120 \text{ W}.$$

Celková energie baterie je dána součinem jejího maximálního napětí  $U = 12\text{ V}$  a maximální kapacity, tedy náboje  $Q = 60\text{ Ah}$ .

$$E = QU \doteq 2,6\text{ MJ}.$$

Energie se vybije za čas

$$t = \frac{E}{P} = 21\,600\text{ s} = 6\text{ h}.$$

Baterie se vybije zhruba za 6 hodin. Nejspíše ještě rychleji to nastane kvůli tomu, že nabitá nebude na 100% a protože jsou nějaké ztráty ve vedení energie z baterie. Faktor, který může trochu prodloužit svícení, je pokles napětí na baterii a svícení žárovek pod nižším výkonem. Ale vezte, že to už stejně nenastartujete. V rámci historky ze života stačí i tak 4 hodiny. Ponaučení pro život tedy je – nezapomínejte vypnout světla!

*Karel Kolář*  
karel@fykos.cz

### Úloha I.3 ... infrasauna 6 bodů; průměr 3,48; řešilo 56 studentů

Dano pokračuje ve vybavování svojí vily další saunou – tentokrát infrasaunou. Chce umístit žářivku těsně pod strop sauny ve výšce  $H = 2,5\text{ m}$  nad zemí. Emituje-li zářič energii s délkovým zářivým výkonem  $p = 1,2\text{ kW}\cdot\text{m}^{-1}$ , jaké budou intenzita a celkový výkon záření dopadajícího na povrch lidského těla zhruba  $h = 50\text{ cm}$  nad zemí? Žářivka je rovná, září homogenně a je upevněna těsně pod středem stropu od jednoho kraje sauny do druhého.

*Nápověda* Pro jednoduchost uvažujte, že stěny, kde žářivka končí, a strop jsou zrcadla a že podlaha a stěny, kterých se žářivka nedotýká, záření dokonale absorbují a nevyzařují zpět do místnosti.

*Karel byl ve wellness na Slovensku.*

Nápověda se nám bude hodit. Říká nám, že si můžeme představit, že záření se šíří stejně, jako kdyby žářivka byla nekonečně dlouhá a měla nad sebou zrcadlo. Pokud bychom toto omezení neměli, museli bychom uvažovat, že každý materiál nějakou část elektromagnetických vln odráží a nějakou absorbuje. Absorbovanou energii potom zase vyzařuje zpět. Toto vyzařování ale obvykle probíhá na jiných vlnových délkách – podle toho, na jakou teplotu se materiál zahřeje. K určení této teploty bychom ale museli znát tepelnou kapacitu a vodivost materiálu. Navíc by se oblast bezprostředně u zdroje zahřála na výrazně vyšší teplotu než okolí a úloha by nejspíše nešla řešit jinak než numericky. Naše zjednodušené řešení je sice o něco méně přesné, ale mělo by být docela dobrým odhadem.

Úloha je zajímavá v tom, že intenzita záření dopadajícího na jednotkovou plochu neklesá jako obvykle s druhou mocninou vzdálenosti, ale

klesá lineárně. To si můžeme odvodit například tak, že si kolem našeho tyčového zářiče představíme válec,<sup>1</sup> který je s ním souosý. Ať bude mít válec jakýkoliv poloměr, celková energie záření dopadajícího na jeho plášť bude stále stejná. Záření vycházející podstavami nás nemusí zajímat, protože podle úvahy výše je situace stejná, jako kdyby byl zářič nekonečně dlouhý. Pro samotnou zářivku bez stěn by pro intenzitu záření  $I_0$  ve vzdálenosti  $r$  od zářivky platilo

$$I = \frac{p}{2\pi r}.$$

K tomu musíme ještě uvažovat zrcadlo, které je nad zářivkou. To nám ale intenzitu záření jenom zdvojnásobí, protože díky němu se polovina záření odrazí zpět dolů. Závislost intenzity na vzdálenosti od zářivky tak bude

$$I = \frac{p}{\pi r}.$$

Vzdálenost povrchu od lidského těla je  $r = H - h$ , tedy intenzita vychází  $I \doteq 191 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Celkový výkon dostaneme, pokud odhadneme, jakou plochu má lidské tělo. Jako přibližný odhad pro pozici vleže na zádech či na břiše můžeme vzít<sup>2</sup> například průměrnou výšku člověka  $a = 1,7 \text{ m}$  a průměrnou hodnotu transversálního rozměru hrudníku  $b \doteq 0,3 \text{ m}$  a tyto hodnoty vynásobit, jako kdyby byl člověk kvádrem. Odhad to nebude moc přesný, ale pokud bereme rozměr hrudníku, tak se částečně vykompenzuje chyba toho, že jsme zapomněli na ruce a že naopak nohy a hlava jsou užší. Takto odhadnutá plocha člověka je  $S = ab \doteq 0,5 \text{ m}^2$  a výkon, který bude dopadat na povrch lidského těla, vychází

$$P = IS = \frac{p}{\pi(H-h)}ab \doteq 96 \text{ W}.$$

Na povrch člověka dopadá zhruba  $P \doteq 100 \text{ W}$  záření.

**Karel Kolář**  
karel@fykos.cz

#### Úloha I.4 . . . disco koule 7 bodů; průměr 3,49; řešilo 59 studentů

*Bylo nebylo, Mišo chtěl uspořádat největší párty vůbec. K tomu je ale potřeba pořádná disco koule, a tak si nechal Měsíc obložit zrcadly, čímž z něj udělal největší disco kouli, která měla odrážet světlo od Slunce. Je zřejmé, jak párty dopadla, ale nás zajímá nejmenší možný rozdíl magnitud Slunce a disco koule při pohledu ze Země.*

*Matěj to rozjel na plné koule.*

Mišo zmenil Mesiác na guľové zrkadlo. Ak si v prvom priblížení Slnko predstavíme ako bodový zdroj svetla v nekonečne, nezáleží na vzdialenosti Mesiaca a Zeme od Slnka. Situáciu si teda môžeme predstaviť ako guľové zrkadlo osvetlené (takmer) rovnomerne slnečným svetlom, okolo

<sup>1</sup>V literatúre je niekedy označovaný ako *Gaussův válec*.

<sup>2</sup><http://www.n-i-s.cz/cz/parametry-populace/page/33/>

ktorého hľadáme najviac osvetlené miesto vo vzdialenosti Zem-Mesiac od neho.

Guľové zrkadlo zrejme odráža najviac svetla dopredu naspäť ku zdroju žiarenia. Bude nás preto zaujímať situácia v splne. Je však dôležité podotknúť, že ak by boli všetky tri telesá presne na jednej priamke, nastane zatmenie Mesiaca. Pre náš výpočet ale nie je veľký rozdiel medzi polohou tesne vedľa tieňa a polohou na priamke, ak tienenie Zeme nebudeme uvažovať.

Slnko sa v zrkadle zobrazí (podľa zobrazovacej rovnice pre  $a_1 \gg f$  v paraxiálnej aproximácii) v polovici vzdialenosti medzi stredom Mesiaca a bodom na jeho povrchu najbližšie k Zemi. Navyše bude obraz Slnka extrémne zmenšený, takmer bodový. Na úrovni obežnej dráhy Zeme Slnko dodáva tok energie  $F_0 = 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Po odraze od zrkadla sa bude tok zmenšovať ako pri bodovom zdroji  $F \propto x^{-2}$ . Vzdialenosť povrchu Mesiaca od obrazu zdroja v zrkadle je

$$a_2 = \frac{r_M}{2},$$

kde  $r_M = 1737 \text{ km}$  je polomer Mesiaca. Vzdialenosť od zdroja k povrchu Zeme je približne

$$s = R - a_2 - r_Z,$$

kde  $R = 356 \cdot 10^3 \text{ km}$  je vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca v perigeu<sup>3</sup> a  $R_Z = 6378 \text{ km}$  je polomer Zeme. Tok energie od odrazu na povrchu Zeme teda máme ako

$$F = F_0 \left( \frac{a_2}{s} \right)^2.$$

Rozdiel zdanlivých magnítud (jasností)  $\Delta m$  je definovaný pomocou Pogsonovej rovnice ako

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left( \frac{F_1}{F_2} \right).$$

Po dosadení  $F$  a  $F_0$  za toky dostávame

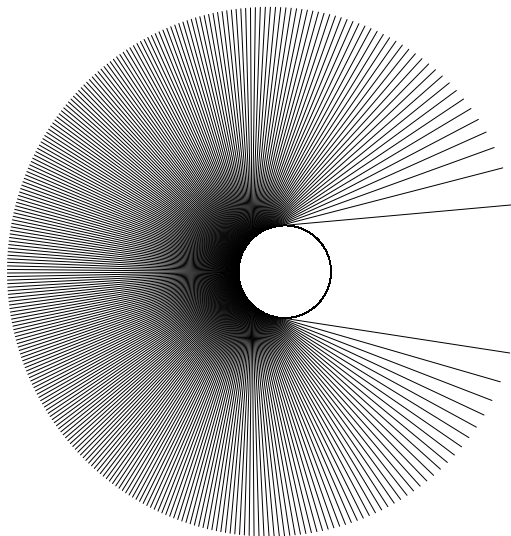
$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left( \frac{F}{F_0} \right) = 5 \log_{10} \left( \frac{s}{a_2} \right) = 13,0 \text{ mag}.$$

Zdanlivá jasnosť Slnka je  $-26,7 \text{ mag}$ , čo dáva jasnosť odrazu  $-13,7 \text{ magnítud}$ . To je asi o jednu hviezdnu veľkosť jasnejšie ako Mesiac v splne v perigeu.

### Poznámky k došlým riešením

Väčšina riešiteľov sa pokúšala úlohu riešiť tak, že vypočítala množstvo energie dopadajúcej na povrch Mesiaca. Pri tomto výpočte treba použiť plochu  $\pi R^2$ , nie  $2\pi R^2$ . Osvetlená je síce polovica povrchu Mesiaca, avšak dodaná energia ide miesto od miesta s kosínom výšky Slnka nad obzorom, celkovo v slnečných lúčoch Mesiac vycloní len svoj prierez.

<sup>3</sup>Zaujíma nás najmenší možný rozdiel magnítud Slnka a jeho odrazu, odraz je najjasnejší keď je k nám Mesiac najbližšie.



Obr. 2: Rovnobežné lúče po odraze od guľového zrkadla

Následne ste predpokladali, že táto energia je vyžiarená rovnomerne do celej, resp. polovičnej sféry. Z obrázku 2 môžeme vidieť ako sa rovnomerne rozložený zväzok rovnobežných lúčov chová po odraz od guľového zrkadla. Celkovo teda takýto postup nevedol k správne mu riešeniu a zaslúžil si do 5 bodov. V prípade energetickej bilancie, a teda otázky povrchovej teploty, by toto bol správny postup.

Iný prístup k riešniu zvolila skupina riešiteľov uvažujúca cez albedá. Tu si však treba dať pozor na skutočnosť, že telesá Slnecnej sústavy odrážajú svetlo difúzne. Z tohoto dôvodu sa zavádzajú dve rôzne albedá - geometrické popisujúce jasnosť a Bondovo zamerané na príjem energie telesom, ktoré majú vo všeobecnosti rôzne hodnoty. Práve spôsob odrazu značne komplikuje určovanie jasností aj v praxi.<sup>4</sup> V prípade použitia zrkadla sa bohužiaľ ani jedno nedá priamo použiť.

Na záver by som chcel poznamenať, že správnu „optickou“ cestou sa vydali len 4 riešitelia, pričom pekné, správne a prehľadné riešenie Martina Vavříka ma potešilo, čím si zaslúžil bonusový bod.

*Jozef Lipták*  
liptak.j@fykos.cz

---

<sup>4</sup>Známy je napr. efekt opozície, kedy sú asteroidy jasnejšie, ako by mali byť podľa predpovede



**Úloha I.5 . . . obecně relativistická**

9 bodů;

průměr 7,30; řešilo 69 studentů

Starman se před odletem do kosmu na cestu k Marsu ve svém voze Tesla Roadster domluvil s Muskem, že jakmile bude ve vzdálenosti  $r = 5,0 \cdot 10^6$  km od hmotného středu Země, tak na něj Musk zasvítí výkonným zeleným laserem. Vlnová délka laseru se vlivem gravitačního pole Země zvětší. Porovnejte tuto změnu vlnové délky s vlivem elektromagnetického Dopplerova jevu, vzdaluje-li se Starman od Muska rychlostí  $v = 4,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Uvažujte, že oba jevy působí zvlášť.

*Vašek by rád vylet se Starmanem.*

Částí úlohy je vyřešit gravitační posuv vlnové délky v centrálním gravitačním poli. Tento efekt je dán čistě relativistickými jevy, které řeší obecná relativita. My se však pokusíme problém vyřešit nejdříve intuitivně užitím klasické fyziky. Poté si ukážeme řešení, které vychází z jednoho ze základních principů obecné teorie relativity, principu ekvivalence.

*Klasický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky*

Uvažujme pouze vliv gravitačního pole Země. Pro vyřešení této úlohy využijeme zákon zachování energie pro fotony vyzářené laserem. Náš foton se pohybuje v centrálním gravitačním poli Země, a proto při jejím opouštění se jeho gravitační potenciální energie zvýší z hodnoty  $E_{p,0}$  na hodnotu  $E_p$ . Změnu gravitační potenciální energie vzhledem k ostatním tělesům (jako např. Slunci) zanedbáváme. Změna této energie se projeví změnou frekvence fotonu. Při výstupu z laseru na povrchu Země bude mít foton frekvenci  $f_0$  a u Starmana frekvenci  $f$ . Celkově ze zákona zachování energie dostáváme rovnost

$$hf_0 + E_{p,0} = hf + E_p, \quad (1)$$

kde  $h$  je Planckova konstanta. Dále musíme najít vztah pro potenciální energii. Přírůstek potenciální energie gravitačního pole je rovna

$$dE_p = -\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r}, \quad (2)$$

kde  $d\mathbf{r}$  je infinitezimální přírůstek polohového vektoru  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}_g$  je gravitační síla, pro kterou v našem případě podle Newtonova gravitačního zákona platí

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $m$  je hmotnost fotonu,  $M$  je hmotnost Země,  $r$  je vzdálenost od hmotného středu Země a  $\hat{\mathbf{r}}$  je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru  $\mathbf{r}$ . Síla  $\mathbf{F}_g$  má stejný směr a opačnou orientaci jako polohový vektor  $\mathbf{r}$ . Proto rovnice (2) pro přírůstek potenciální energie přejde do tvaru

$$dE_p = F_g dr = G \frac{mM}{r^2} dr, \quad (3)$$

kde  $F_g$  je velikost síly  $\mathbf{F}_g$ . Integrováním levé a pravé strany rovnice (3) dostaneme

$$E_p = -G \frac{mM}{r} + C,$$

kde  $C$  je integrační konstanta, která se obvykle volí jako  $C = 0$ , aby byla nulová hladina potenciální energie v nekonečnu. Tuto potenciální energii dosadíme do rovnice (1),

$$hf_0 - G \frac{m_0 M}{r_0} = hf - G \frac{mM}{r}.$$

Otázkou je, co máme dosadit za hmotnost fotonu. Využijeme Einsteinova vztahu ekvivalence energie a hmotnosti  $E = mc^2$  a za hmotnost dosadíme  $m = hf/c^2$ . Po dosazení rovnicí vydělíme Planckovou konstantou  $h$ ,

$$f_0 - G \frac{f_0 M}{r_0 c^2} = f - G \frac{f M}{r c^2}.$$

Z této rovnice vyjádříme poměr frekvencí  $f/f_0$ ,

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1 - \frac{GM}{r_0 c^2}}{1 - \frac{GM}{r c^2}}.$$

Pro poměr vlnových délek  $\lambda/\lambda_0$  platí reciproký vztah

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \frac{GM}{r c^2}}{1 - \frac{GM}{r_0 c^2}}.$$

Uvědomme si, že v našem případě je člen  $\frac{GM}{r_0 c^2}$  velmi malý (tj.  $\frac{GM}{r_0 c^2} \ll 1$ ), popř. člen  $\frac{GM}{r c^2}$ , a proto můžeme použít aproximaci  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ , jedná se o první dva členy Taylorova rozvoje okolo bodu  $x = 0$ . Ke tvaru této aproximace můžeme také rychle dospět rozšířením zlomku  $\frac{1}{1+x}$  výrazem  $1 - x$ . Jmenovatel tak nabyde tvaru  $1 - x^2$ . Vzhledem k tomu, že provádíme aproximaci do řádu  $x$ , můžeme člen  $x^2$  ve jmenovateli zanedbat. Použitím aproximace dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 - \frac{GM}{r c^2}\right) \left(1 + \frac{GM}{r_0 c^2}\right) \approx 1 - \frac{GM}{r c^2} + \frac{GM}{r_0 c^2}.$$

Relativní rozdíl pak je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right). \quad (4)$$

Dosadíme-li číselné hodnoty  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg,  $r_0 = 6 \cdot 10^6$  m a další, zjistíme, že rozdíl vlnové délky světla, které Starman pozoruje a které Musk ze Země vyzáří, je řádově jen  $10^{-9}\lambda_0$ .

### *Elektromagnetický Dopplerův jev*

Nyní budeme samostatně uvažovat elektromagnetický (relativistický) Dopplerův jev. V případě, že se zdroj a příjemce vzájemně vzdalují ve směru šíření signálu rychlostí  $v$ , platí pro něj vztah

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}},$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Jednoduchým přepočtem podle vzta-  
hu  $c = \lambda f$  dostaneme pro vlnové délky vztah

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Rychlost  $v$ , kterou se Starman vzdaluje od Země je v porovnání s rychlostí světla  $c$  velmi malá (nerelativistická). Můžeme tak využít přiblížení  $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2x$  pro malá  $x$  (tj.  $x \ll 1$ ), jedná se o první dva členy Taylorova rozvoje okolo bodu  $x = 0$ . Po aproximaci dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{1 + \frac{v}{2c}}{1 - \frac{v}{2c}}.$$

Použijeme-li ještě aproximaci  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ , kterou jsme již jednou použili výše, dostaneme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 + \frac{v}{2c}\right)^2 \approx 1 + \frac{v}{c}.$$

Relativní rozdíl vlnových délek je pak

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{v}{c}. \quad (5)$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme, že rozdíl vlnových délek způsobený elektromagnetickým Dopplerovým jevem je přibližně  $10^{-5}\lambda_0$ . Z vypočtených hodnot můžeme usoudit, že vliv Dopplerova jevu je v našem problému asi o 4 řády větší než vliv gravitačního pole Země.

### *Obecně relativistický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky*

Jedním ze základních principů, na nichž je vybudovaná obecná teorie relativity, je princip ekvivalence. Názorně je tento princip představen v myšlenkovém experimentu s tzv. Einsteinovým výtahem. Podle principu ekvivalence nemůže osoba nacházející se v uzavřeném výtahu žádným experimentem zjistit, zda se výtah nachází v homogenním gravitačním poli, anebo zrychluje s konstantním zrychlením. V prvním případě na osobu působí gravitační síla  $a$  v druhém případě setrvačná síla. Jedná se tedy o princip ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti.

Pro úplnost dodejme, že druhým krajním případem je situace, kdy není schopna osoba uvnitř uzavřeného výtahu rozlišit, zda se nachází ve volně padajícím výtahu v homogenním gravitačním poli, anebo jako volný objekt ve vakuu.

Einsteinovým výtahem vyřešíme i naši úlohu. Foton v gravitačním poli umístíme do myšleného Einsteinova výtahu o malé výšce  $\Delta h$  (jedná se o klidovou výšku), který se vzhledem k Zemi nepohybuje. Foton pole-  
tí od podlahy ke stropu. U podlahy má vlnovou délku  $\lambda_p$  a u stropu  $\lambda_s$ . Vlivem gravitačního pole bude vlnová délka  $\lambda_s$  větší než  $\lambda_p$ . Kvantita-  
tivní výsledek tohoto experimentu neznáme. Víme však, že bude stejný jako v druhé situaci. V té se výtah nachází ve vakuu a zrychluje se zrychlením  $\mathbf{a}$ , které má stejnou velikost a opačnou orientaci jako inten-  
zita gravitačního pole  $\mathbf{K}$  v první situaci.

Na obě situace budeme nahlížet z pohledu pozorovatele uvnitř výtahu. Z první situace víme, že doba letu fotonu výtahem je rovna

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{c}.$$

Vzhledem k tomu, že se nacházíme v relativitě, upřesňujeme, že se jedná o čas, který by naměřil onen pozorovatel ve výtahu. Ten samý čas naměří v druhé situaci. V druhé situaci však za tento čas zrychlí výtah o rychlost

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{a\Delta h}{c}.$$

To znamená, že rozdíl rychlosti při vyzáření fotonu u podlahy výtahu, kde měl vlnovou délku  $\lambda_p$ , a při detekci fotonu u stropu výtahu, kde měl vlnovou délku  $\lambda_s$ , je právě  $\Delta v$ . Osoba ve výtahu v této situaci by tedy spočítala změnu vlnové délky fotonu podle elektromagnetického Dopplerova jevu, který už umíme popsat kvantitativně.

Využijeme už dříve získané aproximace, tj. rovnice (5), podle které v našem případě platí

$$\frac{\lambda_s - \lambda_p}{\lambda_p} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_p} \approx \frac{\Delta v}{c} = \frac{a\Delta h}{c^2}.$$

Vzhledem k tomu, že v našem problému se Starmanem se foton pohybuje v nehomogenním gravitačním poli, musíme přejít k infinitezimálním změnám,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{Kdh}{c^2}.$$

Zde píšeme už rovnost, neboť při přechodu k infinitezimálním přírůstkům všechny členy, které jsme zanedbali, vymizí. Zároveň jsme za zrychlení dosadili velikost intenzity gravitačního pole  $\mathbf{K}$ , pro kterou platí

$$K = \frac{GM}{r^2}.$$

Dosažením dostaneme rovnici

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r^2} dr.$$

Zde je infinitezimální přírůstek vzdálenosti  $dh = dr$ . Integrovaním levé a pravé strany poslední rovnice dostaneme

$$\ln \frac{\lambda}{\lambda_0} = -\frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Nyní použijeme aproximace  $\ln x \approx x - 1$  v okolí bodu  $x = 1$ . Víme totiž, že vlnová délka se příliš nezmění. Dostáváme tedy

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right).$$

To je stejný výsledek jako v případě klasického přístupu (rovnice (4)). Uvědomme si však, že v případě klasického přístupu jsme postupovali spíše tak, že jsme jen použili několik, na první pohled vhodných, známých vzorečků. Použití některých vzorečků jsme ani pořádně neodůvodnili, což ale nelze, protože gravitační posuv vlnové délky je čistě obecně relativistický jev. Správný

postup řešení příkladu je tedy pouze skrze obecnou teorii relativity. V případě, že bychom chtěli uvažovat jak gravitační posuv vlnové délky, tak elektromagnetický Dopplerův jev zároveň, se už bez nástrojů obecné teorie relativity neobejdeme.

*Václav Mikeska*

v.mikeska@fykos.cz

## Úloha I.P ... ničitel planet

10 bodů;

průměr 2,60; řešilo 60 studentů

*Jak velká by mohla být co nejmenší a nejlhčí zbraň, která by dokázala zničit planetu? Samozřejmě ještě v rozumném čase v rámci lidského života a čím rychleji, tím lépe.*

*Karel se moc dívá na sci-fi, tentokrát na titulky Men in Black II.*

V této úloze je naším úkolem zamyslet se nad tím, jak zničit planetu. Pod pojmem planeta budeme chápat těleso obíhající kolem nějaké hvězdy, které je dostatečně hmotné na to, aby mělo přibližně kulový tvar a které své okolí vyčistilo od ostatních menších těles. Mírně tak rozšíříme současnou definici,<sup>5</sup> abychom se nemuseli omezovat jen na naši Sluneční soustavu. Nyní se musíme zamyslet nad tím, jakým způsobem můžeme takovou planetu zničit. Můžeme ji například

- rozmetat na kousičky (nebo aspoň na několik kusů),
- stlačit do tak malého objemu, že se z ní stane černá díra,
- vypařit nebo jinak přeměnit většinu její hmoty,
- navést na kolizní dráhu s hvězdou, kolem které obíhá, nebo s jinou planetou.

Někdo by za zničení planety mohl požadovat stav, kdy je na ní vyhuben veškerý život nebo kdy se stane pro život neobyvatelnou. Kvůli všemožným bakteriím a virům je však toto kritérium velmi vágní – některý život dokáže přežít dokonce i ve volném vesmíru, někdy se pro změnu nedokážeme shodnout na tom, co ještě život je a co už není.

Nyní se podíváme na jednotlivé způsoby zničení planety a navrhneme a porovnáme zbraně, které bychom k tomu mohli použít.

### *Rozmetání na kousičky*

Snad jako první nás napadne umístit doprostřed planety nějakou bombu. Jak silná exploze by to musela být? Spočítejme energii potřebnou k tomu, abychom rozmetali planetu na kousičky, které spolu gravitačně neinteragují. Určitě je to více energie než potřebujeme, čili tím dostaneme alespoň horní odhad.

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/IAU\\_definition\\_of\\_planet](https://en.wikipedia.org/wiki/IAU_definition_of_planet)

Hmotnost planety označme  $M$ , její poloměr bude  $R$ . Předpokládejme konstantní hustotu  $\rho$ , neboli pro celkovou hmotnost  $m$  nacházející se pod poloměrem  $r$  platí

$$\frac{m}{r^3} = \frac{M}{R^3} = \frac{4}{3}\pi\rho.$$

Nyní odstraníme „slupku“ s poloměrem  $dr$  ve vzdálenosti  $r$  od středu. Její hmotnost bude  $dm = \rho dV$ , kde pro její objem platí  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Gravitační potenciál od zbytku planety je přitom

$$V(r) = -\frac{Gm}{r} = -\frac{4}{3}\pi Gr^2 \rho.$$

Na odstranění slupky tak musíme dodat energii

$$dE = -V(r)dm = \frac{16}{3}\pi^2 Gr^4 \rho^2 dr.$$

Celkovou dodanou energii spočítáme integrálem přes jednotlivé slupky

$$E_b = \int_0^R dE = \frac{16}{3}\pi^2 G \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Tím jsme získali energii potřebnou na zničení planety touto cestou. Samozřejmě jsme zanedbávali gravitační působení ostatních těles.

Pro planetu Zemi by rozmetání vyžadovalo  $E_Z \doteq 2 \cdot 10^{32}$  J. Mohlo by se to provést například šikovně umístěnou bombou ve středu Země. Pro porovnání, nejsilnější dosud vytvořená bomba jménem Tsar<sup>6</sup> uvolnila energii  $E_T \doteq 2 \cdot 10^{17}$  J, přičemž její objem byl  $V_T \doteq 30$  m<sup>3</sup>. Jistě by šlo sestrojít ještě účinnější bombu, nicméně toto je pouze řádový odhad. Objem Země je přibližně  $1 \cdot 10^{21}$  m<sup>3</sup>, potřebný objem Tsar bomb by tak byl zhruba  $3 \cdot 10^{16}$  m<sup>3</sup>. Nicméně problém je v tom, že veškerá tato energie by se nejspíše nepřeměnila na kinetickou energii zbytků planety, protože nějaká část by se určitě přeměnila na teplo. Navíc, velikost bomby by byla při explozi trochu nepraktická. Nicméně jako řádový odhad to stačí.

Kdybychom netrvali na použití alespoň rámcově představitelných technologií, mohli bychom přemýšlet o bombě vytvořené z antihmoty. Ačkoliv anihilace neproběhne tak rychle, jak bychom mohli myslet díky tomu, že energie vznikající na styčné ploše brání dalšímu kontaktu, za lidský život by se potřebná energie jistě uvolnila. Výrobu antihmoty budeme ještě diskutovat, nyní se zaměříme čistě na její velikost.

Energii antihmoty lze vyjádřit pomocí Einsteinova vzorce jako  $E_a = 2m_a c^2$ , kde faktor 2 značí, že antihmota při anihilaci využije i energii skrytou ve hmotě, se kterou reaguje. Potřebná hmotnost antihmoty je tedy  $m_a = E_a / (2c^2)$ .

Jako prvek by bylo nejjednodušší použít vodík. Problém je v tom, že s plyným antivodíkem by se nejspíš trochu špatně manipulovalo,

<sup>6</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Tsar\\_Bomba](https://en.wikipedia.org/wiki/Tsar_Bomba)

pokud bychom ho neuzavřeli do nějaké pevné nádoby (samozřejmě také z antihmoty). Navíc, se samotnými antiprotony bychom si nevystačili, protože ve stlačování by nám zabránila elektrická síla. Mohli bychom vodík zchladit na nějakých 14 K, kdy přejde do pevného skupenství, jenže i to je trochu nepraktické. Druhou možností je pak uchovávání antiprotonů v elektromagnetické pasti, ovšem tak bychom nejspíše nedokázali dosáhnout dostatečné hustoty a výsledná bomba by byla příliš velká.

Předpokládejme tedy, že by se nám podařilo vytvořit nějaký jednoduchý a za běžných podmínek pevný kov, například lithium. Jeho hustota je  $\rho_{\text{Li}} \approx 500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , čili pro objem zbraně dostáváme

$$V_a = \frac{E_a}{2c^2 \rho_{\text{Li}}}.$$

Pro Zemi to dělá cca  $2 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$ , což není vůbec málo. Na druhou stranu vychází o čtyři řády menší objem, než u Tsar bomby.

### Rozbití na kusy

Tento způsob je vlastně méně důkladné rozmetání na kousíčky – spokojíme se s tím, že planetu rozbijeme na několik kusů, které výbuchem odmrštíme alespoň o nějakou malou vzdálenost od sebe. Je zřejmé, že k tomu bude stačit méně energie než v předchozím případě. Otázkou ale je, kolik přesně. Mohli bychom například uvažovat rozmetání nějaké části planety, pak bychom potřebovali jen nějaké procento energie výše.

Považujeme za rozumný kompromis scénář, ve kterém rozptýlíme zbytky planety rovnoměrně do oblasti tvaru koule s poloměrem  $2R$ . Energii potřebnou na takovýto čin lze spočítat pomocí výsledného vzorce z předchozího případu. Představme si, že spotřebujeme energii

$$E(R) = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

na to, abychom kousky planety poslali do nekonečna. Potom je necháme spadnout zpět tak, že zformují soustavu trosek s poloměrem  $2R$ . Tím získáme zpět energii  $E(2R)$ . Celková energie tak vychází

$$E = E(R) - E(2R) = \frac{3}{4} E(R) = \frac{3}{4} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Takto složitým způsobem planetu samozřejmě ničit nebudeme, pouze jsme pomocí něj snadno spočítali potřebnou energii z dříve spočítaného případu. Vidíme, že potřebnou energii jsme zmenšili pouze o čtvrtinu. Nevíme přesně, do jak moc velké oblasti musíme planetu rozptýlit, abychom jí mohli považovat za zničenou, nicméně je rozumné očekávat že to bude něco mezi dvojnásobkem jejího poloměru a nekonečnem, což ale energeticky vychází téměř stejně. Z toho vyplývá, že jako řádový odhad energie lze použít  $E(R)$ .

*Stlačení do černé díry*

Stlačení planety do černé díry je určitě náročný úkol, neboť nám v tom brání elektrická síla a jadrové síly, které jsou mnohem silnější než gravitační, která naopak stlačování pomáhá. Mohli bychom ale na planetu vypustit černou díru, která by ji pohltila.

Schwarzschildův poloměr černé díry o hmotnosti  $m$  je

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2}.$$

Pro typickou planetu je tato hodnota docela malá, řádově centimetry. Intuice napovídá, že černá díra vytvořená z většího tělesa, třeba ze Slunce, by planetu pohltila spolehlivěji. Taková díra by měla poloměr řádově jednotky kilometrů, takže by se jednalo o celkem efektivní zbraň z hlediska velikosti.

Jak by ale přesně černá díra působila na planetu, kdyby se dostala například do jejího středu? Díky své velké hmotnosti by do sebe začala vtahovat hmotu z planety, která by se díky tomu stlačovala a zahřívala, následkem čehož by padající hmota velmi silně vyzářovala. V rozporu s naší intuicí by tak černá díra část planety pohltila, nicméně zbytek planety by v důsledku vznikajícího záření explodoval. Díky zákonu zachování momentu hybnosti by navíc hmota padající do černé díry začala neuvěřitelně rotovat.

Je těžké podat výpočty podložený odhad, jakou velikost černé díry bychom potřebovali, neboť procesů, které se při ničení planety odehrají, je hodně. Navíc vyžadují znalost obecné relativity a obratné řešení diferenciálních rovnic. Odhadněme tedy, že ke zničení planety by stačila černá díra o hmotnosti planety samotné, tedy (v případě Země) se Schwarzschildovým poloměrem v řádu centimetrů.

Zdá se tedy, že jsme narazili na relativně prostorově efektivní způsob, byť je k němu potřeba sehnat a na Zem dopravit těžkou černou díru, což je těžké provést.

*Přeměna planety*

Pokud bychom nějakým způsobem měnili chemické složení planety, pořád by se jednalo o planetu, takže bychom ji nezničili. Musíme tedy planetu anihilovat kompletně. K anihilaci bychom přitom mohli využít antihmotu. Předpokládejme, že antihmotu můžeme nějakým způsobem vytvořit, přičemž k získání množství o hmotnosti  $m$  potřebujeme energii  $E_a = mc^2$ . Antihmota při kontaktu s hmotou anihiluje a uvolní jak svoji energii, tak energii hmoty. Tím dostaneme energii  $2E_a$ . Můžeme tak vytvořit stroj, který generuje antihmotu, nechává ji anihilovat s hmotou a ze získané energie vytváří ještě více antihmoty.

Představme si, že takový stroj máme. Nechť generuje hmotnostní tok antihmoty  $q$ . Stroj ale vyrábí tolik antihmoty, na kolik energie má k dispozici, takže tento tok se časem mění podle toho, kolik hmoty již



bylo anihilováno. Tento fakt můžeme zapsat pomocí rovnice  $q(t+T) = 2\eta q(t)$ , kde  $\eta$  je účinnost celého procesu a  $T$  je součet času, za který proběhne anihilace, a času, za který se ze získané energie vytvoří nová antihmota.

Řešením této rovnice je například funkce

$$q(t) = q_0 (2\eta)^{\frac{t}{T}} = q_0 e^{\frac{t}{T} \ln 2\eta},$$

kde  $q_0$  je nějaký počáteční tok. Nyní můžeme tok  $q$  zintegrovat podle času, čímž dostaneme celkovou hmotnost vytvořené antihmoty

$$m_a = \int_0^\tau q dt = \frac{q_0 T}{\ln 2\eta} \left( e^{\frac{\tau}{T} \ln 2\eta} - 1 \right).$$

Anihilace planety s hmotností  $M$  bude úspěšně dokončena ve chvíli, kdy bude platit  $m_a = M$ , tedy v čase

$$\tau = \frac{T}{\ln 2\eta} \ln \left( \frac{M \ln 2\eta}{q_0 T} + 1 \right).$$

Závislost  $M(\tau)$  potom bude exponenciální. Z toho plyne, že pokud budeme mít k dispozici zařízení, které dokáže relativně konsistentně z energie tvořit antihmotu a vzniklou antihmotu anihilovat, tak dokážeme planetu zničit extrémně rychle. Není se ale čemu divit, neboť přístroj, který by efektivně zužitkoval jakékoliv množství energie na tvorbu antihmoty není ani zdaleka v dnešních technologických možnostech, lze-li jej vůbec sestavit. Pro srovnání: doposud lidstvo vytvořilo jen pár nanogramů antihmoty<sup>7</sup>.

Továrna na antihmotu v CERNu<sup>8</sup> má kupříkladu poloměr 30 m, průřez odhadujeme na 1 m<sup>2</sup>, tedy má objem  $V_a$  řádově desítky metrů krychlových. Jestliže se CERNu podařilo vyrobit  $\mu = 1$  ng za řádově  $t = 10$  let provozu a my chceme vyprodukovat antihmotu o hmotnosti Země, tak bychom potřebovali celkový objem urychlovačů na zničení planety za  $\tau = 100$  let

$$V_1 = \frac{M_Z}{\mu} \frac{t}{\tau} V_a \approx 10^{35} \text{ m}^3,$$

což je tak o čtrnáct řádů více než její objem.

Pokud bychom nechtěli vytvořit antihmotu o objemu planety, ale spokojili bychom se s energií planet-ničící bomby vypočítané v předcházející sekci, potřebovali bychom k tomu hmotnost

$$m_a = \frac{E}{2c^2} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{Rc^2}.$$

Stačila by přitom polovina energie, neboť při anihilaci dodá druhou polovinu energie hmota. Tomu odpovídá objem

$$V_2 = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{Rc^2 \mu} \frac{t}{\tau} V_a,$$

kde  $M$  je hmotnost planety a  $R$  její poloměr. Pro Zemi vychází  $V_2 \approx 10^{25} \text{ m}^3$ , což je stále o tři řády více než její objem.

<sup>7</sup><https://www.symmetrymagazine.org/article/april-2015/ten-things-you-might-not-know-about-antimatter>

<sup>8</sup><https://home.cern/science/accelerators/antiproton-decelerator>

*Pád do Slunce*

Aby planeta spadla do Slunce, nemůžeme ji jen postrčit, neboť by akorát zaujala jinou oběžnou dráhu. Musíme zastavit její obhánění, a pak se trefí. Samozřejmě nemusíme zastavit oběh úplně, nicméně počítat, jakou maximální oběžnou rychlost planetě můžeme nechat, je komplikované; nám jde stejně pouze o řádový odhad.

Spočítejme si, jak rychle by pád probíhal, kdybychom planetu zastavili najednou. Pohybovala by se po velmi natáhnuté elipse s přísluním v Slunci a tedy s hlavní poloosou  $a' = \frac{1}{2}a$ , kde  $a$  je původní poloosa orbity planety. Z třetího Keplerova zákona dostáváme řešení jako polovinu oběžné doby

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a'^3}{GM}}.$$

Pro Zemi dostáváme  $T = 65$  dní, tedy pád probíhá velmi rychle.

Nyní se zamyslíme nad tím, jakým způsobem můžeme planetu do Slunce shodit. Výhodné je planetu zpomalovat postupně, neboť větší čas působení může znamenat menší zařízení. Mohli bychom třeba na planetu umístit nějaký kanón, který by proti směru rychlosti střílel hmotu, čímž by obhánění zpomaloval. Čelíme problému otáčení planety. Ten by se ale dal vyřešit tím, že bychom umístili symetricky dvě otočné zbraně na oba póly. Kanóny by tak musely vystřelit dohromady hmotu o hybnosti planety  $p = mv$ .

Pro výpočet rychlosti  $v$  použijeme Newtonův první zákon aplikovaný na gravitační a (myšlenou) odstředivou sílu

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= G \frac{mM}{R^2}, \\ v^2 &= G \frac{M}{R}, \\ v &= \sqrt{G \frac{M}{R}}. \end{aligned}$$

Potřebná hybnost je

$$p = m \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Zbývá vyřešit, jakým způsobem by kanón střílel. Mohli bychom například použít laser. Dnešní nejsilnější lasery mají špičkový výkon<sup>9</sup>  $W_1 = 1$  PW, budeme optimisticky počítat s tím, že to je stálý výkon. Za čas  $\tau$  vydá laser energii  $E_1 = W_1\tau$ . Víme dále, že pro fotony platí  $p = h/\lambda$ ,  $E = hc/\lambda$ , tedy celkově dostáváme

$$p_1 = \frac{E_1}{c} = \frac{W_1\tau}{c}.$$

Když za  $\tau$  dosadíme 100 let jako dobu lidského života, dostaneme při výkonu dnešního nejsilnějšího laseru hybnost  $p_1 \approx 10^{16}$  kg·m·s<sup>-1</sup>. Oproti tomu hybnost např. Země činí  $p_Z \approx 10^{26}$  kg·m·s<sup>-1</sup>.

<sup>9</sup><https://theconversation.com/worlds-most-powerful-laser-is-2-000-trillion-watts-but-whats-it-for-45891>

Laser tedy zřejmě nemá dost velkou hybnost na to, aby zastavil rotaci Země, stejně to bude platit i pro jiné planety.

Nabízí se kanón, který by střílel hmotu. Nicméně Saturn 5, jedna z největších raket, kterou lidstvo vypustilo,<sup>10</sup> má tah motorů prvního stupně  $F = 35 \text{ MN}$ , což dělá dohromady za  $t = 100 \text{ let}$  hybnost  $p = Ft \approx 1,1 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , což je o 9 řádů nižší, než potřebujeme. I střílení hmoty se tedy zdá neproveditelné.

### Srovnání

Zmínili jsme čtyři možné způsoby zničení planety: explozi, pohlcení černou dírou, anihilací a shoení do Slunce. Z těchto způsobů nejmenší zbraň potřebovalo zničení planety pomocí černé díry, pokud pomíne nutnost dopravy nebo tvorby černé díry. S našimi předpoklady se bomba ukázala jako energeticky nejefektivnější, byť anihilace by mohla být ještě lepší, pokud bychom dokázali antihmotu vyrábět dostatečně rychle. Shoení planety do Slunce se ukázalo jako neproveditelné.

Ničení planety je tedy značně nepraktická záležitost, nicméně je pozitivní, že můžeme dosáhnout úplného zničení přístrojem menším, než je planeta samotná. Závěrem, pokud vás žádný z výše zmíněných způsobů neoslovil, nezbyvá než doporučit, abyste zkusili použít vlastní.

*Jindřich Dušek*  
jindra@fykos.cz

### Úloha I.E ... lahvová 12 bodů; průměr 6,49; řešilo 57 studentů

*Jak závisí frekvence zvuku, který vydáváte foukáním do skleněné lahve, na objemu kapaliny v lahvi? Diskutujte, jaký vliv na tuto závislost má tvar lahve.*

*Legolas neumí hrát na žádný hudební nástroj, tak hraje aspoň na nervy.*

### Teória

Tón je vlastne chvenie vzduchu, a teda vzniká, keď niečo (napr. struna, alebo aj priamo vzduchový stĺpec) kmitá. V našom prípade tón vzniká v hrdle fľaše, kde sa v dôsledku správneho fúkania rozkmitá vzduch a od neho sa už potom vlnenie šíri ďalej.

Frekvenciu, ktorú by sme mali namerať, môžeme odhadnúť tak, že vzduch z hrdla fľaše aproximujeme piestom s rovnakou hustotou ako vzduch.

Označme si okolitý tlak ako  $p_A$  a objem hrdla  $V_h$ . Potom molárne množstvo vzduchu v hrdle fľaše bude zo stavovej rovnice

$$n_h = \frac{p_A V_h}{RT},$$

<sup>10</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Saturn\\_V](https://cs.wikipedia.org/wiki/Saturn_V)

kde  $T$  je teplota a  $R$  je univerzálna plynová konštanta  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Hmotnosť piestu  $m_h$  potom dostaneme jednoducho, keď molárne množstvo vzduchu vynásobíme jeho molárnou hmotnosťou, ktorú označíme  $M_m$

$$m_h = M_m n_h = M_m \frac{p_A V_h}{RT}.$$

Zostáva zistiť tuhosť systému.

Na začiatku je vo fľaši atmosférický tlak. Následné fúkanie spôsobí, že piest sa pohne o  $dx$  dole, čím vo fľaši tlak určite vzrastie. Keďže kmitanie je príliš rýchle na to, aby si vzduch vo fľaši stíhal vymieňať teplo s okolím, uvažujeme adiabatický dej.<sup>11</sup>

Pre adiabatický dej platí, že  $pV^\kappa = \text{konst}$ , kde  $\kappa$  je Poissonova konštanta charakteristická pre daný plyn.

Tlak teda po posunutí piestu o  $dx$  vzrastie na

$$p_x = p_A \left( \frac{V}{V - S_h dx} \right)^\kappa,$$

kde  $V$  je pôvodný objem vzduchu vo fľaši a  $S_h$  je prierez hrdla.

Na piest bude pôsobiť sila

$$\begin{aligned} dF &= S_h(p_A - p_x), \\ dF &= S_h p_A \left( 1 - \left( \frac{V - S_h dx + S_h dx}{V - S_h dx} \right)^\kappa \right), \\ dF &= S_h p_A \left( 1 - \left( 1 + \frac{S_h dx}{V - S_h dx} \right)^\kappa \right). \end{aligned}$$

Teraz využijeme to, že posun piestu  $dx$  je veľmi malý, takže  $V - S_h dx \approx V$ . Tiež môžeme použiť Bernoulliho vzťah, ktorý hovorí, že  $(1+x)^k \geq 1+kx$ . Premyslite si sami, že z toho vyplýva, že ak je  $x$  veľmi malé (oproti 1), máme dobrý odhad  $(1+x)^k \approx 1+kx$ .

Postupnou aplikáciou týchto dvoch aproximácií dostávame

$$\left( 1 + \frac{S_h dx}{V - S_h dx} \right)^\kappa \approx \left( 1 + \frac{S_h dx}{V} \right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{S_h dx}{V}.$$

Dosadením do vzťahu pre silu máme

$$\begin{aligned} dF &\approx \frac{\kappa S_h^2 p_A}{V} dx, \\ k &\approx \frac{\kappa S_h^2 p_A}{V}, \end{aligned}$$

kde  $k$  je hľadaná tuhosť systému.

Môžeme teda dosadiť do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

<sup>11</sup>Ak by sme ale namiesto neho zvolili dej izotermický, veľkej chyby by sme sa nedopustili.

pričom pri úpravách využijeme  $V_h = S_h h$ , kde  $h$  je výška hrdla, a  $S_h = \frac{\pi}{4} D^2$ , kde  $D$  je priemer hrdla. Po úpravách dostaneme

$$T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi M_m V h}{RT\kappa}}.$$

Nie je ťažké všimnúť si, že jediná z týchto veličín, ktorá sa bude meniť prilievaním vody, je objem vzduchu vo fľaši  $V$ .

Frekvencia je prevrátená perióda

$$f = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{D}{4} \sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{V}} C, \quad (6)$$

kde  $C$  je konštanta úmernosti.

### Pomôcky

fľaša, voda, váha, odmerka, počítač, posuvné meradlo, teplomer

### Meranie

Odvážili sme prázdnu fľašu a potom fľašu plnú vody, rozdiel bol  $m_{\text{in}} = (630 \pm 10)$  g. Ak uvážime hustotu vody  $\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  (väčšia presnosť nie je potrebná, keďže tak či tak máme chybu už na druhej platnej cifre), dostávame, že vnútorný objem fľaše je

$$V_0 = (630 \pm 10) \text{ cm}^3 = (6,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Na meranie frekvencie sme používali počítač s programom Audacity, vhodných softwarov ale existuje obrovské množstvo a použiť sa dá aj mobil, ladička... Dôležité je ale uviesť presnosť, s ktorou bola frekvencia zmeraná, v našom prípade to boli desiatiny hertza.

Experiment potom prebiehal tak, že sme fúkli do fľaše, poznamenali si frekvenciu, odmerkou (ktorej najmenší dielik je 5 ml) doplnili niekoľko desiatok mililitrov vody a opakovali postup, kým nebola fľaša plná. Namerané hodnoty môžeme vidieť v tabuľke 1.

Pomocou GNUPLotu dáta fitujeme závislosťou podľa (6)

$$f(V) = \frac{C}{\sqrt{V}},$$

pričom sme dostali, že konštanta  $C = (4,73 \pm 0,05) \text{ m}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{s}^{-1}$ . Body s preloženou závislosťou sú vynesené v grafe 3.

Konštantu  $C$  by sme mali byť podľa (6) schopní spočítať ako

$$\frac{D}{4} \sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} = C.$$

Posuvným meradlom odmeriame vnútorný priemer hrdla  $D = (2,15 \pm 0,01)$  cm a výšku hrdla  $h = (2,04 \pm 0,01)$  cm.

Tab. 1: Namerané frekvencie zvuku

$V$ $10^{-4} \text{ m}^3$	$f$ Hz
6,3	185,5
6,1	186,6
5,7	192,5
5,3	206,0
4,9	216,7
4,5	222,6
4,1	228,5
3,3	257,7
2,9	280,3
2,1	316,2
1,7	368,9
1,3	403,8
0,9	479,0
0,7	597,8

Chemické konštanty pre vzduch nájdeme na internete<sup>12</sup> ako  $M_m = 28,96 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  a  $\kappa = 1,40$ . Izbová teplota vzduchu pri meraní bola  $(25 \pm 1) \text{ }^\circ\text{C} = (298 \pm 1) \text{ K}$ .

Chyby konštant oproti nameraným veličinám môžeme považovať za zanedbateľné. Potom dostávame  $C = (7,35 \pm 0,06) \text{ m}^{\frac{3}{2}}\cdot\text{s}^{-1}$ , čo rádovo sedí s experimentálnou hodnotou.

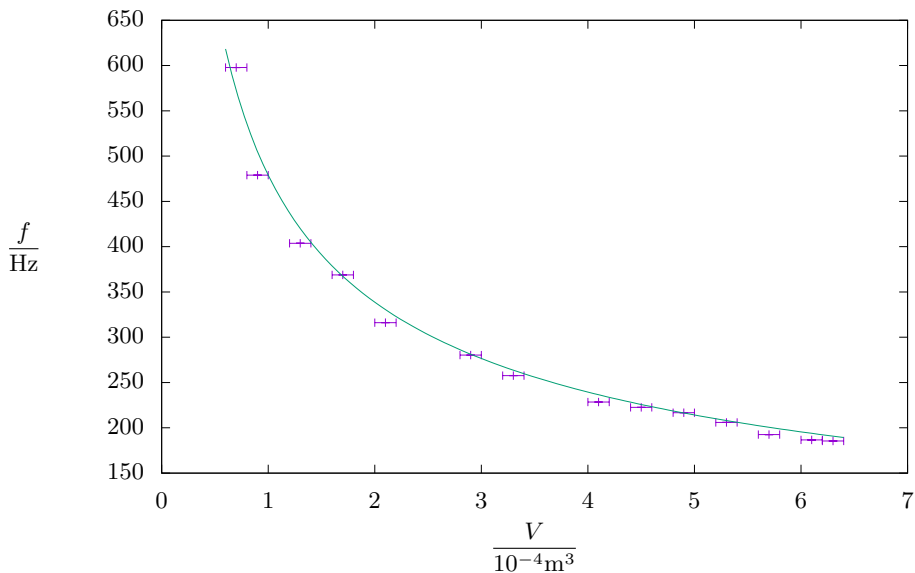
### Diskusia

Teoretická predpoveď nám dáva, že nameraná frekvencia by mala byť úmerná objemu vzduchu vo fľaši na mínus jednu polovicu. Namerané dáta tejto závislosti dobre zodpovedajú.

Hodnota  $C$  určená experimentálne (z fitu) sa od tej teoretickej dost líši, aj keď majú rovnaký rád. Dôvod bude zrejme ten, že aj keď náš teoretický model správne odhaduje závislosti na jednotlivých veličinách, v konštante sa môže líšiť, pretože celkový dej je zrejme výrazne zložitejší, než sme uvažovali. Ako príklad môžeme uviesť to, že náš model vôbec neuvažuje kmitanie vzduchu inde než v hrdle, čiže efektívna „hmotnosť píestu“, bude zrejme o niečo vyššia než tá, ktorú sme vo svojich výpočtoch použili. Toto dokonca zodpovedá tomu, že experimentálne sme dostali nižšie  $C$  (a teda aj nižšie frekvencie) než predpovedala teória.

Ak by sme namiesto fľaše mali napríklad tenkú trubicu s konštantným prierezom, potom by prvá rezonancia nastala, keď by dĺžka trubice (resp. tej časti v ktorej sa voda nenachádza)  $l$  bola rovná štvrtine vlnovej dĺžky. Úpravami dostávame, že v tomto prípade by frekvencia bola

<sup>12</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Vzduch\\_code-4-band](https://cs.wikipedia.org/wiki/Vzduch_code-4-band)



Obr. 3: Závislost frekvencie zvuku  $f$  na objeme vzduchu vo vnútri fľaše  $V$

nepriamo úmerná objemu vzduchu v trubici. Z toho jasne vyplýva, že na tvare fľaše záleží.

### Záver

Dolievaním vody do fľaše znižujeme objem vzduchu, ktorý sa v nej nachádza. Podľa teoretickej predpovede by mala výsledná frekvencia závisieť priamo úmerne na  $V^{-\frac{1}{2}}$ . Ak teda označíme objem vody vo fľaši  $V_v$ , dostávame  $f = C(V_0 - V_v)^{-\frac{1}{2}}$ . Konštantu úmernosti  $C$  sme pre našu fľašu získali experimentálne ako  $C = (4,73 \pm 0,05) \text{ m}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{s}^{-1}$  s relatívnou chybou asi 1%. Táto hodnota však nie je v zhode s našim teoretickým modelom.

*Šimon Pajger*  
legolas@fykos.cz

### Úloha I.S ... pomalý rozjezd

10 bodů;

průměr 4,92; řešilo 100 studentů

1. Vyjádřete následující veličiny<sup>13</sup> pomocí základních jednotek SI.

- (a)  $F \cdot \Omega$ , kde  $F$  je farad a  $\Omega$  je ohm  
 (b)  $N \cdot \text{Pa}$ , kde  $N$  je newton a  $\text{Pa}$  je pascal

<sup>13</sup>Bez ohledu na to, že dané součiny možná nedávají žádný rozumný fyzikální smysl.

- (c)  $\frac{C \cdot V}{J}$ , kde C je coulomb, V je volt a J je joule
- (d)  $\frac{T \cdot Wb}{H \cdot Sv}$ , kde H je henry, Sv sievert, T tesla a Wb weber
2. V následujících tvrzeních nalezněte všechny chyby a popište, proč jde o chyby.
- (a)  $s = vt^2/2 = 5,2 \cdot 1,2^2/2 = 3,744 \text{ m}$ .
- (b)  $y_m \sin(2\pi\omega) = 15\text{cm} \cdot \sin(2 \cdot 3,141 \cdot 50\text{Hz}) \doteq 0\text{cm}$
- (c) Pro experimenty jsme použili úspěšně sadu gamabeta. Na základě měření radioaktivního rozpadu Uranu ve smolinci jsme zjistily, že náš vzorek má aktivitu přesně 532,24 bequerelů.
- (d)  $s = 1,23 \text{ m}$ ,  $t = 2,7 \text{ s} \Rightarrow v = s/t \doteq 0,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $m = 240 \text{ g}$ ,  $E = mv^2/2 \doteq 25 \text{ J}$ ,  $P = E/t \doteq 9,3 \text{ W}$
3. Jakou silou působí vítr na korunu stromu? Víme, že to má souvislost s rychlostí větru  $v$ , průřezem stromu vystaveného větru  $S$  a hustotou vzduchu  $\rho$ . Proveďte rozměrovou analýzu a na jejím základě určete vztah pro sílu.
4. Sestavte podobnostní číslo odpovídající situaci, ve které protlačujeme kapalinu skrz charakteristickou délku  $l$  pomocí gradientu tlaku  $\frac{dp}{dx}$  (případně si tuto veličinu představte jednoduše jako změnu tlaku se vzdáleností  $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ ). Kapalina má hustotu  $\rho$  a kinematickou viskozitu  $\nu$ . Určete, jaké všechny varianty tohoto podobnostního čísla existují. Jednu z nich si vyberte a pokuste se jí interpretovat.

*Bonus* Vymyslete co nejoriginálnější Planckovu jednotku (veličinu sestavenou z kombinace redukované Planckovy konstanty  $\hbar$ , gravitační konstanty  $G$ , rychlosti světla  $c$ , Boltzmannovy konstanty  $k_B$  a Coulombovy konstanty  $k_e$ , přičemž nemusí obsahovat všechny). Popište její odvození a okomentujte její hodnotu. Nejzajímavější zmíníme v brožurce s řešeními.

*Karel chce trhat rekordy v délce zadání.*

Předně bychom měli poznamenat, že jeden bod opravdu neodpovídá odpovědi na jednu otázku, což bylo i naznačeno tím, že čtyři podotázky jsou za dva body. Současně bychom chtěli připomenout to, že jak jsme varovali, tak pokud řešitelé v letošním seriálu budou dělat přestupky proti formálním pravidlům, tak mohou přijít o nějaké body. Nicméně na druhou stranu co se týká např. podúlohy s hledáním chyb, tak jde o to nalézt alespoň nějaké důležité chyby.

1. Budeme postupovat tak, že všechny jednotky převedeme na součin základních jednotek SI a následně co nejvíce zjednodušíme zápis. Pro stručnost rovnou dosazujeme do zadání.
- (a)  $F \cdot \Omega = (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}) = \text{s}$
- (b)  $N \cdot \text{Pa} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}) = \text{kg}^2 \cdot \text{s}^{-4}$
- (c)  $\frac{C \cdot V}{J} = \frac{(\text{A} \cdot \text{s}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1})}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 1$ . Tedy v tomto případě nám vyjde bezrozměrná veličina. Toho není třeba se bát<sup>14</sup> – to se nám obec-

<sup>14</sup>Podle došlých řešení to někdo považoval za špatný výsledek.



ně stává, pokud vydělíme jednotku tou samou jednotkou. Například pro dosazení do exponenciály, sinu a dalších funkcí právě potřebujeme bezrozměrné veličiny. Obdobně je toto žádaný výsledek pro podobnostní čísla.

$$(d) \frac{T \cdot Wb}{H \cdot Sv} = \frac{(\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1})}{(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}) \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. Úloha s odhalováním chyb nabízela u každé podúlohy větší množství chyb a bylo potřeba najít alespoň jednu relevantní chybu v každém bodě.
- (a) V postupu chybí jednotka v mezivýpočtu. Druhá a třetí rovnost tedy neplatí. Na závěr není zaokrouhleno – přestože se podle dosazení zdá, že máme zadané veličiny na dvě platné cifry (případně by se jednalo o chybu přepisu, kdyby tomu tak nebylo), tak je výsledek na čtyři platné cifry. Správně by měl být na dvě až tři platné cifry. Další podstatná chyba je, že pokud  $t$  má rozměr času, tak  $v$  by muselo mít rozměr zrychlení, aby nám vyšly metry. Pokud autor dodržuje standardní značení, tak je to chyba, protože  $v$  by mělo mít rozměr rychlosti. Pokud autor nedodržuje obvyklé značení, pak by to měl uvést. Vzhledem k tomu, že to jsou pravděpodobně pouze výňatky z řešení, tak nemůžeme s jistotou prohlásit, že je to chyba, ale pravděpodobně je.
- (b) V úvodní rovnici se zapomnělo na čas. Do sinu totiž nemůžeme dosadit něco, co by mělo nějaký jiný fyzikální rozměr než jednotkový (úhel). Správně je pravděpodobně  $y_m \sin(\omega t)$ , kde  $t$  je čas, pokud je  $\omega$  úhlová rychlost či frekvence. Pravděpodobně došlo v popisu úlohy k záměně  $\omega$ , což je úhlová rychlost, za  $f$ , což je standardně frekvence. Mezi nimi platí vztah  $\omega = 2\pi f$ . Vzhledem k tomu, že frekvence  $f = 50 \text{ Hz}$  je častá (je v elektrické síti), pak se toto vysvětlení nabízí jako nejpravděpodobnější. Jednotky by se měly psát stojatě a ne italikou, což je tedy drobnější chyba, ale zápis pak není estetický. V postupu jsou pak dvě chyby. Nejni vhodnější místo  $\pi$  napsat 3,141 (což je navíc nesprávně zaokrouhleno, správnější by bylo 3,142), protože pak nám po dosazení vyjde (pravděpodobně okamžitá výchylka nějakého kmitajícího předmětu)  $-0,89 \text{ cm}$ . Toto by bylo správně zaokrouhlení poslední rovnosti. Nicméně víme, že by se jednalo o celý počet sinových vln a tak by byla výchylka přesně nulová, pokud by byl čas dosazený celočíselný. Ale bez nějaké další veličiny s rozměrem času v sinu je výsledek stejně nesmyslný. Na konec bychom měli napsat tečku.
- (c) Pokud jde o závěrečnou část řešení experimentální úlohy, obvykle zde již znovu neuvádíme název použitých pomůcek, ale to není nutně důležitá chyba. Jde také o název, takže by měl být s velkým písmenem (Gama-beta; podle některých zdrojů GamaBeta). Pro informaci, jde o sadu pro měření radioaktivního záření, která je schopná měřit záření beta a gamma a proto tento název. Další drobnost je, že formulace, že byla sada použita úspěšně, se obvykle nehodí do fyzikálního zpracování – vhodná je spíše, pokud by šlo o testování. Další chyba ve velkém písmenu je v názvu prvku, který se má psát s malým. Pravděpodobně neměřili (či neměřily) rozpad planety Uran nebo něčeho s tímto názvem. Když jsme zmínili, co je Gamabeta, co měří a že jde o uran, tak bychom měli poznamenat, že nejde změ-

řit přímo celkovou aktivitu uranového zářiče pomocí Gamabety, protože uran 238 se ve velké většině případů rozpadá alfa zářením. Produkty se pak opět postupně rozpadají různými typy záření, kde opět vystupuje alfa, ale i další formy záření. Dále pak také sada nedokáže přímo měřit neutronové záření, pokud náhodou nevyvolá sekundární záření v trubici. Drobnější chybou je pak chybějící c ve slově becquerel. Další chybou je prakticky jistě jedna hrubka. V první větě je ve skupině alespoň jeden muž (použili) a v druhé jsou jenom ženy a případně střední či mužský neživotný rod (zjistily). Nebo pokud by šlo o řešení do série FYKOSu, pak by mělo jít o individuální řešení a tedy je špatně už samotné množné číslo. Doposavad jde ale o (potenciální) maličkosti, až na to alfa záření. Nejzávažnější chybou je závěr, kdy se uvádí, že má něco přesnou hodnotu aktivity. To je nesmysl samo o sobě, protože radioaktivní rozpad, o kterém se hovoří, tak pravděpodobnostní charakter a i kdybychom dokázali měřit aktivitu vzorku dokonale, tak naměříme její kolísání. Dalším reálným problémem jsou konečné rozměry přístroje, který nedokáže obklopit dokonale vzorek a celková aktivita se určuje pouze z určitého prostorového úhlu, který se určuje docela složitě, protože detekční objem je zabudován v zařízení a není jasné, bez rozebrání přístroje, jeho přesný rozměr a umístění. Dalším reálným faktorem je to, že přístroj nemusí detekovat všechny částice. Zejména u vyšších hodnot aktivit se uplatňuje tzv. mrtvá doba detektoru. Aktivita také obvykle s časem klesá.<sup>15</sup> Tedy celkově nelze nikdy říct, že aktivitu známe přesně. Pokud bychom zanedbali slovo „přesně“ a předpokládali, že výsledek je přesně na 0,01 Bq, pak bychom museli měřit vzorek minimálně 90 let, abychom ji naměřili tak přesně. Opět za předpokladu, že by se aktivita neměnila z důvodu úbytku látky, která se rozpadá, a nově přeměněných jader. Další potenciální chybou je neuvážení pozadí – kosmického záření a přirozené radioaktivity v přírodě. Nicméně to by teoreticky mohlo být výpočetně ošetřené, ale na požadovanou přesnost by si to vyžadovalo místo s konstantním pozadím a další desítky let.

- (d) Do tohoto zadání se vloudil šotek či oprava. V nějakých verzích bylo k nalezení  $46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , tedy chyběla nula. Což je také formální chyba. Ale ne všichni ji mohli nalézt. Podle výpočtu rychlosti se zdá, že se jedná o pohyb s konstantní rychlostí. V tom případě by se ale dalo čekat, že výkon je nulový, nebo že výkon nezávisí uvedeným způsobem na rychlosti, ale museli bychom ho počítat z odporových sil a ne z kinetické energie. Základní jednotkou je kilogram, ale do výpočtu energie byly dosazeny gramy. Výsledek by měl být tedy tisíckrát menší. V průběhu jsou vypočítány mezivýsledky, které jsou dále dosazovány a mají nízkou přesnost. Dochází tedy k zaokrouhlovacím chybám. Správnější by bylo vyjádřit neznámou a dosadit až na závěr  $P = \frac{m\dot{s}^2}{2t^3} \doteq 9,2 \text{ mW}$  (za předpokladu, že předchozí vztahy platí).

3. Jedná se o velice jednoduchou aplikaci rozměrové analýzy, která se v tomto případě dá docela snadno tipnout, ale ukažme si korektní postup. Předpokládáme tedy, že platí vztah

$$F = C Q^\alpha S^\beta v^\gamma,$$

kde  $F$  je síla, kterou hledáme, a  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  jsou hledané, neznámé, exponenty.  $C$  je pak neznámá bezrozměrná konstanta, kterou neurčíme, ale na závěr bychom mohli diskutovat, na čem bychom očekávali, že bude

<sup>15</sup>To ale nemusí být vždy pravda. Počáteční vzorek rozpadat na nějaké další radioaktivní látky. Pokud mají tyto produkty kratší poločas rozpadu, pak může celková aktivita vzorku po nějakou dobu růst.

záviset. Víme, že fyzikální rozměry veličin jsou  $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $[S] = \text{m}^2$  a  $[v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Fyzikální rozměr síly je pak  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Můžeme tedy psát, že pro jednotky platí

$$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{m}^2)^\beta \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^\gamma.$$

Tento vztah můžeme upravit a následně přepsat jako soustavu tří rovnic tří neznámých, protože se musí rovnat všechny fyzikální rozměry.

$$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg}^\alpha \cdot \text{m}^{-3\alpha+2\beta+\gamma} \cdot \text{s}^{-\alpha-\gamma},$$

$$1 = \alpha,$$

$$1 = -3\alpha + 2\beta + \gamma$$

$$-2 = -\gamma.$$

Tuto soustavu rovnic je opravdu jednoduché vyřešit, protože první neznámou jsme dostali okamžitě a třetí prakticky také. Pak zbývá jenom dosadit do zbývajících druhé rovnice. Dostáváme tak  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  a  $\gamma = 2$ . Celkový výsledek je tedy  $F = C \rho S v^2$ . U konstanty  $C$  bychom pak čekali, že bude záviset na tvaru stromu, který jsme zatím nijak neuvažovali. Případně pak může záviset i na směru větru, pokud nebude strom sféricky symetrický.

4. Postup s určováním podobnostních čísel je vlastně ten samý jako u rozměrové analýzy. Dokonce bychom se na to mohli dívat tak, že hledáme nějaké kombinace pro to, jak vyjádřit jednu z veličin, a pak prostě závěrečný vztah vydělíme touto veličinou.

Co se mohlo zdát komplikované na úloze je přítomnost gradientu. Nicméně bylo přímo v zadání uvedeno, že si mají řešitelé tuto veličinu představit jako změnu tlaku se vzdáleností, kde nejsou  $d$ , ale  $\Delta$  veličiny.

Pro přehlednost si označme  $k = \frac{dp}{dx}$ . Zjevně bude jednotka  $k$  podílem jednotky tlaku a délky, tedy  $[k] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ . Chceme, aby platilo

$$C = l^\alpha \cdot k^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot \nu^\delta,$$

kde  $C$  je bezrozměrné. Víme, že  $[l] = \text{m}$ ,  $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a  $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Tedy má platit

$$1 = \text{m}^\alpha \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2})^\beta \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})^\gamma \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})^\delta.$$

Exponenty přerovnáme a opět sestavíme rovnice, ale tentokrát tři pro čtyři neznámé.

$$0 = \beta + \gamma,$$

$$0 = \alpha - 2\beta - 3\gamma + 2\delta,$$

$$0 = -2\beta - \delta.$$

Jednu neznámou si tedy můžem zvolit jako parametr. Vyberme například  $\beta$ . Okamžitě dostáváme  $\gamma = -\beta$  a  $\delta = -2\beta$ . Po dostazení do druhé rovnice pak máme  $\alpha = 3\beta$ . Zjišťujeme, že jsme si zvolili docela vhodně, protože nejmenší exponent v absolutní hodnotě je  $\beta$  a nevyskytují se žádná necelá čísla. Současně jsou dva exponenty kladné a dva záporné. Tedy by se dalo říci, že jsme dostali optimální kombinaci pro  $\beta = 1$

$$C = \frac{l^3}{\rho \nu^2} \frac{dp}{dx}.$$

Samozřejmě, že pokud umocníme číslo, které jsme si označili jako  $C$ , na libovolné nenulové číslo, dostaneme „stejně dobré“ podobnostní číslo. Jenom bude vypadat pravděpodobně o dost komplikovaněji. Nejzákeřnější část celé úlohy je interpretace výsledku. Vzhledem k tomu, že známe experiment pouze letmo, to jde docela stěží. Nicméně vidíme, že v této formulaci číslo rychle roste s rostoucí charakteristickou délkou a lineárně s gradientem tlaku. Naopak je nepřímo úměrné hustotě a viskozitě. Tedy například můžeme prohlásit, že pro stejný typ proudění pro dvojnásobnou charakteristickou délku ve stejné kapalině za stejných podmínek potřebujeme aplikovat osminový tlak. To zní docela neintuitivně vzhledem k běžné zkušenosti. Ale obvykle nemáme zkušenosti s nuceným tokem viskózní kapaliny. Podívejme se tedy na podobnostní číslo vybrané profesionálním fyzikem. Úloha byla vytvořena tak, že bylo vybráno Hagenovo číslo,<sup>16</sup> nicméně existuje nepřeberné množství čísel, které mají stejnou kombinaci fyzikálních veličin s drobnými odchylkami. Právě Hagenovo číslo pak používá ještě konstantu  $-1$ , ale jinak je stejné.

5. **Bonus:** Tato úloha byla spíše o kreativitě než o fyzikální praxi. Originalita byla hodnocena tak, že body za ni získali ti, kteří našli Planckovu veličinu, která není k nalezení na Wikipedii!<sup>17</sup>

Řešitelů, kteří odevzdali řešení s bonusem bylo poměrně málo. Zmíňme tedy originální fyzikální veličiny, které jste nám poslali

- intenzita elektrického pole (Herman),
- magnetický moment (Twardoch),
- měrná tepelná kapacita (Krška),
- magnetizace (Vavřík)
- a magnetický indukční tok (Čemanová).

Můžeme přidat další originální Planckovy veličiny. Například nikdo neposlal řešení s Planckovým ryvem, který je změnou Planckova zrychlení  $a_P$  za Planckův čas  $t_P$ . Pokud už známe Planckovu délku  $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$  a Planckův čas  $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$ , můžeme psát

$$g_P = \frac{a_P}{t_P} = \frac{c}{t_P^2} = \frac{l_P}{t_P^3} = \frac{c^6}{\hbar G} \doteq 1,0315 \cdot 10^{95} \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}.$$

Planckův ryv je takto nepředstavitelně vysoká hodnota. Připomeňme ještě, že ryv se uplatňuje například v konstrukci dopravních prostředků. Menší zrychlení, která nastávají pro rozjíždění a zpomalování vlaku cestujícím nevdá tolik, když se mění pomalu. Pokud se mění rychle, je to pro ně nepříjemné. Proto se konstruktéři snaží minimalizovat ryv.

Co se týče kombinací, které mohou vzniknout, tak je zajímavé zamyslet se nad tím, jestli pomocí pěti zmíněných veličin ze zadání můžeme nakombinovat nějaké podobnostní číslo. Teplota a elektrický proud vystupují mezi veličinami pouze jednou. Proto není možné, aby Coulombova a Boltzmannova konstanta vystupovaly v konečném vztahu. Když se zaměříme na zbývající dvě, tak je kombinace mocnin proměnných opět taková, že nám buď jedna jednotka zůstane, nebo musí být všechny mocniny nulové. Podobnostní číslo tedy nezískáme.

<sup>16</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hagen\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Hagen_number)

<sup>17</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Planck\\_units](https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_units)

*Poznámky k došlým řešením*

Obecně by se dalo říci, že s rostoucím číslem úlohy klesal počet řešení, který se jí věnoval. Sice byly řazené podle obtížnosti, ale snad i na základě vzorového řešení uznáte, že získat alespoň větší část bodů ze 4. části nebylo těžší, než získat je ze 3. části.

Hodnocení se snažilo být mírné. Takže bylo možné dostat část bodů i za pouhý výsledek. To už příště tolerovat nebudeme a bez uvedení postupu nebudeme body přiznávat. Pokud popisujete chyby, tak je potřeba slovně popsat, proč je to chyba a co je tam špatné.

Zmíňme některé častější chyby a začneme u bodu 1. Pár řešitelů psalo, že coulomb je ampér za sekundu – správně je to ale tak, že ampér je coulomb za sekundu. Někteří měli problém s tím, když jim vyšla bezrozměrná veličina, a na konec rovnosti napsali 0 (či dokonce prázdnou množinu) místo 1. Ale přitom by pravděpodobně řekli, že metr se do metru vejde jednou a tedy metr děleno metr je jedna. Pár řešitelů si také myslelo, že coulomb či volt jsou základní jednotky SI, což není pravda.

V části věnované hledání chyb nám hodně vadilo, pokud jste tvrzení s chybami opsali a našli jste v něm jenom jednu chybu. Nebo že jste se snažili tvrzení opravit a opravili jste třeba právě jenom jednu chybu. Daleko lépe bylo hodnocené, pokud jste jenom popsali vybrané chyby – tedy našli jste alespoň něco, ale netvrdili jste, že zbytek je v pořádku. Několikrát se objevilo nesprávné tvrzení, že můžeme počítat jenom v základních jednotkách SI. Ano, je to vhodnější, pokud si nejste jistí převodem. Ale například u bodu 2, pokud za amplitudu dosadíme centimetry, tak je prostě výsledek v centimetrech, protože sinus je bezrozměrná veličina. Naopak často jste si nevšimli, že do sinu nebyly dosazeny bezrozměrné veličiny. Několik řešitelů v prvním bodě opravovali  $vt^2/2$  na  $gt^2/2$  – přitom ale není důvod si myslet, že jde nutně o volný pád – mohlo jít o jiný zrychlený pohyb i podle dosaženého čísla. Ačkoli je možné, že by mohla nastat i taková záměna, bylo by dobré poznamenat, proč si to myslíte. Někdo uváděl, že je chybou zaměnit práci  $W$  ve výkonu  $P$  za energii  $E$ . Není důvod toto tvrdit, protože obecně je výkon počítaný z energie a omezení vzorce jenom na práci není nutné, práce i energie mají stejný fyzikální rozměr a záleží na tom, jak jsme si obě veličiny zavedli.

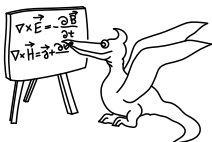
Ve třetím bodě bylo nejčastější chybou nepoužití rozměrové analýzy, ale použití nějakých fyzikálních úvah, nalezení Newtonova vzorce pro odporovou sílu a v několika případech dokonce zavádění dalších veličin, které nejsou uvedené v zadání. Pokud je v zadání úlohy explicitně napsáno, že se chce řešení pomocí rozměrové analýzy, tak pro získání maximálního počtu bodů vyžadujeme rozměrovou analýzu. Naopak bylo vítáno, pokud jste nejdříve provedli rozměrovou analýzu, která byla v tomto případě opravdu jednoduchá, a pak jste okomentovali výsledek a například jste ho ještě srovnali s Newtonovým vztahem.

Ve čtyřce byl nejčastější problém, že jste ani nezkusili úlohu řešit. Další pak byl v tom, že jste našli jenom jedno či pár řešení, ale ne

všechna.

*Karel Kolář*  
karel@fykos.cz





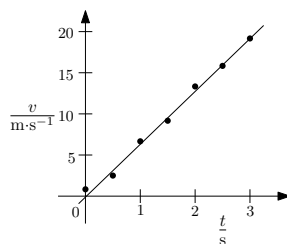
## Seriál: Grafy, symetrie a souřadnice

### Úvod

Mínule jsme si probrali nějaké záležitosti kolem jednotek, formálních stránek řešení fyzikálních úloh a jejich zápisu. Věříme, že se budete snažit mít na paměti to, že i formální stránka řešení je důležitá a někdy i díky ní můžete snadněji odhalit chyby. V tomto díle se zmíníme o nějakých tématech, která se týkají grafických řešení úloh, symetrií a souřadnic. Každé z těchto témat je samo o sobě velice obsáhlé, a proto zde naleznete pouze spíše takové ochutnávky.

### Grafy a grafická řešení

U grafů bychom mohli pokračovat s formální stránkou řešení. Ve stručnosti jenom poznamenejme, že do grafů chceme vynášet hodnoty na číselnou osu. Musíme tedy hodnotu veličiny vydělit vhodnou jednotkou, abychom mohli do grafu uvést bezrozměrnou veličinu. Další pravidla se pak týkají spíše experimentů. Naměřené hodnoty obvykle nespojujeme čarou, ale prokládáme fitem, který co nejlépe odpovídá datům. V případech výrazných chyb měření jednotlivých bodů bychom neměli zapomínat na chybové úsečky. Pokud jsou chyby měření srovnatelné s rozměrem znázornění bodu v grafu či dokonce menší, pak je uvádět nutně nemusíme. Ukázkou co nejjednoduššího, ale ještě rozumně vypadajícího grafu vidíte na obrázku 4.



Obr. 4: Ukáзка jednoduchého grafu, který má nejuťnější prvky.

### Plocha pod grafem funkce

Pokročilejší z vás jistě vědí, že plochu pod funkcí můžeme počítat pomocí integrálu. Nicméně integrování je často těžké a není od věci si připomenout (nebo naučit se) i jiné základní postupy. Zmíňme ty, které můžeme používat, pokud máme zadanou funkci nebo k dispozici její graf.

### Barvení

První ze základních možností, jak určit plochu, je ji prostě nějak přímočaře změřit. Můžeme si pod či přes graf dát čtvercovou síť a spočítat čtverečky pod plochou grafu k celkovému počtu čtverečků. Téměř jistě budou nějaké čtverečky prořaté, a tak se musíme rozhodnout, jak budeme „zaokrouhlovat“ čtverečky. Přesnější bývá odhadovat, jaká plocha je obarvená v částečně obarveném čtverečku, a kombinovat čtverečky mezi sebou tak, aby vytvořily celé jednotkové čtverečky. Pro větší přesnost je vhodnější brát menší čtverečky, ale „ručně“ je počítat je pak pracné. Pokud můžeme využít počítač, je vhodné počítat jednotlivé pixely pomocí nějakého

programu. Pokud je černobílý obrázek v nějaké kompresi dat a má dovolenou celou barevnou paletu, tak na rozhraních černé a bílé se setkáte s různými odstíny šedi. Pak musíte zvolit, podobně jako u ručního počítání čtverečků, postup, který vám dá plochu rozumně přesně. U této metody navíc není nutné mít funkce, můžeme určovat i pokrytí obrázku vybranou barvou, jak si vyzkoušíte v řešení části seriálové úlohy.

### *Sčítání sloupců až k integraci*

Plochu si můžeme rozdělit i jiným způsobem. Interval, na kterém chceme spočítat plochu pod grafem funkce, si můžeme rozdělit na menší intervaly. V těchto intervalech pak můžeme považovat funkci za konstantní a počítat plochy obdélníků pod funkcí, nad funkcí nebo můžeme spočítat obě varianty a vzít průměr. Alternativně můžeme uvažovat lichoběžníky, tedy předpokládat, že funkce je na malých intervalech po částech lineární. Zjevně se zmenšováním intervalů (jemnější dělení) budeme dostávat přesnější a přesnější výsledek. Pokud nám stačí přibližný výsledek a nepřilíží divoké funkce, pak je často dostatečné i hrubé dělení. Když se funkce více mění v nějaké části a v jiných částech je téměř konstantní, pak je vhodné zjemnit dělení oblasti s proměnlivějším průběhem funkce a pro zbylé intervaly ponechat hrubé dělení. Pokud s dělením pokračujeme dále a dále a intervaly stále zmenšujeme, dostáváme se k integraci.

### *Pravděpodobnostní řešení, numerické metody*

Těm, kdo to slyší poprvé, se to může zdát trochu nedůvěryhodné, možná až bláznivé. Vědci však velice často u velmi složitých výpočtů komplikovaných integrálů (tedy stále myslíme plochy pod grafem) využívají pravděpodobnostní metody. Známou metodou je Monte Carlo, kde, podobně jako v kasinu, náhodně sázíme na kombinaci čísel v prostoru ( $N$  čísel v  $N$ -dimenzionálním prostoru) a díváme se, jestli je hodnota pod nebo nad grafem.

Numerickým metodám se podrobně věnovaly například seriály FYKOSu v 21. ročníku (o počítačové fyzice) a 31. ročníku (o numerických metodách a počítačových simulacích).

### *Tip k řešení soutěží*

Představme si situaci, že máte vyřešit úlohu FO s kruhovým dějem v plynu a z nějakého důvodu jste se totálně zasekli – nemůžete přijít na parametry jednoho bodu z daného cyklu. Pak není nic lepšího, než si tyto parametry pomocí pravítka odhadnout z grafu (pokud jste ho dostali se zadáním). S největší pravděpodobností nedostanete plný počet bodů, ale lepší něco nežli než nic.

### *Statika*

Pokud řešíme například zatížení jednotlivých částí mostních konstrukcí, pak využíváme statiku. Tedy víme, že aby se most nezačal někam pohybovat či lámat, musí být výslednice sil nulová. Graficky si nulovost výslednice sil v bodě můžeme znázornit tak, že poskládáme za sebe vektory jednotlivých sil působících v daném bodě tak, že vytvoří uzavřenou křivku. Někdy se může hodit, že i momenty sil se musí vyrušit, aby se nám most nezačal otáčet. Obě pravidla navíc platí pro každé místo konstrukce a obvykle sestavujeme rovnice pro jednotlivé body upevnění. Ukázkou úlohy, ve které se řeší stabilita mostní konstrukce, je 26-IV-5 – stavme mosty!<sup>18</sup> Další úloha, která se řešila pomocí statiky, je například 20-VI-I – tři válce děda vševěda,<sup>19</sup> kde byly dva

<sup>18</sup>[https://fykos.cz/\\_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26\\_4\\_5.pdf](https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf)

<sup>19</sup>[https://fykos.cz/\\_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20\\_6\\_1.pdf](https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20_6_1.pdf)



válce položené na podložce a na nich umístěn třetí válec. Příkladem toho, kde se ukázalo, že za zadaných podmínek nemůže být soustava nikdy stabilní, jsou koule a válec z úlohy 19-III-1 – dotyk koule a válce.<sup>20</sup>

### Optické zobrazování

Grafické zpracování se často využívá při úlohách o zobrazování pomocí optických soustav. Tímto tématem se podrobněji zabývá text z knihovničky FO<sup>21</sup>. Podobná pravidla platí jak pro zrcadla, tak pro tenké čočky. Rozdíl mezi spojkami (dutými zrcadly) a rozptylkami (vypuklými zrcadly) je v umístění reálného ohniska. Popíšme význačné paprsky u dutého zrcadla:

- Paprsek směřující na vrchol zrcadla<sup>22</sup> se odrazí pod stejným úhlem (jako dopadl) na opačnou stranu optické osy.
- Paprsek, který jde rovnoběžně s optickou osou, se od zrcadla odrazí do ohniska.
- Paprsek, který prošel skrz ohnisko, se odrazí od zrcadla tak, že jde rovnoběžně s optickou osou.

Pro sestavení pozice obrazu nám však stačí vždy dva paprsky a dostatečně pečlivé rýsování. Samozřejmě bychom mohli rýsovat i jiné, za dodržení zákona odrazu. Zmíněné význačné paprsky se ale rýsují asi nejjednodušeji. Dobrým trikem pro malé vzory, které máte zobrazit, může být zvětšit si vzor. Pozor ale na to, že zvětšení<sup>23</sup> musíte provést směrem kolmo na optickou osu. Pokud jste původní výšku vzoru zvětšili  $N$ -krát, musíte výsledek zmenšit na  $1/N$ -tinu. Někdy se také může při rýsování hodit, že chod paprsků můžete obrátit. Při řešení soutěží, kde se požaduje jen výsledek, je často dokonce rychlejší si danou situaci narýsovat v nějakém dynamickém geometrickém programu.

### Symetrie

Symetrie je to, co při řešení fyzikálního problému obvykle chceme najít, protože nám to značně zjednoduší jeho řešení. Někdy dostaneme výsledek ve srovnání s jiným postupem skoro okamžitě a výrazně méně pracně. Některé fyzikální úlohy mají analytické řešení jenom díky symetrii.

### Vztah symetrie a zákonů zachování

Každá symetrie se pojí s nějakým zákonem zachování. To plyne z teoremu Emmy Noetherové. Jeho matematická formulace je složitá, nicméně tato poučka se nám může hodit i na SŠ úrovni. Vztahy mezi základními symetriemi a zákony zachování jsou:

- Symetrie v posunutí v prostoru je spojena se zákonem zachování hybnosti.
- Symetrie v otočení se pojí se zákonem zachování momentu hybnosti.
- Symetrie v posunutí v čase se pojí se zákonem zachování energie.

### Princip superpozice

Princip superpozice můžeme využít v mnoha fyzikálních situacích, kdy celkové působení více „zdrojů“ na nějakou testovací částici<sup>24</sup> můžeme jednoduše sečíst. To platí například u gravi-

<sup>20</sup>[https://fykos.cz/\\_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19\\_3\\_1.pdf](https://fykos.cz/_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19_3_1.pdf)

<sup>21</sup>Trnka, J.: Zobrazení čočkami, dostupné na <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/cocky.pdf>

<sup>22</sup>tedy na místo, kde se protíná profil zrcadla s optickou osou

<sup>23</sup>Přesněji řečeno byste měli aplikovat pravoúhlou afinitu.

<sup>24</sup>Testovací částice je taková, která nám nenaruší původní rozložení zdrojů.

tačního pole. Celkové zrychlení asteroidu je dáno zrychleními od jednotlivých hmotných těles.<sup>25</sup> Stejně tak platí, že intenzita elektromagnetického pole v daném místě je dána součtem intenzit od jednotlivých zdrojů. Tento princip můžeme využít i opačně. Příkladem může být otázka, jakou intenzitu elektrického pole naměříme uprostřed kruhu, na kterém je rovnoměrně rozmístěno  $N$  kladných nábojů, kde  $N \geq 2$ . Je zřejmé, že v případě sudého počtu nábojů se intenzity protilehlých nábojů vynuší. Stejný výsledek bychom obdrželi při součtu lichého počtu nábojů. Intenzita z takového rozložení nábojů bude tedy vždy nulová. Pokud jeden kladný náboj odebereme, pak je to pro střed stejné, jako kdybychom v prázdném prostoru umístili jeden záporný náboj do místa, odkud jsme náboj odebrali.

### Další metody založené na symetrii

Dalšími metodami, které využívají vysoké symetrie nějakých fyzikálních úloh, jsou zrcadlový náboj a Gaussův zákon. Obě se uplatňují v elektrostatice a zmíníme je alespoň trochu v čtvrtém dílu seriálu.

### Souřadnice

Souřadnice, které jsou vhodné pro řešení fyzikálních problémů, se často pojí právě se symetrií našeho problému. Abychom byli co nejeftivnější v řešení, měli bychom si zvolit soustavu souřadnic, která nám vyhovuje.

Základním pravidlem, které souřadnice musí splňovat, je, že jich musí být právě tolik, kolik dimenzí má prostor, v němž se pohybuje. Nejčastěji se tedy jedná o dvou- či třídimenziální souřadnice. Aby mohla být určena poloha všech bodů z našeho prostoru jednoznačně,<sup>26</sup> musí být souřadnice na sebe kolmé

Nejznámějšími souřadnicemi využívanými pro lepší představení situace jsou **kartézské souřadnice**. Ty jsou obvykle jedno- až třídimenziální a jde o udání pozice pomocí souřadnic, které obvykle označujeme  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Ukázka jejich znázornění je na obrázku 5. Vzdálenost dvou bodů<sup>27</sup> A a B pak můžeme určit jako

$$D = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

### Těžišťová soustava

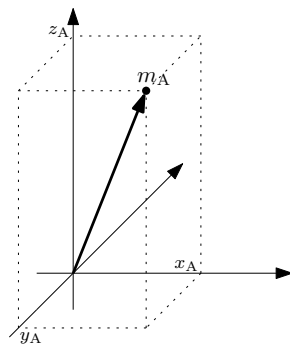
Těžišťová soustava je kartézská soustava souřadná, která je spojená s těžištěm všech (či vybraných) bodů umístěných v naší soustavě. Často ji využíváme, aby nám zbytečně hmotné body „neulétávaly“ společně nějakým preferovaným směrem. Zajímavá fyzika se obvykle děje až v rámci interakce bodů mezi sebou.

Pokud řešíme centrální srážku dvou těles v těžišťové soustavě, tak je zde jejich celková hybnost stále nulová. Obě mají opačné hybnosti stejných velikostí a po srážce se akorát otočí

<sup>25</sup>Za předpokladu, že můžeme zanedbat ngravitační vlivy. Což by například u malých částic uvolňujících se z komet vedlo k velice nepřesným výsledkům. Ty jsou totiž výrazně ovlivněny jak slunečním větrem, tak následně odpařováním materiálu z jejich povrchu.

<sup>26</sup>Podmínku jednoznačnosti umíme za jistých předpokladů splnit i bez potřeby kolmých souřadnic. Má to však za následek značnou komplikaci všech výpočtů a my se tomu věnovat nebudeme.

<sup>27</sup>Označení bodů budeme vkládat do indexů a podle toho poznáme, o souřadnici jakého bodu jde.

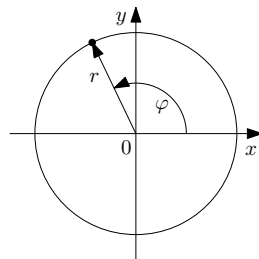


Obr. 5: Ukázka kartézských souřadnic v 3D.

jejich rychlosti. Jediný drobný problém je, že pokud chceme výsledek v laboratorní soustavě, je potřeba provést transformaci z jedné soustavy do druhé.

### Polární souřadnice

Polární souřadnice jsou 2D a jsou určeny vzdáleností od počátku  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  a orientovaným úhlem  $\varphi = \arctg \cdot (y/x)$  měřeným od kladné části osy  $x$  v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček, viz obr. 6).<sup>28</sup> Výhodou těchto souřadnic může být to, že je můžeme využít i pro tvorbu grafů, které nejsou funkce, ale jde například o postupně se odvíjející spirály. Pokud jde ale například o kružnici, pak úhel obvykle uvažujeme v intervalu  $\varphi \in [0; 2\pi)$ . Kružnici o poloměru  $r$  v počátku soustavy souřadnic můžeme výhodně popsat pomocí transformačních vztahů  $x = r \cos \varphi$  a  $y = r \sin \varphi$ , což je i transformační vztah mezi souřadnicemi. Vzdálenost mezi dvěma body A a B za pomoci těchto souřadnic určíme jako  $D = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)}$ .



Obr. 6: Grafické znázornění polárních souřadnic.

### Válcové souřadnice

Válcové souřadnice jsou vlastně polární souřadnice, které rozšíříme do prostoru tak, že je doplníme o třetí kartézskou souřadnici  $z$ . Transformační vztahy jsou stejné jako u polárních souřadnic. Vzdálenost dvou bodů je  $D = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) + (z_B - z_A)^2}$ .

### Sférické souřadnice

Pokud chceme popisovat pohyb po kouli, je vhodné využít souřadnice sférické dané vzdáleností od počátku  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  a dvěma úhly. Úhel  $\varphi$  měříme stejným způsobem jako v polárních souřadnicích a to v rovině  $xy$ . Druhý úhel<sup>29</sup>  $\vartheta$  pak měříme od kladného směru osy  $z$ . Transformace mají tvar  $\varphi = \arctg \cdot (y/x)$ ,  $\vartheta = \arccos(z/r)$ . V opačném směru pak

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Vzdálenost dvou bodů se stává už docela komplikovaným výrazem, ale můžeme si ho napsat, abychom se přesvědčili, že na vzdálenosti bodů se docela hodí kartézská soustava souřadná

$$D = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B (\cos \vartheta_A \cos \vartheta_B + \cos(\varphi_B - \varphi_A) \sin \vartheta_A \sin \vartheta_B)}.$$

<sup>28</sup> $\varphi = \arctg \cdot (y/x)$  definujeme jako  $\arctg(y/x)$  pro  $x \geq 0$  a  $y \geq 0$ ,  $\arctg(y/x) + \pi$  pro  $x \leq 0$ , resp.  $\arctg(y/x) + 2\pi$  pro  $x \geq 0$  a  $y \leq 0$ .

<sup>29</sup>Toto je jeden z možných způsobů, jak tyto souřadnice popsat. Existuje více variant, se kterými se můžete setkat v literatuře.

## Inerciální vs. neinerciální soustavy

Často se omezujeme na inerciální soustavy souřadné. Tedy takové, kde platí Newtonovy zákony bez úprav. Nicméně někdy může být vhodné přejít do neinerciální soustavy souřadné. Musíme však vždy mít na paměti, že na tělesa v neinerciálních soustavách působí setrvačné síly.

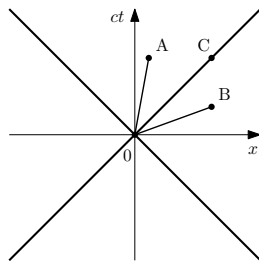
Prvním příkladem úlohy, kde můžeme zvolit neinerciální souřadnice, může být soustava spojená se zrychleně se rozjíždějícím vlakem na vodorovné rovině v jedné přísmce. Když se na tento vlak díváme ze soustavy spojené se Zemí (považujeme ji pro tento myšlenkový experiment za dostatečně dobře inerciální), pak vidíme, že osoby, co sedí na sedačkách, jsou urychlovány stejně jako zbytek vlaku. Pokud někdo položí kvádr na dokonale hladkou zem a pak se vlak začne rozjíždět, zůstane kvádr na stejném místě. Podívejme se na tuto situaci z jiného pohledu – z neinerciální soustavy spojené s vlakem. V tom případě vidíme, že jsou cestující víceméně v klidu. Ale oni sami pocítují, že jsou tlačeni do sedaček se zrychlením velikostně stejným se zrychlením vlaku. Pokud se podíváme na kvádr na podlaze, tak se nám může zdát, že se bezdůvodně rozjíždí do zadní části vlaku (pokud se vlak rozjíždí dopředu) se zrychlením odpovídajícím zrychlení vlaku.

Stejně tak můžeme přejít do rotující soustavy. Zde bude situace složitější než u lineární zrychlující soustavy, protože se nám zde objeví členy odpovídající odstředivé a Coriolisové síle. Tato transformace se používá často například u problému tří těles, kde jsou dvě obíhající se tělesa, která jsou značně hmotná a třetí, které má vůči nim zanedbatelnou hmotnost. Pak se využije korotující systém, kde na hlavní ose jsou umístěna dvě hlavní tělesa. Pokud se obíhají po kruhových trajektoriích, pak jsou v této soustavě nehybná. Pokud se obíhají po eliptické trajektorii, pak se přechází ještě k o něco složitější soustavě, kde jsou opět nehybná a ve stejné vzdálenosti, ale mění se převod a síla, která na třetí těleso působí v jednotlivých bodech v závislosti na čase.

## Minkowského prostoročas

Nakousněme alespoň letmo i něco ze speciální teorie relativity. Zde reprezentujeme pozici v prostoročase<sup>30</sup> pomocí tří prostorových souřadnic a jedné časové. Časová souřadnice má ale speciální postavení. Jednak ji uvažujeme pronásobenou rychlostí světla, tedy  $ct$ . Druhým faktorem je, že ji můžeme brát buď jako imaginární nebo alespoň při určování prostoročasové vzdálenosti uvažujeme vzdálenost uraženou v tomto směru za zápornou. Místo prostorových bodů zde uvažujeme události – polohu v souřadnicích v určitém čase. Tedy vzdálenost je  $D = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (ct_B - ct_A)^2}$ .

Když se podíváme na obrázek 7, tak vidíme události A, B a C. Velice zajímavá je událost C, která leží na ose kvadrantů – na tzv. světelném kuželu. Ten je tvořen událostmi, které jsou přesně v té vzdálenosti, kam se může dostat světlo či odkud k nám světlo mohlo dojít. Tato vzdálenost je zajímavá tím, že je v této metrice nulová. Tedy vzdálenost mezi počátkem a C je nula. Interval mezi počátkem soustavy souřadné, tedy tady a teď, s událostí A je záporný a tedy časopodobný. Hypoteticky se můžeme dostat do události A někdy v budoucnosti. Bod B je



Obr. 7: Schematické znázornění Minkowského prostoročasu.

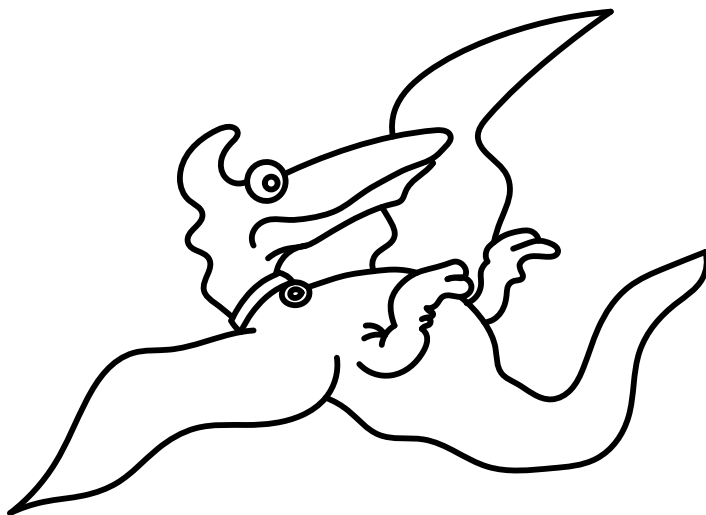
<sup>30</sup>Prý fyzikové říkají prostoročas a sci-fi autoři používají časoprostor. I když těžko říci, co na to jazyková logika, když se správně říká světočára.

pak prostorupodobný. Kdybychom se transformovali do jiné soustavy souřadnic, tak by tato událost mohla proběhnout ve stejném čase jako má počátek souřadnic. Naopak událost A by mohla proběhnout v jiné soustavě souřadné na stejném místě, jako je počátek. Tyto záležitosti se nazývají relativitou současnosti a souměstnosti.

### *Závěr a upoutávka na příště*

Snad seriál dostatečně naznačil, že výběr souřadné soustavy je důležitý a někdy nám může usnadnit práci. Pro jejich správnou volbu je potřeba se vždy zamyslet nad symetriemi našeho problému a ty co nejvíce využít.

V příštím díle se chceme dále věnovat zákonům zachování, na které jsme už v tomto dílu trochu narazili. Zákony zachování se nám hodí prakticky vždy a často vedou na rychlé řešení problémů.





## Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Přidali jsme pro vás novou statistiku (sloupec %), která říká, kolik procent bodů jste dosáhli z maximálního počtu bodů za ročník (tedy ze skóre Studenta Pilného ze čtvrtého ročníku). První a druhé ročníky mohou dosáhnout více bodů, než je maximum, díky tomu, že za jednoduché úlohy dostávají dvojnásobný počet bodů. Původní statistika ze sloupce %, která říká, kolik procent bodů získal řešitel z úloh, které opravdu řešil, byla přesunuta do sloupce „%“.

Nová statistika nám (i vám) také pomůže dříve určit, kdo už dosáhl 50% z celkového počtu bodů a tedy se stává úspěšným řešitelem. Budeme vám tedy moci poslat osvědčení úspěšného řešitele dost brzy na to, abyste ještě ve stejném ročníku mohli požádat o prominutí přijímacích zkoušek na Matfyz (toto se týká hlavně řešitelů ze čtvrtého ročníku).

### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	“%”	Σ
-------	-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	-----	---

*Kategorie druhých ročníků*

jméno

škola

1 2 3 4 5 P E S I , % % Σ

*Kategorie třetích ročníků*

jméno

škola

1 2 3 4 5 P E S I , % % Σ

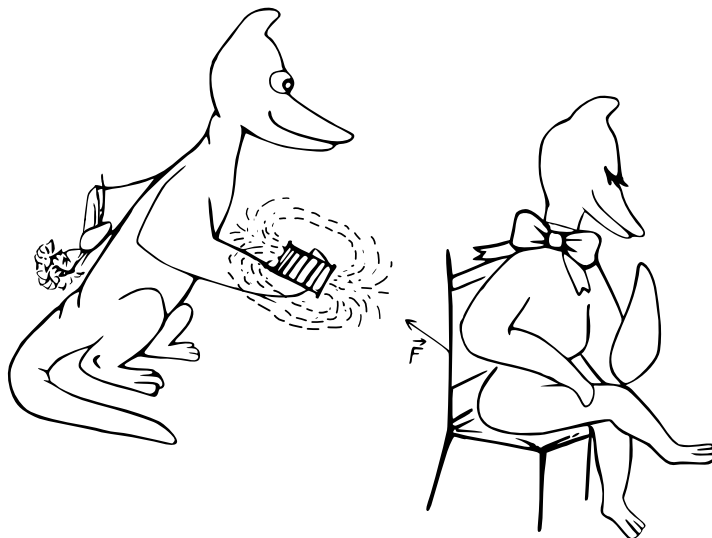


*Kategorie čtvrtých ročníků*

jméno


škola

1 2 3 4 5 P E S I , % % Σ



**FYKOS**  
**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**18000 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>  
e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/FYKOS>

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

