

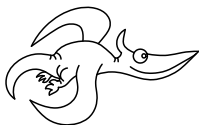
Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

zima přichází a s ní i třetí série FYKOSu. Navzdory chladnému počasí jsou úlohy spíš letní. Při řešení této série budeme umývat nádoby, sledovat lezoucí berušky nebo si hrát s fontánou. V problémové úloze určíme, bude-li na nás při tom všem pršet. Experiment má určitě většina z nás naměřený z prázdnin – jak moc je moře slané? V rámci seriálu vystřelíme ze vzduchovky a až potom vypočítáme, zda tím můžeme někoho zranit.

Omlouváme se za chybějící body ke druhé a problémové úloze, co nejdříve se objeví na webu. To je od nás zatím vše. Přejeme vám veselé Vánoce a řešte FYKOS!

Organizátoři



Zadání III. série

Termín uploadu: 31. 12. 2019 23.59

Termín odeslání: 30. 12. 2019

Úloha III.1 ... fontána s vodotryskem

3 body

Mějme fontánu s N tryskami stejného průřezu, které jsou napájeny jediným čerpadlem. Z trysky tryská voda do výšky h . Do jaké výšky bude voda tryskat, pokud zakryjeme všechny trysky kromě jedné? Čerpadlo má konstantní průtok.

Úloha III.2 ... boom

3 body

Nad hlavou nám přeletěla stíhačka letící rovnoměrným pohybem vodorovně se zemským povrchem. Za $t = 1,50$ s na to jsme uslyšeli sonický třesk v okamžiku, kdy měla stíhačka zenitovou vzdálenost $\vartheta = 30,0^\circ$. Zjistěte, jak vysoko nad námi stíhačka přeletěla.

Bonus Z jakého směru jsme třesk slyšeli a jak daleko se toto místo nachází od místa, kde stíhačku vidíme?

Úloha III.3 ... paraplíčko

5 bodů

Určitě jste si již všimli, že když umístíte lžičku pod proud vody (například při mytí nádobí), vytvoří jakýsi vodní hříbek. Pro zjednodušení uvažujte, že lžička je rovná a má kruhový tvar malého poloměru. Po umístění kolmo do středu proudu vody (jehož poloměr je ještě menší) padající z klidu z výšky h nad dnem umyvadla vytvoří krásný rotační paraboloid. Spočítejte, do jaké výšky musíme lžičku dát, aby voda dopadala co nejdále od osy původního proudu (dno umyvadla je vodorovné). Uvažujte, že voda je ideální kapalina (nestlačitelná, neviskózní, bez vnitřního tření).

Bonus Najděte výšku umístění lžičky, při které voda vytvoří „přístřešek“ s co největším objemem.

Úloha III.4 ... beruška na gumě

8 bodů

Beruška leze rychlostí $4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Když ji postavíme na gumu 40 cm dlouhou, přeleze ji za 10 s. Co když ale v okamžiku, kdy beruška začne lézt, začneme gumu natahovat tak, že se její délka bude zvětšovat rychlostí $5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$? Může dolézt na konec? Pokud ano, jak dlouho jí to bude trvat? Guma se roztahuje rovnoměrně a nikdy se nepřetrhne.

Úloha III.5 ... hustota pravděpodobnosti vody

9 bodů

Představme si nádrž, ze které neustále vodorovně vytéká proud vody s konstantním obsahem průřezu. Rychlost proudu však náhodně kolísá s rovnoměrným rozdělením od v_1 do v_2 . Po vytečení z nádrže voda volně padá na vodorovnou podlahu níže. Najděte libovolnou oblast podlahy, do které dopadne přesně 90 % vody.

Úloha III.P ... roj meteoritů

10 bodů

Je možné, aby se kapka deště vypařila dříve, než dopadne na zem? Vymyslete vhodný model odpařování dešťových kapek během jejich pádu a ukažte, za jakých podmínek (mezi relevantní parametry patří například počáteční poloměr, průběh okolní teploty v závislosti na nadmořské výšce) se může kapka zcela odpařit. Můžete přitom předpokládat, že kapka vznikne náhle v určité výšce h_0 s počátečním poloměrem r_0 a v první aproximaci padá suchou atmosférou. A kdy je možné, aby kapka zamrzla?

Úloha III.E ... husté měření

12 bodů

Sestavte si hustoměr, např. pomocí brčka a plastelíny, a změřte pomocí něj, jak závisí hustota vody na koncentraci rozpuštěné soli.

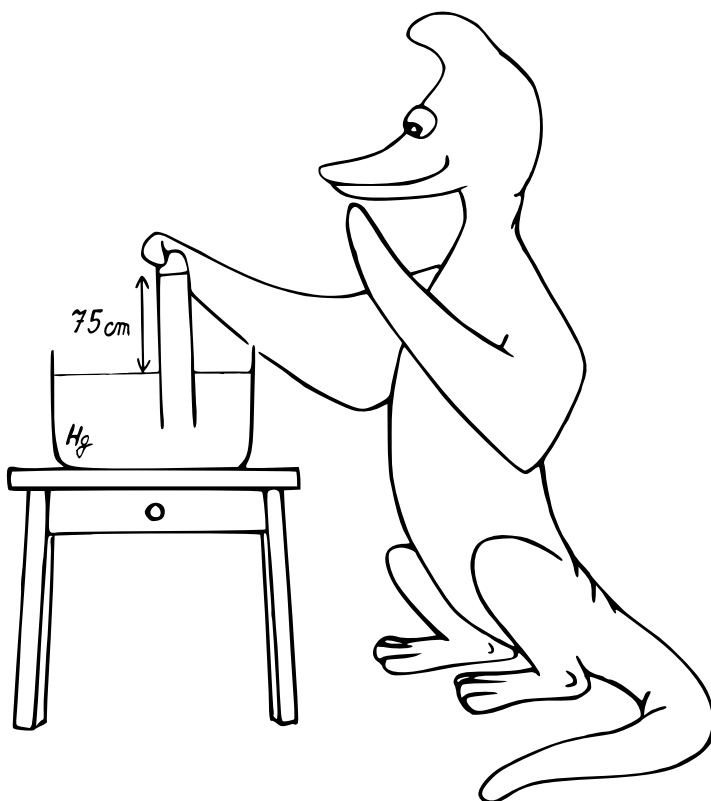
Úloha III.S ... vzduchová pistole podrobně

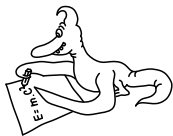
10 bodů

Máme vzduchovou pistoli o hmotnosti $M = 1,3 \text{ kg}$. Vystřelíme z ní diabolku (náboj), která má hmotnost $m = 0,50 \text{ g}$ a průměr $d = 4,5 \text{ mm}$.

1. Jakou kinetickou energii bude mít náboj po výstřelu, když podle technické specifikace dosáhne rychlosti $v = 250 \text{ fps}$ (tedy 250 stop za sekundu)?
2. Jaký bude zpětný ráz pistole? Zajímá nás jak rychlost, kterou by se zbraň pohybovala, kdyby nebyla upevněná, tak její hybnost.
3. Jak se změní moment hybnosti Země, pokud vystřelíme ze zbraně rovnoběžně se zemským povrchem? Zajímají nás okamžiky, kdy měla maximální hybnost a potom, když dopadla a zcela se zastavila. Pro jednoduchost uvažujte, že zbraň je pevně spojená se Zemí (která je zcela kulatá) a že zbraň při výstřelu nezačala rotovat. Jakou úhlovou rychlost Země získá či ztratí?
4. Jaký je spodní odhad maximálního zrychlení střely, pokud se náboj v první čtvrtině hlavně urychlí na 90 % maximální rychlosti? Vnitřní délka hlavně je $D = 18 \text{ cm}$.
5. Náboj jsme vstřelili do kousku plastelíny o hmotnosti $m_p = 42 \text{ g}$, který je zavěšený na tenkém provázku délky $l = 48 \text{ cm}$. Pokud by náboj v plastelině uvízl, jaká by byla maximální úhlová výchylka tohoto kyvadla?
6. Může náboj při nárazu na lidskou pokožku překročit hodnotu plošné dopadové energie $Q_{\max} = 50 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$?

Bonus Nakonec se nám experiment s kyvadlem nepodařil a plastelínu jsme prostřelili. Naměřili jsme poloviční výchylku kyvadla, než jsme původně očekávali. Jaká byla výstupní rychlost náboje z plastelíny? Předpokládejte, že při průchodu plastelínou náboj nezmění směr a ani nic z plastelíny neodnese s sebou.





Řešení II. série

Úloha II.1 ... rychlovýtah

3 body; průměr 2,89; řešilo 115 studentů

Říká se, že lidé ve výtahu bez větších problémů snesou zrychlení $a = 2,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Také bychom chtěli dorazit do plánovaného patra co nejdříve. Pokud by se výtah čtvrtinu doby jízdy rozjížděl s tímto zrychlením, polovinu doby jel konstantní rychlostí a zbývající čtvrtinu doby zpomaloval, jak vysoko by dokázal vyjet za celkovou dobu jízdy $t = 1,00 \text{ min}$? *Karel jezdí výtahem.*

Za čtvrtinu doby $t_1 = t/4 = 15 \text{ s}$, po kterou zrychluje, urazí dráhu h_1 , která je stejná, jako dráha h_3 během zpomalování.

$$h_1 = h_3 = \frac{1}{2}at_1^2 \doteq 281 \text{ m}$$

Za tu dobu zrychlí na rychlost $v = at_1 = 37,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Při rovnoměrném pohybu urazí

$$h_2 = vt_2 = at_1t_2 \doteq 1130 \text{ m}.$$

Celková výška je $h = 2h_1 + h_2 = \frac{3}{16}at^2 \doteq 1690 \text{ m}$. Takže takový hypotetický výtah by dokázal za minutu vyjet do dvojnásobné výšky nejvyšší budovy světa Burdž Chalífa. Nicméně takto rychle výtahy nejezdí - maximální rychlost¹ mají výtahy kolem $16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha II.2 ... slabý naviják

3 body; (chybí statistiky)

Uvažujme pevně zavěšenou kladku, na níž je umístěno lano zanedbatelné hmotnosti. Na jednom konci lana je upevněno závaží o hmotnosti m_1 a na druhém konci se ve stejné úrovni nachází naviják o hmotnosti m_2 . V prvním případě je naviják ukotven na zemi a při navíjení lana se zvedá pouze závaží. V druhém případě je závaží pevně spojeno s navijákem tak, že při navíjení se zvedají společně závaží i naviják. Určete, ve kterém případě bude zapotřebí menší síly pro zdvihnutí závaží (a tudíž slabšího navijáku).

Vašek potřeboval sestrojít mechanismus na zvedání sněžové radlice.

Úlohu budeme řešit srovnáním vykonané práce a přírůstku potenciální energie. V prvním případě při navíjení lana délky Δl silou F_1 vykonáme práci

$$W_1 = F_1\Delta l.$$

Tím vytáhneme závaží o výšku Δl , čímž se zvýší jeho potenciální energie o přírůstek

$$\Delta E_p = m_1g\Delta l,$$

kde g je místní tíhové zrychlení. Ze zákona zachování energie ve tvaru $W_1 = \Delta E_p$ dostáváme pro velikost potřebné síly vztah

$$F_1 = m_1g. \quad (1)$$

¹<https://www.elevatorworld.com/the-maximum-speed-of-elevators/?cn-reloaded=1>

To je očekávaný výsledek.

Ve druhém případě navíjením lana zkracujeme úsek lana na obou koncích kladky, a to stejnou měrou. Navinutím lana délky Δl zkrátíme úsek lana na obou koncích kladky o délku $\Delta l/2$, tedy i závaží a naviják zdvihneme o výšku $\Delta l/2$. Přírůstek celkové potenciální energie je v tomto případě

$$\Delta E_p = (m_1 + m_2)g \frac{\Delta l}{2}.$$

Přírůstek ΔE_p je roven práci $W_2 = F_2 \Delta l$ vykonané navijákem, odtud dostáváme rovnost

$$F_2 \Delta l = (m_1 + m_2)g \frac{\Delta l}{2}.$$

Vydělením rovnice délkou Δl dostáváme vztah pro velikost potřebné síly navijáku,

$$F_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{2}. \quad (2)$$

Srovnáním rovnic (1) a (2) vidíme, že menší síly bude zapotřebí v prvním případě pro naviják těžší než závaží ($m_2 > m_1$) a v druhém případě pro naviják lehčí než závaží ($m_2 < m_1$).

Václav Mikeska

v.mikeska@fykos.cz

Úloha II.3 ... Dančina (ne)rovnovážná destička

6 bodů; průměr 4,46;

řešilo 80 studentů

*Destička tloušťky $t = 1,0$ mm se šířkou $d = 2,0$ cm se skládá ze dvou částí. První část o hustotě $\rho_1 = 0,20 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ má délku $l_1 = 10$ cm, druhá část o hustotě $\rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ má délku $l_2 = 5,0$ cm. Desku položíme na hladinu vody s hustotou $\rho_v = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a počkáme, až se ustálí v rovnovážné poloze. Jaký úhel bude svírat rovina desky s hladinou vody? Jaká část destičky zůstane trčet nad hladinou? *Danka si povídala s Peťem o mytí nádobí.**

Na doštičku sa môžeme pozerat z boku ako na 2D problém. Aby sa ustálila v rovnovážnej polohe, tak pre ňu musia platiť dve podmienky

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{o},$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \mathbf{o}.$$

Uvažovaná doska má dve časti – časť s hustotou $\rho_2 > \rho_v$ a časť s menšou hustotou $\rho_1 < \rho_v$. Tú si môžeme rozdeliť ešte na časť ponorenú vo vode l_{1v} a časť nad hladinou vody l_{1n} , pričom $l_1 = l_{1v} + l_{1n}$. Ponorené časti dosky l_2 , l_{1v} sú vo vode nadľahčované vztlakovou silou

$$F_{vz} = (V_2 + V_{1v}) \rho_v g = (l_2 + l_{1v}) S \rho_v g,$$

kde $S = td$. Súčasne na ne pôsobí aj tiažová sila

$$F_{g_v} = (l_2 \rho_2 + l_{1v} \rho_1) S g.$$

Celkovo dostávame silu

$$F_v = F_{g_v} - F_{vz} = (l_2 (\varrho_2 - \varrho_v) + l_{1v} (\varrho_1 - \varrho_v)) Sg.$$

Nad hladinou vody nepôsobí na dosku vztlaková sila, teda výsledná sila na neponorenú časť je tvorená iba tiažovou silou

$$F_n = F_{g_n} = l_{1n} \varrho_1 Sg.$$

Z našich predpokladov pre rovnovážnu polohu vyplýva, že výsledná sila pôsobiaca na teleso musí byť nulová, teda

$$F_v + F_n = 0.$$

Odtiaľ dostávame podmienku, kedy bude výsledná sila pôsobiaca na teleso rovná nule

$$l_{1n} \varrho_1 + l_2 (\varrho_2 - \varrho_v) + l_{1v} (\varrho_1 - \varrho_v) = 0.$$

Nakoniec zistíme dĺžku časti dosky, ktorá je pod hladinou vody. Za l_{1n} dosadíme $l_1 - l_{1v}$ a dostávame

$$l_{1v} + l_2 = \frac{l_1 \varrho_1 + l_2 \varrho_2}{\varrho_v}.$$

Výsledná časť dosky, ktorá vytŕča nad hladinu, má dĺžku

$$l_{1n} = l_1 - l_{1v} = \frac{l_1 (\varrho_v - \varrho_1) + l_2 (\varrho_v - \varrho_2)}{\varrho_v} = 2,0 \text{ cm}. \quad (3)$$

Aby teleso bolo v rovnovážnej polohe, je potrebné, aby výsledný moment síl

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \\ M &= rF \cos \alpha \end{aligned}$$

spôsobujúci otáčanie telesa bol nulový. Za bod otáčania volíme miesto, kde doska vytŕča z hladiny. Pre časti našej dosky získame ramená r_2 , r_{1v} a r_{1n} ako

$$\begin{aligned} r_2 &= l_{1v} + \frac{l_2}{2}, \\ r_{1v} &= \frac{l_{1v}}{2}, \\ r_{1n} &= \frac{l_{1n}}{2}. \end{aligned}$$

Výsledný moment sily je potom

$$M = (r_2 l_2 (\varrho_2 - \varrho_v) + r_{1v} l_{1v} (\varrho_1 - \varrho_v) - r_{1n} l_{1n}) Sg \cos \alpha,$$

kde α je uhol medzi rovinou dosky a rovinou hladiny. Nech má výraz v zátvorke akúkoľvek hodnotu, pre splnenie podmienky $M = 0$ stačí, aby platilo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Túto časť úlohy však možno riešiť aj úvahou. Doštička se bude vždy snažiť dostať do takej pozície, v ktorej bude mať najmenšiu energiu, teda kde bude jej ťažisko najnižšie. Pretože $l_{1n} = 2,0 \text{ cm}$, je jasné, že ťažisko bude pod hladinou – potom bude najnižšie vtedy, keď bude doštička kolmá na hladinu.

Ak by bol výraz v zátvorke nulový, nezáležalo by na uhle naklonenia. To by znamenalo, že ťažisko dosky by bolo presne na hladine. Nakoniec, ak by ťažisko vychádzalo vyššie než hladina, doštička by sa prevrátila tak, aby bola rovnobežne s hladinou. Mohlo by sa zdať, že aj v tom

případe by bolo legálne riešenie $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ale nie je to tak. Moment síl by v tej chvíli síce bol nulový, ale daná poloha by nebola stabilná. Tiež by sme už nemohli zanedbávať hrúbku dosky t , čím by sa situácia značne skomplikovala.

Tereza Labudová

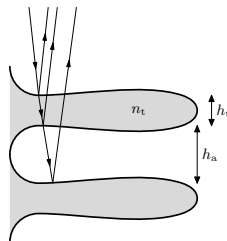
tereza.labudova@fykos.cz

Úloha II.4 ... motýli

7 bodů; průměr 4,43; řešilo 56 studentů

Duhové modrozelené zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu MORPHO je důsledkem konstruktivní interference světla odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných blan na povrchu křídel). Stupně mají index lomu $n_t = 1,53$ a tloušťku $h_t = 63,5$ nm a jsou odděleny mezerou vzduchu tloušťky $h_a = 120,3$ nm, viz obrázek. Světlo na ně dopadá kolmo. Pro jaké vlnové délky viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum?

Domča chytila motýly v lednovém zkuškovém.



Aby došlo ku konstruktívnej interferencii, jednotlivé lúče musia mať fázový rozdiel $\Delta\Phi = 2k\pi$, kde k je celé číslo. Fázy určíme z optických dráh jednotlivých lúčov.

Pre prvý lúč, ktorý sa odráža od prvého rozhrania, platí $\Phi_1 = \Phi_0 - \pi$, kde Φ_0 je fáza žiarenia pri dopade na prvé rozhranie. Keďže ide o odraz od opticky hustejšieho prostredia sa navyše zmenila fáza na opačnú.

Druhý lúč sa odráža od druhého rozhrania, prekoná optickú dráhu $s_2 = 2n_t h_t$, pri odraze na rozhraní k zmene fázy nedochádza. Celkovo je teda fáza po odraze a opätovnom prechode prvým rozhraním

$$\Phi_2 = \Phi_0 + 2\pi \frac{2n_t h_t}{\lambda}.$$

Tretí lúč sa odráža od tretieho rozhrania a prekoná optickú dráhu $s_3 = 2(n_t h_t + n_a h_a)$, kde $n_a = 1$ je index lomu vzduchu. Pri odraze dochádza k zmene fázy, po opätovnom prechode prvým rozhraním má tento lúč fázu

$$\Phi_3 = \Phi_0 + 4\pi \frac{n_t h_t + n_a h_a}{\lambda} - \pi.$$

Pre fázové rozdiely dvojíc lúčov dostávame

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{2,1} &= 4\pi \frac{n_t h_t}{\lambda} + \pi = 2k\pi & \lambda_{2,1} &= \frac{4}{2k-1} n_t h_t, \\ \Delta\Phi_{3,1} &= 4\pi \frac{n_t h_t + n_a h_a}{\lambda} = 2k\pi & \lambda_{3,1} &= \frac{2}{k} (n_t h_t + n_a h_a), \\ \Delta\Phi_{3,2} &= 4\pi \frac{n_a h_a}{\lambda} - \pi = 2k\pi & \lambda_{3,2} &= \frac{4}{2k+1} n_a h_a. \end{aligned}$$

Zostáva nám dosadiť číselné hodnoty. Môžeme si všimnúť, že so zvyšujúcim k sa vlnová dĺžka svetla znižuje. S vlnovou dĺžkou väčšou ako $\lambda = 380$ nm dostávame len prvé maximum vo všetkých troch prípadoch s vlnovými dĺžkami²

- $\lambda_{2,1} = 389$ nm, čo je fialové svetlo na hranici viditeľnosti ľudským okom,

²V treťom prípade by sme mohli hovoriť o nultom maxime, keďže preň $k = 0$.

- $\lambda_{3,1} = 435 \text{ nm}$, čo je fialovo-modré svetlo,
- $\lambda_{3,2} = 481 \text{ nm}$, čo je modro-tyrkysové svetlo.

Ďalšie interferenčné maximá by sme mohli hľadať pre viacnásobné odrazy, teda v prípade, keď sa lúče odrazia aspoň raz smerom nadol. Tieto maximá však budú málo výrazné, keďže k ich vzniku potrebujeme aspoň trojnásobný odraz, pričom každým odrazom sa stráca časť intenzity svetla.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha II.5 ... kolečko s pružinkou

8 bodů; průměr 4,31; řešilo 54 studentů

Máme tenký dokonale tuhý homogenní disk o poloměru R a hmotnosti m , ke kterému je připojena gumička. Jedním koncem je upevněná ve vzdálenosti $2R$ od okraje disku a druhým koncem na jeho okraji. Gumička funguje jako dokonalá tenká pružina o tuhosti k , klidové délce $2R$ a zanedbatelné hmotnosti. Disk je upevněn v svém středu tak, že se může v jedné rovině volně otáčet kolem tohoto bodu, ale nemůže se posouvat či měnit rotační rovinu. Určete závislost velikosti momentu síly, kterou bude gumička urychlovat či zpomalovat rotaci disku v závislosti na úhlové výchylce φ , a sestavte pohybovou rovnici disku.

Bonus Určete periodu malých kmitů soustavy.

Karlovi se točila hlava.

Zvolme počátek soustavy souřadné ve středu disku tak, aby souřadnice bodu upevnění gumičky k disku byla

$$x = R \sin \varphi,$$

$$y = R \cos \varphi.$$

Délku gumičky potom určíme jako

$$l = \sqrt{x^2 + (3R - y)^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + 9R^2 - 6R^2 \cos \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{10 - 6 \cos \varphi} R.$$

Obecně pro velikost síly, kterou gumička působí na bod upevnění, platí

$$F = k \Delta l,$$

kde Δl je prodloužení gumičky, neboli $\Delta l = l - l_0 = l - 2R$. V našem případě je tato vzdálenost vždy nezáporná, čili velikost síly bude kladná.

Velikost momentu síly M , který roztáčí disk, je součinem síly a kolmé vzdálenosti síly \mathbf{F} od středu, kterou označíme r . Uvažujme trojúhelník, jehož vrcholy jsou body upevnění gumičky a střed disku. Úhel u vrcholu daného bodem upevnění gumičky mimo disk označme α , potom platí

$$r = 3R \sin \alpha.$$

Ze sinové věty vyplývá

$$\sin \alpha = \frac{R}{l} \sin \varphi,$$

takže pro r dostáváme

$$r = 3R \frac{\sin \varphi}{\sqrt{10 - 6 \cos \varphi}}.$$

Velikost momentu síly bude

$$M = Fr = 3kR^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{10 - 6 \cos \varphi}} \right) \sin \varphi.$$

Posledním úkolem bylo sestavit pohybovou rovnici. Pro rotační pohyb platí $J\epsilon = M$, kde ϵ je úhlové zrychlení, neboli $\ddot{\varphi}$. Celkově pak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} &= 3kR^2 \left(\frac{2}{\sqrt{10 - 6 \cos \varphi}} - 1 \right) \sin \varphi, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{6k}{m} \left(\frac{2}{\sqrt{10 - 6 \cos \varphi}} - 1 \right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Z této rovnice vidíme, že úhlové zrychlení nezávisí na poloměru disku, pokud je disk homogenní, ale na jeho hmotnosti a na tuhosti gumičky. Rovnici bychom mohli pak dále řešit, ale obecné analytické řešení zapsané pomocí konečného počtu základních funkcí téměř jistě neexistuje.

Bonus

Dalo by se vyjít z pohybové rovnice, ale použijeme jiný postup. Začneme s tím, že určíme potenciální energii pružnosti

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kR^2 \left(\sqrt{10 - 6 \cos \varphi} - 2 \right)^2.$$

Provedeme Taylorův rozvoj potenciální energie pro $\varphi_0 = 0$ a to až do 4. řádu, protože první tři členy vychází nulové. To ukazuje, že okolí rovnovážné polohy je docela metastabilní, protože obvykle pro kmitání dostáváme nenulový člen už ve druhém řádu. Pro malé kmity stačí aproximovat potenciální energii pouze prvním nenulovým členem

$$E_p \approx \frac{9}{32}kR^2\varphi^4.$$

Periodu kmitů určíme pomocí zákona zachování celkové mechanické energie

$$E_p + E_k = \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{32}kR^2\varphi_m^4,$$

kde φ_m je úhel maximální výchylky. Dostáváme diferenciální rovnici

$$9kR^2\varphi^4 + 8mR^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 9kR^2\varphi_m^4,$$

kteřou řešíme separací proměnných

$$\sqrt{\frac{8m}{9k}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_m^4 - \varphi^4}} = \int_0^{T/4} dt.$$

Úpravou dostáváme

$$T = \frac{4}{\varphi_m^2} \sqrt{\frac{8m}{9k}} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_m}\right)^4}},$$

kde použijeme substituci

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{\varphi_m} &= \sin \psi, \\ d\varphi &= \varphi_m \cos \psi d\psi.\end{aligned}$$

Pro periodu tak platí

$$T = \frac{4}{\varphi_m} \sqrt{\frac{8m}{9k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \sin^2 \psi}}.$$

Integrál nemá analytické řešení, ale to nevadí. Jedná se jen o číselnou konstantu, takže ho můžeme řešit numericky, což vychází

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \sin^2 \psi}} \doteq 1,311.$$

Výsledný vztah pro periodu malých kmitů je

$$T \approx \frac{4,944}{\varphi_m} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha II.P ... Země vzplála

10 bodů; (chybí statistiky)

Odhadněte, o kolik by stoupl obsah CO₂ v atmosféře, pokud by shořela veškerá vegetace na zemském povrchu.
Karel je pyroman.

Pri procese horenia vzniká z uhlíku a kyslíku oxid uhličitý (budeme uvažovať dokonalé horenie, kedy vzniká iba oxid uhličitý, a nie oxid uhloňatý). Teda na vznik 1 molu CO₂ potrebujeme 1 mol C a 1 mol molekúl O₂. Aby sme zistili, koľko CO₂ sa spálením vegetácie vytvorí, potrebujeme zistiť, koľko uhlíka sa v nej nachádza. Na to potrebujeme najprv zistiť celkovú hmotnosť vegetácie na Zemi. Keďže chceme získať odhad, predpokladajme, že všetok uhlík nachádzajúci sa vo vegetácii zreaguje s kyslíkom z atmosféry a vytvorí oxid uhličitý.

Vegetácia na Zemi

Najprv sa pokúsime odhadnúť, koľko vegetácie sa nachádza na zemskom povrchu, presnejšie, jej celkovú hmotnosť.

Nízka vegetácia sa nachádza takmer na celom zemskom povrchu. Avšak jej celková hmotnosť na určitej ploche je oveľa menšia ako hmotnosť lesa na rovnakej ploche. Preto budeme v našich odhadoch uvažovať iba lesy a nízku vegetáciu zanedbáme. To je vzhľadom na veľkosť plochy, na ktorej počítame, a nepresnosť nášho odhadu dobré priblíženie.

Lesy na Zemi pokrývajú podľa³ plochu $S_1 = 39 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$.

Môžeme však skúsiť urobiť presnejší odhad. Z webovej stránky⁴ si stiahneme dáta, ktoré hovoria o tom, aký podiel α povrchu konkrétnych krajín tvoria lesy. Zo získaného tabuľkového

³<https://cs.wikipedia.org/wiki/Les>

⁴<https://ourworldindata.org/forests#forest-cover-by-country>

súboru vyberieme dáta pre rok 2015 (najnovšie). Potom si nájdeme rozlohy jednotlivých krajín sveta⁵ a vynásobíme ich príslušnými α . Dostaneme tak plochu lesov v jednotlivých krajinách sveta, ktoré môžeme jednoducho sčítať a získať výslednú hodnotu $S_2 = 32 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$.

Celkový objem a hmotnosť stromov

Následne potrebujeme odhadnúť výšku týchto lesov. Tá sa prirodzene líši v závislosti na type lesa, klimatických podmienkach, veku stromov a mnohých ďalších faktorov. Podľa⁶ odhadneme strednú výšku lesov sveta na $h_s = 25 \text{ m}$.

Použitím stránky⁷ môžeme odhadnúť objem stromu na základe jeho výšky, šírky a druhu. Ak zadáme výšku stromu 25 m, priemer $d_1 = 150 \text{ cm}$, postupným nastavovaním rôznych drevín odhadneme priemerný objem takto vysokého stromu na $V_1 = 15 \text{ m}^3$. Ak by sme uvažovali strom s priemerom $d_2 = 180 \text{ cm}$, priemerný objem odhadneme na $V_2 = 20 \text{ m}^3$. Teraz je otázkou, na akej ploche sa rozprestiera takto veľký strom. Musíme brať do úvahy, že lesy majú rôznu hustotu a stromy nie sú vždy tesne pri sebe. Odhadnime teda, že takýto strom bude zaberat zaberat plochu o polomere $r = 5 \text{ m}$ a veľkosti asi $S_0 = 100 \text{ m}^2$ z plochy lesa.

Potrebujeme ešte zistiť hustotu stromov. Tá sa opäť líši pre jednotlivé druhy lesov, aj pre jednotlivé druhy rastlín. Predpokladajme, že hustota materiálu stromov je približne rovná nejakej strednej hustote dreva, ktorú si na základe dát⁸ zvolíme ako $\varrho_1 = 700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Potom hmotnosť všetkých stromov na Zemi spočítame ako

$$m_s = \frac{S}{S_0} V \varrho.$$

Pre odhady plôch S_1 a S_2 dostávame postupne pre odhady objemov stromu V_1 a V_2 hodnoty hmotnosti stromov

$$m_{s11} \doteq 4,1 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$m_{s12} \doteq 5,5 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$m_{s21} \doteq 3,4 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$m_{s22} \doteq 4,5 \cdot 10^{15} \text{ kg}.$$

Pre rádový odhad nám stačí jeden údaj, tak budeme ďalej počítat s hodnotou m_{s11} . Uhlík tvorí⁹ približne $\beta \doteq 19,4\%$ živej hmoty. Použitím týchto údajov vieme odhadnúť hmotnosť uhlíka obsiahnutého vo vegetácii $m_{C1} \doteq 8,0 \cdot 10^{14} \text{ kg}$.

Môžeme tiež použiť údaj¹⁰ podľa ktorého je v rastlinách a živých organizmoch uložených $m_{C2} = 5 \cdot 10^{14} \text{ kg}$ uhlíka.

⁵<https://www.worldometers.info/geography/largest-countries-in-the-world/>

⁶<https://earthobservatory.nasa.gov/features/ForestCarbon>

⁷<https://www.drevari.cz/calc-standing-tree-volume.php#Objem-stoj%C3%ADc%C3%ADho-stromu-Kalkula%C4%BDka>

⁸<https://cs.wikipedia.org/wiki/DC599evo>

⁹<https://www.sci.muni.cz/ptacek/Chemie-bar.htm>

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_cycle#Terrestrial_biosphere

Uvolnené množstvo oxidu uhličitého

Aby sme spočítali, koľko molov uhlíka sa v stromoch nachádza, potrebujeme vedieť jeho molárnu hmotnosť M_C . Z periodickej tabuľky prvkov¹¹ máme

$$M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$M_O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Zapísali sme si rovno aj molárnu hmotnosť kyslíka, ktorú ešte využijeme pri našich výpočtoch.

Potom počet molov uhlíka, ktoré sa nachádzajú vo všetkých stromoch lesov na Zemi, bude

$$n_C = \frac{m_C}{M_C}.$$

Pre odhadnuté m_{C_1} a nájdené m_{C_2} postupne dostaneme

$$n_{C_1} \doteq 6,7 \cdot 10^{16} \text{ mol},$$

$$n_{C_2} \doteq 4,2 \cdot 10^{16} \text{ mol}.$$

Vidíme, že tento rozdiel nie je vôbec veľký, nám ide o rádový odhad. Zamyslime sa nad možnými zdrojmi chýb vo výpočte n_C . Objem stromu sme v princípe odhadli, ale rádovo bude tento odhad zrejme správny, teda veľký rozdiel to vo výsledku nespôsobí. Podobne, aj hustotu dreva sa odhadli zhruba, ale tam sa nebudeme od skutočnosti pravdepodobne líšiť ani rádovo. Najväčším problémom je určenie plochy, ktorú jeden strom v lese zaberá.

Ďalšou otázkou je, či sa v atmosfére nachádza dostatok molekúl kyslíka na to, aby sa všetky atómy uhlíka spotrebovali na tvorbu CO_2 . Hmotnosť zemskej atmosféry je¹² $m_a = 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ (za hranicu atmosféry sa považuje tzv. Karmanova hranica, ktorá sa nachádza vo výške 100 km nad hladinou mora), pričom $p_O = 21\%$ z nej tvorí kyslík a len $p_{\text{CO}_2} = 0,04\%$ oxid uhličitý. Teda v atmosfére sa nachádza asi

$$n_{O_2} = \frac{m_a p_O}{2M_O} \doteq 3,3 \cdot 10^{19} \text{ mol},$$

molekúl kyslíka. Vidíme, že ich je viac ako spočítané látkové množstvo uhlíka nachádzajúce sa v stromoch. Nemusíme sa teda báť, že by nám kyslík pri horení došiel. Látkové množstvo oxidu uhličitého získané horením lesov bude približne $n_{\text{CO}_2} = n_C \doteq 5 \cdot 10^{16} \text{ mol}$.

Teraz sa v atmosfére nachádza

$$n_{C_0} = \frac{m_a p_{\text{CO}_2}}{M_C + 2M_O} \doteq 4,5 \cdot 10^{16} \text{ mol}$$

oxidu uhličitého. Vidíme, že spálením všetkej vegetácie Zeme, by sa množstvo oxidu uhličitého v atmosfére zvýšilo asi na dvojnásobok.

¹¹<http://galerie2.sweb.cz/prvky.htm>

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth

Ďalšie možnosti

Ak by sme chceli spraviť ešte konkrétnejší výpočet, mohli by sme zistiť alebo odhadnúť na základe podnebia priemernú výšku lesov v jednotlivých krajinách. Potom by sme mohli ešte vyhľadať, priemerne aké druhy porastu sa v ktorej krajine nachádzajú, zistiť ich výšku a hustotu, a dostať tak konkrétnejšie hmotnosti lesov jednotlivých krajín.

Možností, ako spočítať množstvo vegetácie na Zemi, je veľa, vzhľadom na prístupnosť množstva rozličných dát o lesoch na Zemi. Napríklad na stránke¹³ sú mapy vegetačného indexu,¹⁴ pričom dáta je možné na tomto webe priamo analyzovať. Na stránke¹⁵ môžeme vidieť napríklad percentuálne pokrytie jednotlivých miest na Zemi lesmi, prípadne vývoj tejto veličiny v čase. Podrobná analýza takýchto dát však môže trvať celé dni, preto sme sa pri našom výpočte obmedzili na jednoduchší model.

Diskusia

Zamyslime sa teraz nad vypočítaným výsledkom. V skutočnosti by získané množstvo oxidu uhličitého bolo zrejme nižšie. V úvode sme si totiž zvolili predpoklad, že prebieha iba dokonalé horenie – s dostatočným prísunom kyslíka. V realite to však takto nefunguje, a pri horení vzniká aj oxid uhoľnatý. Tiež predpokladáme, že uhlík v ľubovoľných zlúčeninách nachádzajúcich sa v telách rastlín môže a bude reagovať s kyslíkom, čo opäť nie je úplne splnené. Zároveň pri odhade množstva kyslíka v atmosfére uvažujeme, že všetok tento kyslík má možnosť reagovať pri horení pri povrchu Zeme. Kyslík je ale dispergovaný v celom objeme atmosféry, takže pri prudkom horení bude mŕť kyslíku pri povrchu byť nedostatok.

Dôsledky pre život na Zemi

Ak horenie bude trvať dlho a bude masívne, vzniknutý popol zacloní atmosféru a spôsobí ochladenie, pretože zacloní teplo prichádzajúce zo Slnka. Z dlhodobého hľadiska ale naopak popol teplotu zvýši, jednotlivé častičky popola sa totiž budú ohrievať viac ako sa normálne ohrieva zemský povrch (majú nižšie albedo) a je len otázkou času, kedy toto teplo prenikne až k zemskému povrchu.

Zvýšenie množstva oxidu uhličitého v atmosfére spôsobí ohrev atmosféry, keďže oxid uhličitý je skleníkový plyn. Nárast teploty spôsobí intenzívnejšie odparovanie oceánov a zvýšenie ich teploty, čím sa z nich uvoľnia rozpustené plyny, okrem iného aj kyslík (čo bude mať nepriaznivý vplyv na morský život), metán, či potenciálne ďalší oxid uhličitý. Vplyv týchto javov na finálny obsah oxidu uhličitého v atmosfére by sme museli spočítať.

Keď však zhorí všetka vegetácia, nebude možné fotosyntézou spätne z oxidu uhličitého získať kyslík, čo by malo katastrofálne následky pre život na Zemi. V najhoršom prípade, ak by sekundárne javy neprežili ani morské rastliny (najmä riasy nachádzajúce sa v morskej vode), by jedinou možnosťou ako kyslík spätne naviazať, bolo jeho ukladanie do hornín na geologickej časovej škále.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

¹³https://neo.sci.gsfc.nasa.gov/view.php?datasetId=MOD_NDVI_M

¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Vegetation_Index

¹⁵<http://earthenginepartners.appspot.com/science-2013-global-forest>

Úloha II.E . . . potřebuji obejmout

13 bodů; průměr 5,24; řešilo 67 studentů

Změřte svůj objem několika různými způsoby.

Matěj se koupal ve vaně.

Nejdříve si ujasněme, co vlastně budeme měřit. Objem našeho těla není konstantní dlouhodobě (rosteme, přibíráme, hubneme, . . .) ani krátkodobě (dýchání). Dlouhodobé změny objemu eliminujeme tak, že budeme měření provádět v dostatečně krátkém časovém úseku. Konkrétně toto měření bylo provedeno v srpnu 2019. Objem je také značně ovlivněn tím, zda jsme nadechnutí nebo vydechnutí. Proto si nyní stanovíme, že budeme měřit pouze objem nadechnutého těla. Objem při vydechnutí by bylo možné měřit následujícími metodami zcela analogicky.

Geometrická aproximace těla

Na lidské tělo se můžeme dívat jako na velmi komplexní geometrický objekt, jehož objem by bylo velmi obtížné spočítat. V této metodě měření budeme lidské tělo aproximovat vhodnou kombinací geometrických těles, jejichž objem dokážeme spočítat snadno. Samozřejmě toto měření nebude moc přesné, proto se musíme dobře zamyslet nad volbou geometrických těles.

Není jednoznačný způsob, jak lidské tělo aproximovat. My zvolíme takovou aproximaci, ve které si tělo rozdělíme na končetiny, trup a hlavu. Objem těchto částí spočítáme zvlášť. Nejjednodušší by bylo aproximovat člověka jako minecraftovou figurku, kde je těchto šest částí reprezentováno obyčejnými kvádry. Lidské tělo ale není takto hranaté, proto zkusíme vymyslet přesnější aproximaci.

Ruka

Chceme-li být přesnější než minecraftový kvádr, můžeme zvolit místo toho tvar válce. Jenže to taky není dokonalé, protože ruka¹⁶ nemá ve všech místech stejný průřez. U ramena je nejširší a u zápěstí je užší. Zároveň nemá rovnoměrný průběh, aby ji bylo možné nahradit komolým kuželem. Ve skutečnosti ani nemá kruhový průřez. Pokusíme se ji aproximovat jakousi soustavou komolých kuželů postavených na sebe tak, že sousední komolé kužely sdílejí stejnou podstavu. První podstava bude odpovídat průměru natažené ruky těsně pod ramenem, druhou podstavu zvolíme nad loketním kloubem, třetí pod loketním kloubem a čtvrtou u zápěstí. Naš model ruky se tedy bude sestávat ze tří komolých kuželů. Využijeme vzorec pro objem komolého kuželu

$$V_k = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{v}{12\pi} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2),$$

kde v je jeho výška, $r_{1,2}$ jsou poloměry jeho podstav a $o_{1,2} = 2\pi r_{1,2}$ jsou obvody jeho podstav. Zobecněním tohoto vzorečku najdeme vztah pro objem našeho modelu ruky.

$$V_r = \frac{v}{12\pi(N-1)} \left(o_1^2 - o_N^2 + \sum_{i=2}^N (2o_i^2 + o_{i-1}o_i) \right), \quad (4)$$

kde v je délka celé ruky a využili jsme předpokladu, že měřené obvody ruky jsou rovnoměrně rozloženy po délce ruky, takže výška jednoho komolého kuželu je $\frac{v}{N-1}$, kde N je počet měření obvodů.

Všechna měření byla provedena krejčovským metrem. Výsledky měření jsou v tabulce 1. Po dosazení těchto hodnot do (4) dostáváme

$$V_r = (2100 \pm 100) \text{ cm}^3 = (2,1 \pm 0,1) \text{ l}.$$

¹⁶Jako ruku zde označujeme celou horní končetinu.

Délka ruky byla měřena od ramene k počátku prstů. Jejich objem zanedbáváme.

Tab. 1: Objem ruky

délka ruky	v	(72 ± 2) cm
obvod pod ramenem	o_1	(31 ± 1) cm
obvod nad loketním kloubem	o_2	(24 ± 1) cm
obvod pod loketním kloubem	o_3	(26 ± 1) cm
obvod u zápěstí	o_4	(17 ± 1) cm

Noha

Pro nohu použijeme zcela analogický model jako pro ruku. Dalo by se argumentovat, že například koleno docela porušuje „kuželovitost“ nohy, ale pro rozumný odhad to stačí. Po dosazení dostáváme

$$V_n = (6\,100 \pm 200) \text{ cm}^3 = (6,1 \pm 0,2) \text{ l}.$$

Tab. 2: Objem nohy

délka nohy	v	(93 ± 2) cm
obvod pod pánví	o_1	(53 ± 1) cm
obvod nad kolenem	o_2	(38 ± 1) cm
obvod pod kolenem	o_3	(34 ± 1) cm
obvod u kotníku	o_4	(22 ± 1) cm

Hlava

Hlava bude komplikovaná na aproximaci. Mohli bychom ji aproximovat elipsoidem. Ale v tom případě by bylo složité změřit jeho poloosy a není jasné, jak bychom tam zakomponovali bradu. Vzhledem k tomu, že hlava je oproti ostatním částem těla relativně malá, můžeme zde užít hrubší aproximaci. Aproximujeme jí prostě koulí. Objem koule (hlavy) lze vypočítat, když známe její obvod

$$V_h = \frac{1}{6\pi^2} o^3.$$

Obvod změříme několikrát v různých místech. Po dosazení dostaneme

$$V_h = (4,2 \pm 0,6) \text{ l}.$$

Trup

Toto je asi nejkomplicovanější část, její průřez se špatně modeluje nějakým geometrickým objektem. Použijeme modifikaci aproximace rukou a nohou s tím že místo kruhového průřezu budeme předpokládat elipsoidální průřez. Jelikož však je to velmi hrubá aproximace, nebudeme se zabývat tím, jak přesně vypočítat objem takového komolého objektu, jehož podstavy

Tab. 3: Obvod hlavy

v horizontální rovině	(58 ± 1) cm
ve vertikální rovině (pod bradou)	(65 ± 1) cm
šikmo (přes bradu)	(69 ± 1) cm
šikmo (přes čelo)	(60 ± 1) cm
průměr	(63 ± 3) cm

jsou různé elipsy s různou excentricitou. Použijeme jednodušší model, kdy si trup rozdělíme rovnoměrně svise na určitý počet řezů a každému řezu bude příslušet eliptický válec, jehož podstavou je daná elipsa. Objem tedy vypočteme jako

$$V_T = \frac{\pi v}{4(N-1)} \sum_{i=1}^N 2a_i 2b_i,$$

kde N je počet řezů, v je výška trupu, $2a_i$ je hlavní osa (tedy největší průměr, nikoliv poloosa) a $2b_i$ je vedlejší poloosa i -té elipsy.¹⁷

Výška $v = (74 \pm 2)$ cm byla změřena od konce nohou po ramena. Poloosa průřezu trupu se neměří tak snadno, protože nemůžeme jednoduše natáhnout metr skrze tělo. Pro tento účel bylo vyrobeno velké posuvné měřidlo (šuplera) ze stavebnice LEGO, která umožňuje dobře postavit pravé úhly. Dvojnásobek poloosy byl změřen sevřením trupu mezi čelisti měřidla a následným přepočítáním počtu LEGO dílků na centimetry. Nejistota této metody byla odhadnuta na 1 cm. V tabulce 4 jsou vypočteny i dílčí průřezy a excentricity.

Tab. 4: Průměr trupu

kde?	$\frac{2a_i}{\text{cm}}$	$\frac{2b_i}{\text{cm}}$	$\frac{S_i}{\text{cm}^2}$	ε
boky/zadek	33 ± 1	23 ± 1	610 ± 30	0,71
pupík	27 ± 1	20 ± 1	430 ± 30	0,69
mezi pup a prs	29 ± 1	23 ± 1	510 ± 30	0,64
prsa	32 ± 1	25 ± 1	630 ± 30	0,64
ramena	45 ± 1	18 ± 1	630 ± 40	0,92

Průměrný obsah průřezu je¹⁸ $S = (560 \pm 30)$ cm². Pro objem trupu pak dostáváme

$$V_T = (41,4 \pm 2,2) \text{ l.}$$

Zbytek

Některé části těla jsme zcela zanedbali, jako například chodidla, dlaně s prsty, krk a samozřejmě pohlavní orgány. Tyto části nejsou však v porovnání s trupem a končetinami dost velké

¹⁷Trochu neintuitivně zde pracujeme s průměry elipsy místo jejich poloos, protože poloosy nemůžeme snadno měřit přímo.

¹⁸Do toho nebyla započtena směrodatná odchylka aritmetického průměru, jelikož to je součástí chyby našeho modelu.

a geometricky příliš komplikované, než aby se nám vyplatilo vytvářet jejich modely. Místo toho odhadneme, že dohromady bude jejich objem

$$V_z = (3,0 \pm 0,5) \text{ l.}$$

Shrnutí

Po sečtení dostáváme celkový objem

$$V = (66 \pm 3) \text{ l.}$$

Tab. 5: Části těla

část těla	geometrické těleso	objem
ruka	komolé kužele	$(2,4 \pm 0,1) \text{ l}$
noha	komolé kužele	$(6,1 \pm 0,2) \text{ l}$
hlava	koule	$(4,2 \pm 0,6) \text{ l}$
trup	eliptický válec	$(41,4 \pm 2,2) \text{ l}$
zbytek	odhad	$(3,0 \pm 0,5) \text{ l}$

Měření přes lidskou hustotu

Nejsnáze by se nám asi objem těla měřil, pokud bychom znali hustotu. Pak by stačilo zjistit pouze hmotnost. Naštěstí je možné na Wikipedii¹⁹ tuto hustotu dohledat. Podle této stránky je průměrná hustota lidského těla po vydechnutí $1\,025 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Toto číslo musíme však brát s rezervou, protože by to měl být průměr a individuální hustota se bude u různých lidí lišit v závislosti na poměru objemu kostí (jejichž hustota je podle stejné stránky $1\,700$ až $2\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), tuku ($940 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) a jiných částí těla, které mají různou hustotu. Vzhledem k těmto variacím odhadneme nejistotu této hustoty na $4,0\%$

$$\rho = (945 \pm 38) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Nyní se stačí zvážit na klasické lidské váze. Podle ní je naše hmotnost

$$m = (69,1 \pm 0,3) \text{ kg},$$

kde byla nejistota odhadnuta jako $0,3 \text{ kg}$. Displej sice zobrazuje hmotnost s přesností na desetiny kg , ale byla zvolena větší nejistota vzhledem k tomu, že to je obyčejná osobní váha, jejíž výrobci ani nespecifikovali třídu přesnosti.

Z těchto údajů již lze dopočítat objem

$$V = \frac{m}{\rho} = (73,1 \pm 2,9) \text{ l},$$

kde jsme m^3 rovnou převedli na litry a nejistotu jsme vypočítali podle Gaussova zákona šíření nejistot jako

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial m} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \sigma_\rho\right)^2} = V \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}.$$

¹⁹<http://www.wikina.cz/a/Hustota#.C4.8C1ov.C4.9Bk>

Měření ponořením do kapaliny

Klasická a asi i poměrně snadná metoda měření objemu pevných těles je pomocí ponoření do kapaliny a změření objemu kapaliny, kterou těleso vytlačí. V případě, kdy tělesem je lidské tělo, je však problém najít dostatečně velký odměrný válec. Proto byla použita vana. Ta však nemá stupnici, na které by bylo možné odečíst, kolik je ve vaně vody. Místo toho je možné použít jako referenční výšku hladiny polohu horní výpusti, která bývá ve vanách, aby zabráňovala přetečení. To však umožňuje měřit pouze jednu výšku, a tak měření bylo provedeno následujícím způsobem:

1. napustíme vanu dostatečným množstvím vody,
2. postupně ponořujeme tělo, přebytečná voda začne odtékat horní výpustí a stabilizuje tak výšku hladiny při dalším ponořování,
3. když je celé tělo²⁰ pod hladinou, počkáme chvíli, než všechna přebytečná voda odteče,
4. vyjmeme tělo z vany a dopustíme tolik vody, abychom hladinu dostali přesně na úroveň výpusti,
5. při dolévání měříme objem dolité vody.

Voda byla dolévána 5l konví s ryskami, díky čemuž se dal snadno změřit objem dolité vody. Když se hladina blížila k výpustí, byl pro přesnější dolévání použit odměrný válec. Správnost rysek konve byla ověřena pomocí odměrného válce a při tomto hrubém ověření byla odhadnuta její nejistota na 5%. Celkem bylo potřeba do vany vylít 14 konví a následně ještě 1,5l vody pomocí odměrného válce. Celkový objem naměřený touto metodou tedy je

$$V = (72 \pm 4) \text{ l.}$$

Kapičky vody, které zůstaly na těle po výlezu z vany, zanedbáváme.

Diskuze výsledků

Výsledky z posledních dvou měření se v rámci nejistoty dobře shodují, zatímco výsledek získaný geometrickým postupem se od nich liší. Lze tedy usuzovat, že náš geometrický model těla není příliš přesný. A zároveň, že průměrná hustota lidského těla je v rámci nejistot dostatečně podobná té naší.

Tab. 6: Porovnání výsledků

postup	výsledek
geometricky	$(66 \pm 3) \text{ l}$
hmotnostně	$(73 \pm 3) \text{ l}$
ponořením	$(72 \pm 4) \text{ l}$

Poznámky k došlým řešením

V mnoha řešeních se opakovaly ty samé chyby, proto jsme se rozhodli, že se zde o nich pořádně rozeptejeme. Ve svých opravených řešeních je můžete najít pod čísly 1 až 7. Jenom pro upřesnění, při bodování jsme se neřídili těmito chybami, ale posuzovali jsme každé řešení individuálně. Uvedená čísla tak slouží především pro vás jako přehled toho, co zlepisit.

²⁰Až na nos kvůli dýchání.

1. **Chyby měření vstupních veličin.** Měření nemá žádnou vypovídající hodnotu, pokud není stanovena jeho nejistota. O tom, jak určit chybu měření, už byla napsána spousta textů, například seriál XXX. ročníku FYKOSu nebo díl o zpracování měření z Knihovničky Fyzikální olympiády.

Chtěli bychom zdůraznit, že existuje více druhů chyb – statistické (vyplývající z náhodnosti procesu) a systematické (způsobené například nedokonalostí měřidla nebo nevhodným postupem). Při měření musíme vzít v úvahu oba druhy, výsledná chyba je typicky kvadratickým součtem té statistické a systematické.

Konkrétně v tomto experimentu bylo určení nejistot velmi obtížné. V takovém případě je nutné je alespoň odhadnout, popřípadě zdůvodnit, proč je můžeme zanedbat.

2. **Chyby měření výsledných veličin.** Tento bod se zabývá přenosem chyby od veličin měřených přímo až po ty, které z nich spočítáme. Problematika je opět dostatečně dobře popsána ve výše zmíněných textech, na tomto místě pouze připomeneme univerzální vzorec šíření nejistot. Necht $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je výsledná veličina a a_i jsou její proměnné, jejichž hodnoty jsme změřili. Pokud známe jejich chyby u_{a_i} (bod 1.), dokážeme spočítat chybu f podle vztahu

$$u_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} u_{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2} u_{a_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n} u_{a_n}\right)^2}.$$

3. **Diskuze výsledků a chyb.** Nedílnou součástí každého experimentu je diskuze, ve které hodnotíme naše výsledky a přemýšlíme, kde jsme se dopustili nejzávažnějších chyb (bod 2.). Už jen zamýšlení se nad tím, jestli jsme naměřili rozumné hodnoty, má velký smysl. Dále je zvykem porovnat výsledky s teoretickou předpovědí nebo (jako v tomto případě) s hodnotami z jiných způsobů měření. Nakonec můžeme zmínit, jak by se dal náš experiment vylepšit a co bychom příště měli udělat jinak, abychom dostali přesnější výsledky.
4. **Průměrování výsledných hodnot z různých způsobů měření.** Dostaneme-li pomocí různých experimentálních postupů různé hodnoty, nemá smysl je na konci průměrovat. Každý způsob byl pravděpodobně zatížen jinak velkou chybou (bod 2.), a proto aritmetický průměr nemá žádnou vypovídající hodnotu. Teoreticky by ještě mohlo mít smysl spočítat něco jako vážený průměr, kde bychom vzali v úvahu nejistoty jednotlivých výsledků.

Místo toho je daleko lepší srovnat výsledné hodnoty v diskuzi (bod 3.) – hned můžeme rozebrat, proč se liší a co nám to říká o měřené veličině.

5. **Archimédův zákon.** *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.* Všimněme si, že tento zákon neříká nic o tom, že ponořením se do vody vytlačíme množství vody rovnající se našemu objemu. Toto tvrzení je důsledkem nestlačitelnosti (ideální) kapaliny, což vyplývá z rovnice kontinuity.

Archimédův zákon hovoří o silách, které působí na ponořená tělesa. K řešení úlohy ho bylo možné použít například tak, že bychom měřili, jak hmotné závaží potřebujeme k tomu, abychom se volně vznášeli ve vodě. Ačkoli to několik řešitelů navrhovalo, žádný to prakticky nezkusil.

6. **Objem plic.** V některých případech je hodnota měřené veličiny ovlivněna celou řadou okolností. Rozdíl mezi nadechnutím a vydechnutím je řádově několik litrů, což už rozhodně není zanedbatelné. Správným přístupem bylo si na začátku měření stanovit, jestli budeme měřit s maximálním nádechem nebo výdechem.

Mnozí řešitelé sice uvedli rozdílné hustoty, které pro jednotlivé případy našli (bod 7.), ale u jiných způsobů měření už mezi nádechem a výdechem nerozlišovali.

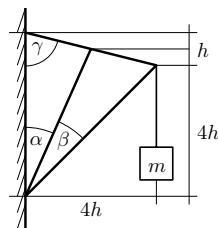
7. **Zdroje a snadno vyhledatelné hodnoty.** Průměrná hustota lidí je jistě mnohokrát změněná veličina, kterou jednoduše najdeme na internetu. Není proto potřeba odhadovat ji hustotou vody. Pokud máme dobrý důvod věřit, že jsme jinak hustí než většina populace, potom dává smysl tabulkovou hodnotu nepoužít, ale je to potřeba dostatečně zdůvodnit. V každém případě ale musíme uvést zdroj, kde jsme danou hodnotu našli. Není nutné odkazovat na všechny fyzikální konstanty, které používáme, protože jsou typicky všude stejné na dostatečný počet platných cifer. Ale hustota lidí se může podle různých zdrojů nezanedbatelně lišit, a proto je potřeba zmínit, odkud naše hodnota pochází.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha II.S ... směs souřadnic a grafiky 10 bodů; průměr 4,74; řešilo 47 studentů

1. Určete, kolik procent první stránky vzorového řešení úlohy 26-IV-5 zabírá černá barva. Řešení této úlohy najdete na https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf.
2. Představte si, že máte tužku, jejíž tuha má poloměr $r = 0,8$ mm. Tuha je vyrobena z grafitu v šesterečné soustavě, kde vzdálenost atomů uhlíku v jedné vrstvě je rovna $a = 2,46 \cdot 10^{-10}$ m a jednotlivé vrstvy jsou od sebe vzdáleny $c = 6,71 \cdot 10^{-10}$ m. Jakou délku tuhy spotřebujete na pomalování celé čtvrtky A4, pokud se papír při barvení pokryje průměrně 100 vrstvami tuhy?



Obr. 1: Soustava.

3. Na obrázku 1 je zobrazena stabilní tyčová soustava, která se nachází v tíhovém poli se zrychlením g . Nejtlustší linka znázorňuje dokonale tuhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Na konci těchto tyčí je na nehmotném provázku upevněno závaží o hmotnosti m (na obrázku zobrazeno středně tlustou linkou). Tenké čáry symbolizují délky tyčí. Platí, že $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tyč mezi úhly α a β půlí horní tyč. Tyče mohou působit silou pouze ve svém směru (žádná složka není kolmá na tyč). Tyče jsou v místech dotyku s levou stěnou pevně upevněny. Určete, které tyče jsou namáhány v tlaku a které v tahu a spočítejte velikosti sil, které na ně působí.
4. Uvažujme spirálu, která začíná v počátku soustavy souřadné a odvíjí se rovnoměrně. Vzdálenost mezi jednotlivými závitů a je konstantní. Popište pohyb po této spirále ve vhodných souřadnicích.
5. Mějme šroubovici, která se odvíjí rovnoměrně. Šroubovice má konstantní poloměr R a konstantní vzdálenost mezi závitů h . Popište pohyb po šroubovici ve vhodných souřadnicích a určete, jaká je délka jednoho závitů této šroubovice.

Bonus Vymyslete nebo najděte (a citujte) souřadnice, které nejsou v knihovničce FO a byly by vhodné pro popis nějakého fyzikálního problému (uvedte jakého). Souřadnice popište převodem z kartézských souřadnic na vámi vybrané a zpět. Dále ukažte, jak lze ve vašich souřadnicích obecně určit vzdálenost dvou bodů.

Karel generoval problémy.

Výpočet pokrytí papíru

Nejprve si stránku prohlédneme. Jde o stránku, která je pokrytá většinou textem plus se na ní nachází obrázek. Ten by mohl na první pohled mít přibližně stejné pokrytí barvou jako text. Obvykle se počet stran, které zvládnete vytisknout pomocí toneru, udává v násobcích stran s 5 % pokrytím.²¹ Stránka je pokrytá textem celá, takže bychom mohli „tipnout“, že by mělo jít velice zhruba o 10 % pokrytí. Ale to je opravdu jenom velice rychlý odhad. Podívejme se na jednu variantu korektnějšího řešení.

Použijeme APFill – Ink and Toner Coverage Calculator 6.0²² Tento program podporuje nejen zpracování souborů TIFF, JPG či BMP, ale pokud si nainstalujete i Ghostscript,²³ pak lze pracovat přímo se soubory formátu PDF (či PS).

Využijeme funkci „CMYK Coverage ratio (PDF, PS)“. Jelikož pokrytí pro tisk záleží i na rozlišení, podíváme se na všechna dostupná rozlišení: 50 dpi, 75 dpi, 150 dpi, 300 dpi a 600 dpi. Jednotka dpi značí „dot per inch“, tedy bodů (pixelů) na palec. Rozdílná pokrytí u různých rozlišení jsou dána tím, že se z vektorových fontů musí přepočítat nějakým způsobem body, které pak tiskárna na papír vytiskne. Pro pokrytí v rámci počítačové obrazovky platí, že čím vyšší rozlišení, tím vyšší přesnost. Stránka ovšem není jenom v odstínech černé - obrázek je totiž tvořený z barev CMY, tedy azurové (Cyan), fuchsiové (Magenta) a žluté (Yellow), přestože by správně měl být v odstínech černé (blacK). V tabulce 7 jsou uvedené výsledky. Od 300 dpi se zdá, že jsou již stabilní, a proto jako rozhodující můžeme vzít tato data. Jako relativně rozumný odhad pak můžeme vzít průměr z hodnot C, M a Y a ten přičíst k hodnotě K. Dostáváme pak pokrytí 5,41 %. Chybu výsledku z programu alespoň odhadneme na 0,1 % a dostáváme tak výsledný odhad, že $(5,4 \pm 0,1)$ % stránky je pokryto odstíny černé, resp. $(5,3 \pm 0,1)$ % je pokryto explicitně černou barvou.

Tab. 7: Výsledky pokrytí první strany řešení úlohy 26-IV-5 získané pomocí programu APFill – Ink and Toner Coverage Calculator 6.0. Počet platných cifer odpovídá výstupu z programu.

Rozlišení/dpi	C	M	Y	K
50	0,35 %	0,31 %	0,32 %	10,57 %
75	0,25 %	0,22 %	0,23 %	7,90 %
150	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,80 %
300	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,25 %
600	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,25 %

Zajímavou možností je udělat průměr z různých na sobě nezávislejších odhadů. Podívejme se tedy na odhady řešitelů úlohy, kteří zaslali tuto část. Jedná se o hodnoty od 3,1 % po 28 %²⁴ Střední hodnota vychází 11 % a pokud bereme samotné hodnoty jako přesné,²⁵ pak je výběrová směrodatná odchylka 7 %. Řešitelé používali různé programy – GIMP, ImageJ, Python a další, které dokážou vytvořit histogramy. Je zajímavé, že např. ImageJ dával výrazně odlišné vý-

²¹Komentář k tomu, co je 5 % pokrytí, najdeme třeba na <https://www.naplna.cz/co-je-5-pokryti>.

²²<https://avpsoft.com/products/apfill/>

²³<https://www.ghostscript.com/>

²⁴Pokud si z dvou odhadů jednoho řešitele vybereme pouze 3,1 % a druhou variantu, totiž 62 %, zahodíme. Stránka pokrytá z více než poloviny barvou by musela být plná obrázků a ne textu.

²⁵Většina řešitelů neuvedla explicitně neurčitost odhadu, což bychom správně měli brát za chybu.

sledky – 5,23 % a 18,96 %, což je pravděpodobně způsobeno nastavením rozlišení a interpretací výsledků.

Bodování úlohy bylo poměrně tolerantní. Nicméně odpověď 23,758 7 % je evidentně nesprávná, výsledek na takový počet platných cifer by musel být doložen nějakým opravdu hodně přesným postupem. S ohledem na to, že reálná hodnota je nejspíše opravdu výrazně nižší, je to zjevně neopodstatněně zapsaná přesnost.

Spotřebovaná tuha

Rozměr a krystalové mřížky nemusíme vůbec použít, čehož si všimla i velká část řešitelů. Je pouhou zajímavostí, že na jeden atom připadá průměrně plocha $S_C = \sqrt{3}a^2/2 \doteq 5,24 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$.

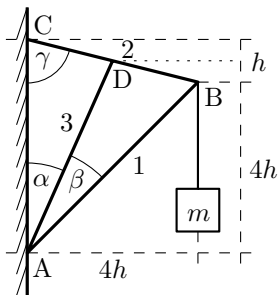
Slovo čtvrtka v zadání znamená papír s vyšší gramáží. Plochu listu A4 můžeme určit z jeho rozměrů. Šířka A4 je $x = 210 \text{ mm}$ a výška je $y = 297 \text{ mm}$. Plocha je pak $S_{A4} = xy \doteq 0,0624 \text{ m}^2$. Mimořádně, papír serie A je standardizován tak, že A0 má plochu $1,00 \text{ m}^2$ a každý další má poloviční plochu předcházejícího.

V zadání je uveden poloměr tuhy, pravděpodobně se jedná o válcovou tuhu. Průřez určíme jako $S_t = \pi r^2 \doteq 2,01 \text{ mm}^2$. Pro jednoduchost lze předpokládat, že se stírají vrstvy po vrstvě. Pak potřebná délka tuhy h je dána následujícím poměrem

$$h = 100 \frac{S_{A4}}{S_t} c = \frac{xy c}{\pi r^2} \doteq 2,1 \text{ mm}.$$

Pokud chceme pomalovat celou čtvrtku A4 pomocí grafitové tuhy o poloměru 0,8 mm při předpokladu, že průměrně se bude oddělovat 100 vrstev tuhy, budeme potřebovat pouhé 2,1 mm tuhy.

Tyčová soustava



Obr. 2: Náčrt zadání tyčové soustavy s doplněným označením tyčí a spojů.

Na obrázku 2 jsme si označili body a tyče. Ze zadání víme, že tyče mohou působit silou ve stejném směru, jak jsou upevněné, a ne kolmo. Ze zákona akce a reakce vyplývá, že i na tyče může být působeno pouze v jejich směru. Tím pádem se tyč označená jako 4 v soustavě vůbec neprojeví a můžeme ji odebrat. Pokud by se jednalo o reálnou konstrukci, kde jsou tyče hmotné a mají i šířku a navíc se po zavěšení předmětu některé protáhnou a jiné zkrátí, tak by se uplatnila i tyč 4.

Soustava se nám zjednodušila na dvě tyče a jedno závaží. Celkový součet sil působících na bod B musí být nulový. Překresleme si síly do silového trojúhelníku, viz obrázek 3. Označili jsme $\delta = \alpha + \beta = 45^\circ$. Vidíme, že horizontální složky \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 se musí vyrušit a že vertikální složka těchto dvou sil pak musí vyrušit $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, kde \mathbf{g} je tíhové zrychlení. Dále již budeme pracovat jenom s velikostmi těchto sil, které již nebudeme značit tučně. Dostáváme dvě rovnice

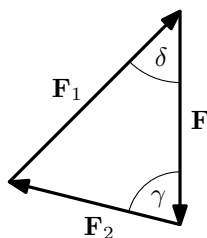
$$\begin{aligned} F_1 \sin \delta &= F_2 \sin \gamma, \\ F_1 \cos \delta + F_2 \cos \gamma &= mg. \end{aligned}$$

Stačí vyřešit soustavu rovnic o dvou neznámých a dostáváme velikosti sil

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{mg}{\cos \delta + \cot \gamma \sin \delta} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \doteq 1,13 mg, \\ F_2 &= \frac{mg}{\cos \gamma + \cot \delta \sin \gamma} = \frac{\sqrt{17}}{5} \doteq 0,825 mg, \end{aligned}$$

kde jsme úhel γ určili z obrázku 2 pomocí vztahu $\sin \gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Pokud by soustava byla složitější, mohli bychom použít momentovou větu, ale tady jsme si vystačili s jednou relativně jednoduchou rovnovou sil. Na tyč 1 působí tlakem síla $1,13 mg$, na tyč 2 působí tahem síla $0,825 mg$ a tyč 4 je dle předpokladů bez síly.



Obr. 3: Náčrt sil působících v bodě B.

Archimédova spirála

Jde o standardní křivku. Možností, jak ji vyjádřit, je více. Můžeme například využít nějaké t jako parametr a v polárních souřadnicích pak rovnici spirály $r = at$ a $\varphi = 2\pi t$. Převod na kartézské souřadnice je $x = at \cos(2\pi t)$ a $y = at \sin(2\pi t)$.

Nebo využijeme přímo úhel φ a můžeme psát $r = \frac{a\varphi}{2\pi}$. Převodní vztahy jsou $x = \frac{a\varphi}{2\pi} \cos \varphi$ a $y = \frac{a\varphi}{2\pi} \sin \varphi$.

Pokud bychom chtěli určit dráhu, kterou urazí bod po křivce (z φ_{\min} do φ_{\max}), dostali bychom poměrně komplikovaný vztah

$$\begin{aligned} l &= \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi = \frac{a}{2\pi} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \operatorname{argsinh} \varphi \right]_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}}. \end{aligned}$$

Integrál si můžete zkusit spočítat sami. Pokud nevíte jak začít, použijte substituci $\varphi = \sinh u$.

Šroubovice

Opět jde o jednoduchou úlohu. Rovnici pro šroubovici lze napsat ve válcových souřadnicích jako

$$\begin{aligned}r &= R, \\ \varphi &= 2\pi t, \\ z &= at,\end{aligned}$$

kde t je opět parametr, který bychom mohli přeskálovat. Důležité je si uvědomit, že jde o pohyb po válci. Spirála má rovnoměrnou stoupavost, takže když si válec rozvineme do roviny, jedná se o pohyb po přímce, resp. úsečkách. Délku jednoho závitu pak můžeme určit snadno jako

$$l_1 = \sqrt{z^2(1) + (\varphi(1)r)^2} = \sqrt{a^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Pokud bychom chtěli zobecnit délku spirály v závislosti na posunu v parametru t , dostali bychom následující rovnici

$$l(t) = t\sqrt{a^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Zajímavé souřadnicové soustavy

V zadání jsou explicitně vynechané souřadnicové soustavy, které jsou v knihovničce Fyzikální olympiády. Bohatší nabídku souřadnicových soustav můžete nalézt například na anglické Wikipedii, kde je vyjmenovaná více jak desítkou ortogonálních souřadnicových systémů.²⁶

Podívejme se například na bipolární souřadnicový systém.²⁷ Ten je podobný polárnímu, ale liší se tím, že zde máme dvě ohniska místo jednoho. Souřadnice tak mohou být využity pro popis pole v okolí dvou nabitých válců. Souřadnice σ a τ o stejné hodnotě jsou v obou případech kružnice. Jedna z nich prochází vždy oběma ohnisky, kdežto druhá neprotíná ani jedno a obkružuje právě jedno ohnisko (resp. s výjimkou přímky kolmé k jejich spojnici, což je taková deformovaná kružnice). Souřadnice σ je definovaná jako úhel mezi levým ohniskem, polohou bodu a druhým ohniskem. Druhá souřadnice je daná logaritmickým poměrem vzdáleností od ohnisek, tedy $\tau = \ln \frac{d_1}{d_2}$. Pokud je vzdálenost mezi ohnisky $2a$, pak platí pro převod souřadnic

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad y = a \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}.$$

Opačným převodem je

$$\operatorname{tgh} \tau = \frac{2ax}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Pokud vezmeme bipolární systém a zrotujeme ho v 3D okolo středu, a to okolo osy kolmé ke spojnici ohnisek, dostáváme toroidní souřadnice.²⁸ Ty mohou být dobré u popisu pole tokamaku.

²⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_coordinates

²⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Bipolar_coordinates

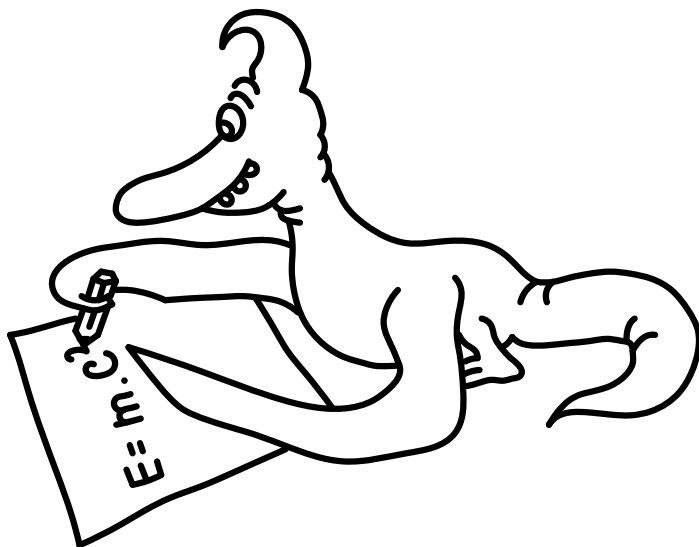
²⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_coordinates

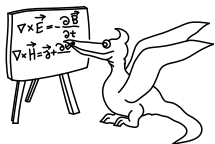
Poznámky k došlým řešením

Nejvíce řešení bylo z druhé části této úlohy, na druhou stranu bonus neposlal skoro nikdo. Pozitivně hodnotíme zlepšení v psaní číselných hodnot na odpovídající počty platných cifer, ale stále s tím mělo hodně řešitelů problémy. Také se často vyskytují jednotky napsané italikou-/skloněným písmem, ačkoli by měly být stojatě. Dalším častým špatným návykem je nepsání postupu či odpovědi.

Pouze Veronika H. našla nějaké chyby v autorském řešení z minulého dílu, díky čemuž si vysloužila 2,5 bodu k řešení navíc. Můžete zasílat opravy i k jiným úlohám než k seriálu, a to i zpětně z tohoto ročníku, ale pouze k aktuálním verzím souborů, které máme na webu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz





Seriál: Zákony zachování

Ústřední koncept zákonů zachování

Jak jsme si v minulém díle řekli, díky symetriím platí zákony zachování (dále ZZ), které můžeme využít pro řešení úloh. Nicméně některé „ZZ“ nemusí platit vždy. Přičemž tím nutně nemyslíme to, že se fyzikální zákony mohou měnit v průběhu existence vesmíru, což zatím nebylo ani pozorováno ani vyvráceno. Máme ZZ, které se zatím pevně drží vůči všem možným testům (např. ZZ hybnosti, náboje, energie), ale pak je kategorie ZZ, které mají jen omezenou škálu platnosti (např. ZZ hmotnosti).

Velice důležité u ZZ je uvědomění si jeho vztahu ke zkoumanému systému. První zákonitostí je, že pokud máme uzavřený systém, tak nám celková hodnota zachovávanější se veličiny nemůže klesnout či stoupnout a musí být stále stejná ve všech okamžicích.²⁹ Pokud si vybereme pouze část toho systému nebo je náš systém obklopen nějakým dalším, se kterým může interagovat, pak pokud nějaké množství veličiny do zvoleného podsystemu vstoupí, musí z něj i vystoupit nebo se v něm musí uložit.

Z jiného úhlu pohledu se na to můžeme dívat tak, že z daného podsystemu nemůžeme donekonečna čerpat veličinu zachovávanější se v rámci většího uzavřeného systému. Tento obecný princip pak rovnou zakazuje perpetuum mobile prvního druhu. Když se s těmito obecnými principy sžijeme, hned se nám bude jednodušeji pracovat se všemi typy úloh.

Zákon zachování hmotnosti

ZZ hmotnosti je jedním z těch starších. Byl objeven v druhé polovině 18. století nezávisle na sobě nejdříve M. V. Lomonosovem a později A. L. Lavoisierem. Jak jsme zmínili v úvodu, je jedním ze slabších ZZ. Platí totiž přesně v klasické mechanice, dostatečně dobře v termodynamice za rozumných teplot a dokonce i u chemických reakcí, pokud započítáme všechny produkty. Až u jaderných reakcí začíná být měřitelnější nezachování hmotnosti, která se přemění na energii. Jedním z největších rozdílů hmotnosti mezi vstupní a výstupní hmotností je v proton-protonovém cyklu ve Slunci, kdy ze 4 protonů postupně vznikne jádro ${}^4_2\text{He}$. Vodík má relativní atomovou hmotnost $A({}^1_1\text{H}) = 1,007\,825$, helium pak $A({}^4_2\text{He}) = 4,002\,603$. Rozdíl na jeden atom helia je pak 0,028 70 v atomových hmotnostních jednotkách, což je pokles o 0,71 %. Hmotnostní schodek se uvolní ve formě energie a neutrin. Dalo by se říct, že pokud by nám stačilo, aby zákon zachování platil až na $\pm 1\%$, tak u většiny dějů, které pozorujeme kolem nás, dostatečně dobře platí.

Výjimkami jsou pouze hodně drastické situace. Například pokud dojde k anihilaci hmotantihmota, pak se všechna hmotnost přemění na energii. Nebo také při pádu hmoty do černé díry může nastat vyzáření větší části z celkové hmoty látky. Podobně zachování hmotnosti neplatí při srážkách těles relativistickými rychlostmi. Mnohem obecnější je ZZ energie, o kterém bude

²⁹ Je tu ovšem kvantová teorie, takže pokud zkoumáme malé škály, tak musíme uvažovat střední hodnoty. Například přesnou hybnost či energii systému nedokážeme a ani nemůžeme změřit. Změření přesné hybnosti systému by totiž znamenalo, že vůbec neznáme jeho polohu či polohy jeho součástí, a to kvůli Heisenbergově principu neurčitosti. V klasické fyzice ale můžeme předpokládat znalost přesných hodnot všech veličin v každém okamžiku.

řeč dále a který platí i ve výše zmíněných situacích. Hmotnost je ale veličinou, kterou si přeci jen dokážeme snadněji představit a i proto se stále využívá ZZ hmotnosti.

Zákon zachování hybnosti

ZZ hybnosti nám říká, že hybnost se v inerciální souřadnicové soustavě zachovává. Pro celkovou hybnost platí

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_n \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{konst},$$

kde je m_i je hmotnost a \mathbf{v}_i je rychlost i -té částice v systému a n je celkový počet částic.

Můžeme se transformovat i do takové inerciální souřadnicové soustavy, kde je celková hybnost všech částic nulová. To je přesně těžišťová soustava, kterou jsme zmínili již v minulém díle. Někdy bývá tento důsledek nazýván jako ZZ těžiště.

Typickým příkladem je úloha známá z českých železnic, kdy na kolejích zaparkuje nějaký dopravní prostředek. Pohyb kolmo ke kolejím zanedbáme. Předpokládejme, že dopravním prostředkem je auto celkově naložené na $m = 1,0$ t. Vlak má zhruba $M = 500$ t. O kolik se zpomalí vlak nárazem, resp. se urychlí auto? Předpokládáme nepružnou srážku, po které se oba dopravní prostředky spojí. Budeme předpokládat, že vlak nebrzdí, protože tam stejně asi zaparkovali na poslední chvíli. Ani nemusíme znát počáteční rychlost v_0 , pokud se zajímáme pouze o poměr nové rychlosti v_1 a té původní. Platí ZZ hybnosti

$$p = Mv_0 = (m + M)v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_0} = \frac{M}{m + M} \doteq 99,8\%.$$

Vidíme, že nabrání jednoho auta vlak významně nezpomalí – pouze o 0,2%. Zato automobil je urychlen prakticky okamžitě na rychlost vlaku. Možná jste to už někdy na videích ve zprávách viděli. Opravdu to tak bývá. Důvod, proč vlak následně zastaví, je, že velice prudce brzdí. Má ale opravdu velkou hybnost, a tedy musí na koleje působit velkou silou po dostatečně dlouhou dobu, aby se zastavil.

Pokud bychom řešili úlohu s vozíčky na vzduchové dráze, které se od sebe odráží, tak by se jednalo o pružné srážky. Taková vozidla se nespojí a platí jak zákon ZZ hybnosti, tak ZZ mechanické energie.

Zákon zachování momentu hybnosti

Podobně jako ZZ hybnosti platí i ZZ momentu hybnosti. Můžeme si zvolit libovolný bod v inerciální souřadnicové soustavě a vůči němu spočítáme následující veličinu

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n = \text{konst},$$

kde \mathbf{r}_i je průvodič, tedy polohový vektor vycházející z námi vybraného bodu k i -tému hmotnému bodu, \times je vektorový součin a \mathbf{p}_i je hybnost i -tého hmotného bodu. Tato veličina se nám v uzavřeném systému bude opět zachovávat, ať se děje, co se děje.

Druhý Keplerův zákon

Druhý Keplerův zákon (II. KZ) je de facto ZZ momentu hybnosti pro planety obíhající Slunce, respektive tak byl původně definován. My si jej můžeme rozšířit na jakoukoliv soustavu, kde je jedno ústřední těleso obíhané nějakým počtem dalších těles, která vůči němu mají zanedbatelnou hmotnost a která se navzájem výrazně neovlivňují.³⁰ Hodí se pro rychlé výpočty právě v úlohách o oběhu planet ve slunečních soustavách či o oběhu měsíců kolem planet.

Vzorec, který je dobré mít na paměti, je, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času je co do velikosti rovna velikosti vektoru \mathbf{w} , který je na ni kolmý

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{konst},$$

kde \mathbf{r}_i je průvodič tělesa (vektor z ohniska elipsy do daného tělesa) a \mathbf{v}_i je jeho rychlost. Speciálně ve vrcholech elipsy (pericentru a apocentru) pak závislost přejde na jednoduché násobení. Navíc, pokud nás zajímá pouze porovnání rychlostí pohybu oběžnice v pericentru a apocentru, můžeme psát

$$r_p v_p = r_a v_a.$$

Zákon zachování energie

Na ZZ energie se můžeme dívat také jako na zobecnění ZZ hmotnosti. Energie, na rozdíl od hybnosti či momentu hybnosti, může být i nějakým způsobem skrytá. Tím myslíme to, že existuje potenciální energie, která je „schovaná“ v mikroskopických měřítcích hmoty. Vyjmenujme si alespoň základní typy, se kterými se často setkáváme:

- Kinetická energie translačního pohybu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost tělesa a v jeho rychlost.
- Kinetická energie rotačního pohybu $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči nějaké ose a ω je úhlová rychlost vůči dané ose.
- Práce $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, kde \mathbf{F} je síla působící po dráze \mathbf{s} a \cdot značí skalární součin. Pokud úhel mezi \mathbf{F} a \mathbf{s} označíme α , platí $W = Fs \cos \alpha$.
- Polohová potenciální energie v homogenním tíhovém poli $E_g = mgh$, kde g je tíhové zrychlení a h je výška měřená nad nějakou dohodnutou hladinou, vzhledem ke které tuto energii počítáme.
- Polohová potenciální energie v radiálním gravitačním poli $E_G = -G\frac{mM}{r}$, kde m je hmotnost jednoho tělesa v gravitačním poli toho druhého s hmotností M a r je vzdálenost jejich těžišť. Může se jednat o hmotné body či objekty se sféricky symetricky rozloženou hustotou. V tomto případě je jako nulová hladina zvolena nekonečná vzdálenost středů r .
- Polohová potenciální energie v elektrickém poli $E_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r}$, kde q je náboj jednoho tělesa v elektrostatickém poli toho druhého s nábojem Q a r je opět vzdálenost jejich středů. Opět musí jít o hmotné body nebo o sféricky symetricky rozložené náboje, které

³⁰Pokud toto není splněno, pak II. KZ zákon je buď pouze přibližný nebo není vůbec použitelný. Zajímavou soustavou jsou dva měsíce Saturnu – Epimetheus a Janus. Tyto si totiž v průběhu oběhu kolem Saturnu vyměňují své dráhy. Menší část momentu hybnosti soustavy si tak předávají. V tomto případě by platil zákon obvykle dostatečně přesně pro jejich střední hodnoty rychlosti a vzdálenosti. Situace, kdy se již přestává II. KZ používat, je například soustava, ve které máme jedno velmi hmotné těleso, druhé středně hmotné a jedno lehké, které je umístěno do Lagrangeova bodu L_1 či L_2 . Oběh lehkého tělesa je pak řízen oběhem toho středně hmotného kolem centrálního velmi hmotného tělesa.

se nesmí měnit.³¹ Tato potenciální energie je kladná, protože náboje stejného znaménka se odpuzují. Nulová hladina je opět pro nekonečné r .

- Potenciální energie pružnosti $E_p = \frac{1}{2}k\Delta u^2$, kde k je tuhost pružiny a $\Delta u = u - u_0$ je její prodloužení, resp. aktuální délka u bez klidové délky u_0 .
- Klidová energie hmotného tělesa $E_0 = m_0c^2$, kde m_0 je klidová hmotnost tělesa a c je rychlost světla ve vakuu.
- Energie magnetického pole cívky $E_m = \frac{1}{2}LI^2$, kde L je indukčnost cívky a I je elektrický proud jí procházející.
- Energie kondenzátoru $E_e = \frac{1}{2}CU^2$, kde C je kapacita kondenzátoru a U je elektrické napětí.
- Teplota $Q = mc\Delta T$, kde m je hmotnost látky, c její měrná tepelná kapacita a ΔT je změna teploty. Také můžeme psát $C = mc$, kde C je tepelná kapacita tělesa.
- Vnitřní energie látky, například pro jednoatomový ideální plyn platí $U = \frac{3}{2}nRT$, kde n je látkové množství, R je molární plynová konstanta a T je termodynamická teplota. U dvouatomového ideálního plynu se pak konstanta $\frac{3}{2}$ změní na $\frac{5}{2}$.
- Energie kvanta záření $E_p = h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν je frekvence fotonu.
- Energie elektrického a magnetického pole, energie elektromagnetického záření.
- Chemická energie vazeb v molekulách, ionizační energie prvků či excitační a deexcitační energie elektronů.
- Jaderná energie vazeb protonů a neutronů v jádrech, kvarků ve složitějších částicích a další formy energie.

U potenciální energie navíc platí, že její hodnota závisí na předem zvolené konstantě, které říkáme nulová hladina. Důležité je, že tato konstanta nijak neovlivňuje pohybové rovnice. Proto se ji snažíme zvolit tak, aby výsledný výraz byl co nejjednodušší.

ZZ mechanické energie pro ideální kapaliny má podobu Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst},$$

kde p je tlak v kapalině, ρ je její hustota a v je rychlost jejího proudění.

Opět je potřeba si připomenout, že ZZ energie platí pouze pro uzavřené soustavy a že musíme uvažovat všechny formy energie. Při dokonale pružné srážce se energie zachovává. Nejprve se přemění na deformaci tělesa a pak se opět uvolní jako kinetická. Také v případě nepružné srážky se celková energie zachová. Část mechanické energie se však ztratí ve formě nevratné deformace obou těles nebo třeba ve formě zvuku.

Kinetická energie se často v průběhu pohybu disipuje, neboli se přeměňuje na zvuk, teplo apod. Ale v základních výpočtech je vhodné uvažovat, že se mechanická energie zachovává, protože tomu tak v rámci přesnosti výpočtu většinou je. To platí i pro většinu úloh na střední i vysoké škole.

³¹Pokud by nebyly rozmístěné pevně, tak se kvůli přitahování/odpuzování na svých koulích přerozdělí a koule budou následně polarizované. Navíc má smysl mluvit pouze o koulích či o kulových slupkách, protože pokud je náboj pohyblivý a je na jednom tělese, pak se rozmístí po jeho povrchu. Aby byla splněna sférická symetrie, pak musí jít o kouli či kulovou slupku. Navíc se náboje nesmí pohybovat, pak by to nebyla elektrostatika.

Maximální účinnost

Tématem, které s energií úzce souvisí, je, že nemůžeme mít stroj, který by měl vyšší jak 100 % účinnost. Důležitým výsledkem termodynamiky je, že pokud je teplota ohřívače T_{\max} a teplota chladiče je T_{\min} , pak tepelným strojem nemůžeme přesáhnout účinnost tzv. Carnotova cyklu skládajícího se ze dvou adiabatických a dvou izotermických procesů, která je

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Zákon zachování celkové pravděpodobnosti

Zajímavým ZZ, který se může zdát významně odlišným od ostatních, je ZZ celkové pravděpodobnosti. Současně se může zdát triviální, protože je to něco, co se dá považovat za logické a tak nějak zřejmé. Celkový součet pravděpodobností všech možností, které mohou nastat, je vždy roven 1. ZZ pravděpodobnosti využíváme v kvantové fyzice, ve statistické fyzice nebo v teorii her.

Zákon zachování elektrického náboje

Pokud je nám dobře známo, zatím nebylo nikdy pozorováno narušení ZZ elektrického náboje. Ten se zachovává při všech reakcích. Navíc jediné násobky, které má smysl používat, jsou třetiny elementárního náboje $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-16}$ C, protože kvarky mají náboje o velikosti právě třetiny či dvou třetin této hodnoty.

Neexistence magnetického náboje

Tento ZZ jsme zařadili možná trochu netradičně. Ale doposavad je to jeden z těch nejpevnějších a platí bez jakýchkoliv omezení. Oproti ZZ náboje je ještě silnější – nejenom, že se zachovává celkový magnetický náboj, ale dokonce je jeho hodnota nulová. Všechny siločáry magnetického pole jsou buď uzavřené, nebo směřují od nekonečna do nekonečna.

V literatuře je možné najít tzv. „magnetické množství“. Magnetismus je pak modelován pomocí rozmístění tohoto „magnetického množství“, které je ovšem ve formě dipólů – tedy vždy je kladná hodnota množství rozmístěna v blízkosti stejného záporného množství. Pro vybrané aplikace to může být vhodná aproximace, i když to není přesné řešení.

Zákony zachování a symetrie v mikrosvětě

Ve většině fyzikální dějů můžeme uvažovat, že probíhají stejně, pokud zaměníme znaménko náboje (C), tedy nahradíme částice za antičástice nebo zaměníme vývoj systému za jeho zrcadlový obraz (P), tedy otočíme paritu a nebo otočíme směr toku času (T). Při částicových experimentech se ale ukázalo, že tyto symetrie neplatí vždy. Konkrétně slabá interakce narušuje každou z těchto symetrií, když je uvažujeme jednotlivě. Kombinovaná symetrie CPT³² se však, jak se zdá, zachovává vždy. To by mělo souviset s tím, že máme právě tři rodiny kvarků a leptonů.

V mikrosvětě pozorujeme zachovávání dalších typů „nábojů“ jako ZZ baryonového čísla, leptonového čísla, podivnosti, půvabu atd. Ale slabá interakce může některé z těchto „zákonů“ narušovat.

³²Tedy tím myslíme, že provedeme všechny tři záměny najednou – náboje, parity i času.

Co entropie?

Entropie je veličina, která bývá nepřesně označována za míru neuspořádanosti systému. Možná o něco přesnější je považovat ji za určitou míru rozmazanosti systému. Protože čím jsou v systému ostřejší rozhraní, tím je vlastně uspořádanější, a tedy s nižší entropií. Tato veličina je zajímavá tím, že s časem v uzavřeném systému neklesá. Sice jsme na začátku zmiňovali, že „rozumné“ veličiny se zachovávají, ale pro entropii to neplatí. Další populární tvrzení je, že právě směr růstu entropie nám ukazuje šipku času.

Jaká je budoucnost zákonů zachování?

Mohlo by se zdát, že všechny základní ZZ známe. Ale těžko říct, jestli je to pravda. Už před časem si vědci mysleli, že většina fyziky je hotová věc a že je potřeba dořešit jenom pár detailů. Těchto pár detailů vedlo k rozvoji kvantové fyziky a teorie relativity. Jedním z hlavních cílů dnešní vědy je spojit tyto dvě teorie dohromady, abychom dostali co neúplnější popis vesmíru. Ale kdo ví, co nám další roky základního výzkumu přinesou?

V současnosti pokračují debaty nad tím, jestli platí ZZ informace. Už vůbec definice toho, co přesně informace je, jak může vzniknout a jak bychom si mohli představit její zničení, je zdaleka nad úroveň tohoto seriálu. Ale určitě je to zajímavé téma pro další výzkum. Populární verze jednoho pohledu na informaci je taková, že i když nějaké těleso „spadne“ do černé díry, tak se informace, kterou neslo, zachová na povrchu černé díry. Současně zvětšení plochy povrchu horizontu událostí černé díry má právě takovou velikost, která odpovídá dané informaci. Otázkou je, jestli se díky Hawkingově záření informace opět uvolní nebo jestli dojde k jejímu „smazání“.

Tipy pro řešení úloh

Fyzikální úloha je zpravidla systém o n neznámých. K jejich určení potřebujete právě n nezávislých rovnic. Pokud víme, že se nějaká fyzikální veličina zachovává, získali jsme tím jednu rovnici. Pokud zároveň dokážeme všechny zachovávající se veličiny vyjádřit bez přidání nové neznámé, jsme o krok blíže k vyřešení úlohy.

Například, uvažujme dokonale pružnou srážku dvou těles o známých hmotnostech a známých počátečních rychlostech. Zbývá určit výsledné rychlosti obou těles, což jsou dvě proměnné. Potřebujeme tak dvě rovnice – ZZ hybnosti a ZZ mechanické energie.

Užitečnost ZZ spočívá v tom, že se díky nim nemusíme zabývat průběhem děje. Stačí nám zajistit, aby daná veličina měla na začátku a na konci stejnou hodnotu – složité výpočty popisující, co se děje uprostřed, pak můžeme zcela vynechat.

Do této kategorie spadají úlohy typu určení, do jaké výšky vystoupá těleso, necháme-li ho bez tření klouzat po rampě ve tvaru dolního kopečku funkce sinus. Mohli bychom složitě počítat výslednice sil a řešit pohybové rovnice, ale jestliže nás zajímá pouze výsledná poloha tělesa, stačí použít ZZ potenciální tíhové energie.

V úvodu bylo zmíněno, že pokud se veličina v nezachovává, musí se buď ztrácet, nebo se hromadit. Dokážeme-li vyjádřit míru této změny za čas \dot{v} (tečka označuje derivaci podle času),

můžeme ZZ zobecnit do podoby

$$v_2 = v_1 + \int_1^2 \dot{v} dt,$$

kde v_1 , resp. v_2 je počáteční, resp. koncové množství dané veličiny. Předchozí příklad bychom mohli modifikovat o tření. To však závisí pouze na skalárním součinu tíhové síly, kterou těleso působí na podložku, a normály na podložku. Žádná z těchto veličin však nezávisí na čase, čili můžeme zavést zobecněnou potenciální energii, která bude brát v úvahu ztráty způsobené třením. V tomto případě se už nevyhneme integrování, ale stále nemusíme řešit pohybové rovnice.

V některých případech veličina zůstává konstantní proto, že co ze systému za nějaký čas zmizí, musí se v něm během stejné doby vytvořit. Tento princip je známý jako rovnice kontinuity a má široké uplatnění v úlohách z hydromechaniky a elektrostatiky. Typickým příkladem je odvození Coulombova zákona z Gaussova elektrostatického zákona – zachovávající se veličinou je intenzita elektrického pole, zdrojem je elektrický náboj a úbytkem je myšlen „tok“ siločar přes okraje zvolené oblasti.

V informatických a matematických úlohách bývají ZZ označovány jako invarianty. Chytrě zvolený invariant často vede k překvapivě snadnému řešení, jak ukazuje známá úloha se šachovnicí, ze které vyřízneme dva protější rohy. Přitom se ptáme, jestli je možné zbytek šachovnice dokonale pokrýt pomocí obdélníkových dlaždic, které zabírají vždy dvě sousední políčka. Invariantem je v tomto případě rozdíl zakrytých černých a bílých polí – snadno nahlédneme, že položení dlaždice tuto veličinu nezmění. Na počátku však má však hodnotu 0, protože ještě není nic zakryto. Stejnou hodnotu musí mít i na konci, jenže na naší upravené šachovnici je o dvě políčka jedné barvy méně než té druhé. Tím jsme dokázali, že hledané pokrytí neexistuje.

Závěr a upoutávka na příště

V tomto dílu seriálu jsme prošli základní zákony zachování v přírodě. Obecně bývají dobrým způsobem řešení úloh v uzavřených soustavách a díky nim můžeme vybrané parametry dopočítat velice rychle. Příští díl bude věnovaný elektrickým obvodům, sítím a také elektrostatičce. Zabrousíme ale i do nekonečných problémů, jejichž řešení může být daleko přímočařejší a rychlejší než u těch konečných.

*Pořadí řešitelů po II. sérii*

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	,,	%	4%	%	Σ
-------	-------	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	---	----	---	---

Kategorie druhých ročníků

jméno

škola

1 2 3 4 5 P E S II „%“% Σ

Kategorie třetích ročníků

jméno

škola

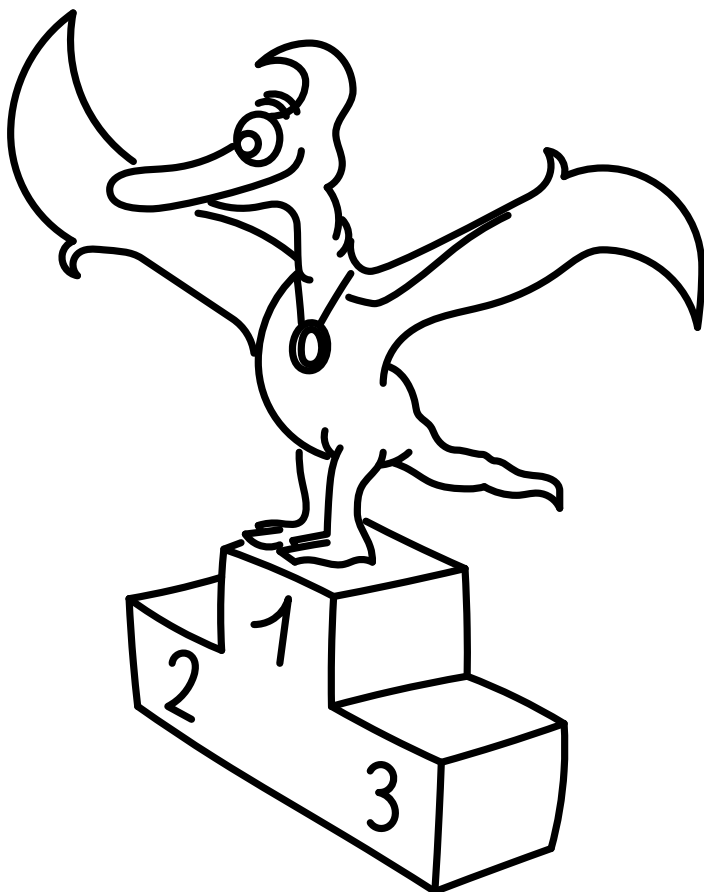
1 2 3 4 5 P E S II „%“% Σ

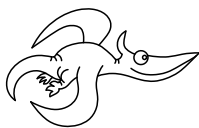
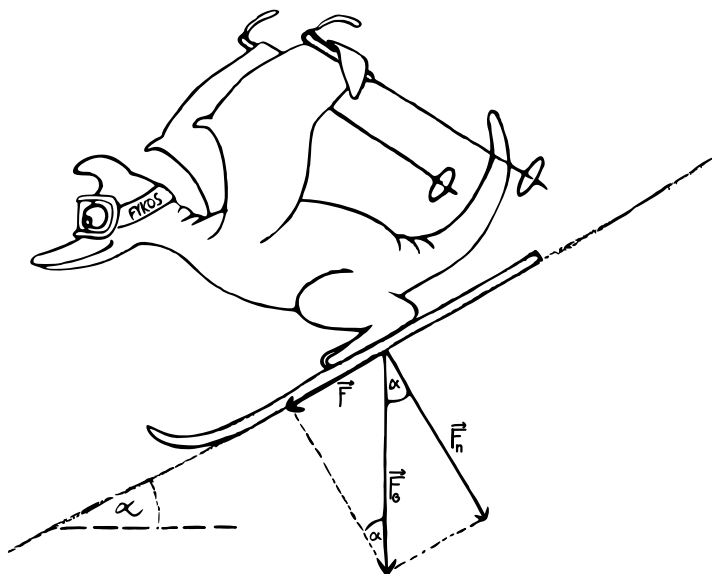
Kategorie čtvrtých ročníků

jméno

škola


1 2 3 4 5 P E S II „%“% Σ





FYKOS
 UK, Matematicko-fyzikální fakulta
 Ústav teoretické fyziky
 V Holešovičkách 2
 180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.