

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

je tu rok 2020 a s ním i nová série FYKOSu. Ať už jste si dali novoroční předsevzetí jakákoliv, doufáme, že budete pokračovat v řešení semináře. Co vás čeká za úlohy?

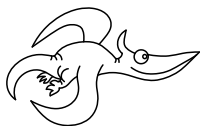
Ve čtvrté sérii vyrazíme na vesmírnou procházku, proletíme se letadlem nebo dokonce zkusíme navigovat Jáchyma. V problémové úloze vypočítáme, jak moc jsme tím zatížili planetu. Jako experiment se budeme točit na improvizované houpačce a v seriálové úloze si budeme hrát s elektřinou. Pokud to všechno přečkáte ve zdraví, budeme se těšit na vaše řešení.

Nezapomeňte se přihlásit na Fyziklání 2020! Pokud vás baví řešit úlohy v týmech (doufáme, že to nepraktikujete při řešení FYKOSu) nebo se prostě jen chcete setkat s kamarády ze soustředění, je to soutěž přesně pro vás! Fyziklání se koná v pátek 14. 2. 2020 v Praze, o víkendu po soutěži vás jako loni čeká bohatý doprovodný program. Více informací zjistíte na stránkách soutěže fyziklani.cz.

Omlouváme se za chybějící body a řešení k problémové úloze a chybějící body ke čtvrté úloze. Po Vánocích je tak těžké najít motivaci... Co nejrychleji se objeví na našem webu.

Hodně štěstí do nového roku přejí

Organizátoři



Zadání IV. série

Termín uploadu: 11. 2. 2020 23.59

Termín odeslání: 10. 2. 2020

Úloha IV.1 ... čibonaut

3 body

Máme kosmonauta s hmotností M , který se v beztížném stavu vznáší ve vzdálenosti l od stěny vesmírné stanice. Najednou se rozhodne, že těžké náradí s hmotností m , které dosud držel v ruce, hodí po stanici ve směru kolmém na její stěnu. V jaké vzdálenosti od stěny kosmonaut bude, až do ní náradí narazí?

Úloha IV.2 ... Machovo číslo

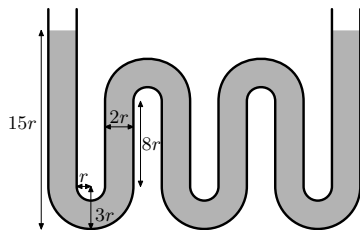
3 body

Letadla jsou ve vysokých hladinách letu řízena pomocí Machova čísla. Tato veličina vyjadřuje rychlost v násobku rychlosti zvuku v daném prostředí. Rychlost zvuku ve vzduchu se ovšem s výškou mění. Jaký je rozdíl mezi rychlostí letu letadla letícího při Machově čísle 0,85 ve dvou různých letových hladinách FL 250 (7 600 m) a FL 430 (13 100 m)? V jaké hladině je rychlost vyšší a o kolik kilometrů za hodinu? Závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na teplotě můžeme s dostatečnou přesností popsat vztahem $c = (331,57 + 0,607 \{t\}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, kde t je teplota ve stupních Celsia. Uvažujte standardní atmosféru, ve které klesá teplota s výškou od 0 do 11 km od 15 °C o 0,65 °C na každých 100 m až k teplotě $-56,5$ °C, která je pak konstantní až do 20 km nad střední hladinou moře.

Úloha IV.3 ... uuu-trubice

5 bodů

Jakou periodu malých kmitů bude mít voda ve skleněné trubici na obrázku? Uvažujte pokojovou teplotu a normální tlak a předpokládejte, že voda je dokonale nestlačitelná.

**Úloha IV.4 ... optický fykosák**

8 bodů

Pták Fykosák našel na Matfyzu nehlídanou optickou lavici, která umožňuje rozmístit různé pomůcky podél optické osy, a začal si s ní hrát. Na osu umístil postupně bodový zdroj světla, první čočku, druhou čočku a stínítko se stejnými rozestupy (vzdálenost stínítka od zdroje je tedy třikrát větší než vzdálenost jakýchkoli dvou sousedních pomůcek). Na stínítku se vytvořil ostrý obraz zdroje. Fykosák potom celou soustavu ponořil do neznámé kapaliny, kterou našel v podivném kanystru. K jeho úžasu zůstal obraz na stínítku stále ostrý. Určete index lomu této kapaliny, jenž je určitě jiný než index lomu vzduchu, který můžete považovat za jednotkový. Jedna z čoček má desetkrát větší ohniskovou vzdálenost než druhá a obě jsou tenké a vyrobené z materiálu o indexu lomu 2.

Úloha IV.5 ... zkratka napříč časem

9 bodů

Jáchym se nachází v dvoudimenzionálním kartézském prostoru v bodě $J = (-2a, 0)$. Chce se co nejrychleji dostat do bodu $T = (2a, 0)$, který se (naštěstí) nachází ve stejném prostoru. Jáchym se zásadně pohybuje rychlostí o velikosti v . Aby to nebylo tak jednoduché, prostorem vede pojízdný pás ve tvaru přímky, procházející body $(-3a, 0)$ a $(0, a)$, po kterém se Jáchym pohybuje celkovou rychlostí kv . Pro jaké minimální $k \geq 1$ se Jáchymovi vyplatí jít po pásu?

Úloha IV.P ... klimatické změny feat. letadla

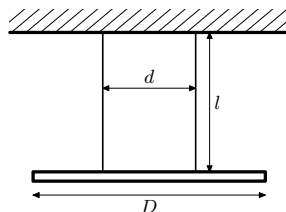
10 bodů

Létání letadlem ovlivňuje atmosféru nejen dobře známými emisemi uhlíku. Diskutujte, jaký vliv má letecký průmysl na oteplování atmosféry Země.

Úloha IV.E ... torzní kyvadlo

12 bodů

Vezměte si alespoň 40 cm dlouhou homogenní tyčku. Ve dvou bodech symetricky vůči jejímu středu k ní přidejte dva závěsy ze stejného materiálu (například nit nebo vlasec), které dále upevníte k nějakému pevnému stativu tak, aby měly stejnou délku a aby byly rovnoběžné. Změřte periodu torzních kmitů tyčky v závislosti na vzdálenosti závěsů d pro různé délky závěsů l a určete, o jakou závislost na těchto dvou parametrech se jedná. Torzní kmity vypadají tak, že se tyčka otáčí ve vodorovné rovině, přičemž její střed zůstává v klidu.

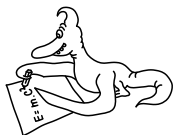


Úloha IV.S ... elektro todleto

10 bodů

1. Jak velký je odpor mezi sousedními vrcholy n -dimenzionálního drátěného „čtyřstěnu“? Každá hrana má odpor R . Začněte výpočtem pro $n = 1$ (úsečka), $n = 2$ (trojúhelník) a $n = 3$ (čtyřstěn) a následně najděte obecný vztah.
2. Jaké umístění a velikost bude mít zrcadlový elektrický náboj k přímce s homogenní délkovou hustotou náboje λ , která je umístěna ve vzdálenosti $r > R$ od středu uzemněného dutého nekonečně dlouhého válcového vodiče o poloměru R ? Válcový vodič a přímka jsou rovnoběžné.
3. Mějme nekonečnou rovinu s plošnou hustotou náboje σ_1 . Té se téměř dotýká kulová slupka s poloměrem R a s plošnou hustotou náboje σ_2 . Jaký musí být vztah mezi uvedenými veličinami, aby v místě, kde jsou k sobě deska se slupkou nejbližší, byla intenzita elektrického pole nulová?

Bonus Jaká je intenzita gravitačního pole uvnitř a vně planety o poloměru R , jejíž hustota závisí pouze na vzdálenosti od středu r podle vztahu $\rho = \rho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$?



Řešení III. série

Úloha III.1 ... fontána s vodotryskem

3 body; průměr 2,52; řešilo 83 studentů

Mějme fontánu s N tryskami stejného průřezu, které jsou napájeny jediným čerpadlem. Z trysky tryská voda do výšky h . Do jaké výšky bude voda tryskat, pokud zakryjeme všechny trysky kromě jedné? Čerpadlo má konstantní průtok. *Lukáš experimentoval na náměstí.*

Vodu můžeme považovat za nestlačitelnou kapalinu. Dále víme, že je čerpadlo schopno dodávat konstantní průtok. Pak musí být průtok tryskami v obou případech stejný, a tedy platí

$$NSv_N = Sv_1,$$

kde S je průřez jedné trysky, v_N je rychlost průtoku tryskou při všech tryskách odkrytých a v_1 je rychlost průtoku tryskou při jedné odkryté trysce.

Ze zákona zachování energie získáme vztah mezi rychlostí průtoku tryskou a výškou, do které voda tryská

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu v_N^2 &= \mu gh, \\ v_N &= \sqrt{2gh}, \\ v_1 &= \sqrt{2gh_1}, \end{aligned}$$

kde μ je hmotnost zvoleného elementu vodního paprsku.

Hledaný vztah pro výšku výtrysku při jedné odkryté trysce tedy je $h_1 = N^2h$.

Lukáš Tímko
lukast@fykos.cz

Úloha III.2 ... boom

3 body; průměr 2,34; řešilo 67 studentů

Nad hlavou nám přeletěla stíhačka letící rovnoměrným pohybem vodorovně se zemským povrchem. Za $t = 1,50$ s na to jsme uslyšeli sonický třesk v okamžiku, kdy měla stíhačka zenitovou vzdálenost $\vartheta = 30,0^\circ$. Zjistěte, jak vysoko nad námi stíhačka přeletěla.

Bonus Z jakého směru jsme třesk slyšeli a jak daleko se toto místo nachází od místa, kde stíhačku vidíme? *Dodo se „teší“ na letecké dny.*

Za telesom pohybujícím sa nadzvukovou rýchlosťou v vzniká kuželovitá rázová vlna s vrcholovým uhlom $\sin \alpha = \frac{c}{v}$, kde c je rýchlosť zvuku v prostredí. Zo znalosti zenitovej vzdialenosti v okamihu začutia tresku máme

$$v = \frac{c}{\sin \alpha} = \frac{c}{\cos \vartheta}$$

Lietadlo preletelo vzdialenosť $d = vt$, teda pre jeho výšku h nad zemou máme z pravouhlého trojuholníka

$$h = \frac{d}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{vt}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{ct}{\sin \vartheta} = 1,02 \text{ km},$$

kde sme použili rýchlosť zvuku $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tá sa však medzi lietadlom a pozorovateľom mení, preto je presná analýza problému náročnejšia.

Bonus Zvuková vlna sa šíri kolmo na vlnoplochy, preto sme zvuk začuli zo smeru o 90° pred miestom, kde vidíme lietadlo, v momente, keď k nám dorazil sonický tresk. Toto miesto sa teda nachádza v zenitovej vzdialenosti 60° na opačnej strane, ako vidíme stíhačku. Vzdialenosť týchto dvoch miest je približne $s = h(\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg}(90^\circ - \vartheta)) \doteq 2,4 \text{ km}$.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha III.3 ... paraplíčko

5 bodů; průměr 4,48; řešilo 56 studentů

Určitě jste si již všimli, že když umístíte lžičku pod proud vody (například při mytí nádobí), vytvoří jakýsi vodní hříbek. Pro zjednodušení uvažujte, že lžička je rovná a má kruhový tvar malého poloměru. Po umístění kolmo do středu proudu vody (jehož poloměr je ještě menší) padající z klidu z výšky h nad dnem umyvadla vytvoří krásný rotační paraboloid. Spočítejte, do jaké výšky musíme lžičku dát, aby voda dopadala co nejdále od osy původního proudu (dno umyvadla je vodorovné). Uvažujte, že voda je ideální kapalina (nestlačitelná, neviskózní, bez vnitřního tření).

Bonus Najděte výšku umístění lžičky, při které voda vytvoří „přístřešek“ s co největším objemem. *Matěj umýval nádobí.*

Zásadním faktem, který je třeba si uvědomit, je, že voda při dopadu mění pouze směr a neztrácí přitom žádnou energii (tedy rychlost). To platí pouze v idealizovaném případě dokonalé kapaliny. Ve skutečnosti by dopad vody na lžičku nemusel být dokonale pružný a nějaká energie bude přeměněna na teplo. Jelikož neuvažujeme zakřivení lžičky, bude voda opouštět lžičku pouze s horizontální složkou rychlosti (voda proudí rovnoměrně do všech směrů rovnoběžných s povrchem lžičky).

Výšku lžičky nad dnem umyvadla si označíme proměnnou x . Voda pak dopadá na lžičku z výšky $h - x$ rychlostí

$$v = \sqrt{2g(h - x)},$$

což vyplývá ze vztahů pro volný pád. Jelikož při dopadu není ztracena žádná energie, bude se voda po dopadu pohybovat stále rychlostí v , přičemž pouze změní směr ze svislého na vodorovný. Po opuštění lžičky začne konat vodorovný vrh z výšky x počáteční rychlostí v . Na dno dopadne za čas

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

a dopadne tedy do horizontální vzdálenosti

$$y = vt = 2\sqrt{x(h-x)}$$

od místa, kam dopadá voda před umístěním lžičky. Hledáme tedy taková x , při kterém nabývá výraz pod odmocninou maximální velikosti a voda tedy dopadne nejdále. Výraz $x(h-x)$ je kvadratická funkce s nulovými body x a h , proto je její maximum v bodě $x = h/2$. Lžičku tedy musíme umístit přesně do poloviny výšky mezi dnem a kohoutkem.

Bonus

Bonus řešíme podobným způsobem jako předchozí příklad, akorát je potřeba spočítat objem pod rotačním paraboloidem. Zanedbáme přitom poloměr lžičky, abychom mohli paraboloid jednodušeji parametrizovat. Paraboloid popíšeme tak, že najdeme funkci, která popisuje horizontální vzdálenost od jeho osy (tedy od přímky, která prochází původním proudem vody tekoucím z kohoutku) v závislosti na výšce od dna. Proměnnou označující výšku od dna označíme z ¹. Funkci udávající horizontální vzdálenost y od kohoutku můžeme psát jako $y(z) = 2\sqrt{(h-x)(x-z)}$. Objem pod paraboloidem vypočítáme podle vzorce pro výpočet objemu rotačních křivek. Využijeme větu, která říká, že objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu spojité funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x , je dán vztahem

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

V našem případě po dosazení dostáváme

$$V = \pi \int_0^x (y(z))^2 dz = 4\pi \int_0^x (h-x)(x-z) dz = 2\pi(h-x)x^2.$$

Nyní jsme se zbavili proměnné z . Dále hledáme maximum $V = 2\pi(h-x)x^2$ na intervalu od 0 do h . K tomu využijeme derivaci podle x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(h-x)x^2 &= 0, \\ -x^2 + 2(h-x)x &= 0, \\ x &= 2(h-x), \\ x &= \frac{2}{3}h. \end{aligned}$$

¹Proměnná x označuje výšku lžičky, kterou jsme již určili, z značí výšku, ve které měříme vzdálenost vodní stěny od osy.

Při úpravách jsme vypustili řešení $x = 0$, které zřejmě neodpovídá maximu. Maximální objem dostaneme při zdvihnutí lžičky do výšky $\frac{2}{3}h$.

Zde jsme se setkali s trochu neintuitivní idealizací. Předpokládáme totiž, že lžička je hodně malá, abychom při výpočtu objemu paraboloidu mohli uvažovat, že lžička je pouhým bodem v jeho vrcholu. Kdybychom nezanedbávali rozměr paraboloidu, museli bychom počítat objem komplikovanějšího geometrického tělesa - jakéhosi pseudoparaboloidu s plošinkou namísto špičky.

Zároveň však předpokládáme, že dopadající proud vody má mnohem menší poloměr než lžička, aby voda ze lžičky vycházela vodorovně. Kdyby byl proud vody srovnatelný se lžičkou, mohlo by se stát, že by ho lžička dokonale nerozptýlila do horizontálního směru a vycházel by od lžičky směrem k zemi pod jistým úhlem.

Zajímavé je, že něco je velmi malé a něco jiného (v našem případě proud vody) může být ještě velmi menší v porovnání s tou velmi malou věcí (lžičkou). S takovými idealizacemi se ve fyzice potkáte ještě často.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha III.4 ... beruška na gumě

8 bodů; (chybí statistiky)

Beruška leze rychlostí $4 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Když ji postavíme na gumu 40 cm dlouhou, přežije ji za 10 s. Co když ale v okamžiku, kdy beruška začne lézt, začneme gumu natahovat tak, že se její délka bude zvětšovat rychlostí $5 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$? Může dolézt na konec? Pokud ano, jak dlouho jí to bude trvat? Guma se roztahuje rovnoměrně a nikdy se nepřetrhne. *Matěj koukal na Vsauce.*

Na první pohled se beruščina cesta může zdát nekonečná. Jak by se mohla dostat na druhý konec, když se tento konec pohybuje vyšší rychlostí? Zkusme to spočítat.

Rychlost pohybu berušky vůči gumě si označíme v' a rychlost natahování gumy si označíme u . Počáteční délka gumy je l . V čase t bude délka gumy $l' = l + ut$. Guma se tím jakoby „zředí“ v poměru l'/l – pokud v tomto okamžiku beruška urazí vzdálenost x' , v tomto úseku bude obsažena pouze vzdálenost

$$x = \frac{l}{l'}x' = \frac{l}{l+ut}x'$$

z původní gumy. Rychlost je přímo úměrná uražené dráze, takže rychlost berušky vůči původní gumě bude podobně

$$v = \frac{l}{l+ut}v'.$$

Hodnota v' je konstantní, zatímco v konstanta není. To vede na jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dt} = \frac{l}{l+ut}v'.$$

Rovnici lze řešit například separací proměnných. Stačí zintegrovat pravou stranu podle času a dostaneme

$$x = \int_0^t \frac{l}{l+ut}v'dt = \left[\frac{lv'}{u} \ln\left(\frac{l}{u} + t\right) \right]_0^t = \frac{lv'}{u} \ln\left(1 + \frac{ut}{l}\right).$$

O přirozeném logaritmu víme, že je to rostoucí funkce a že jde v limitě do nekonečna. Proto vidíme, že ať si na gumě zvolíme jakoukoli konečnou vzdálenost, beruška ji vždy urazí v konečném čase.

Hledáme okamžik, ve kterém beruška doleze na konec gumy, tedy kdy bude platit $x = l$. Z rovnice pro vzdálenost výše si vyjádříme čas

$$t = \frac{l}{u} \left(e^{\frac{u}{v^2}} - 1 \right).$$

Řešení zřejmě existuje pro libovolné kladné hodnoty l , v a u . Pro ty ze zadání vychází $t \doteq 20$ s. Fyzikální analogii k tomuto příkladu můžeme najít například v rozpínání vesmíru, ve kterém fotony cestují konstantní rychlostí. Kdyby se vesmír rozpínal také stále stejnou rychlostí, tak by k nám teoreticky v konečném čase doletěly fotony z libovolné vzdálenosti a my bychom tak jednou mohli vidět celý vesmír (pokud je konečný). Problém je ale v tom, že rozpínání vesmíru konstantní není a tak existuje hranice, za kterou vůbec nikdy nedohlédneme.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha III.5 ... hustota pravděpodobnosti vody

9 bodů; průměr 4,12;

řešilo 33 studentů

Představme si nádrž, ze které neustále vodorovně vytéká proud vody s konstantním obsahem průřezu. Rychlost proudu však náhodně kolísá s rovnoměrným rozdělením od v_1 do v_2 . Po vytečení z nádrže voda volně padá na vodorovnou podlahu níže. Najděte libovolnou oblast podlahy, do které dopadne přesně 90 % vody.

Další z řady úloh, které Jáchyma napadly na záchodě.

Ze zadání je zřejmé, že oblast dopadu vody je úsečka. Zavedme proto souřadnici x , měřenou od bodu přímo pod výtokem vody z nádrže. Výšku výtoku nad zemí označme h . Nechť funkce $x(v)$ popisuje souřadnici bodu, do kterého dopadnou částice vody s rychlostí výtoku v . Potom platí

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \\ x(v) = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

kde jsme čas pádu vody označili t . Vidíme, že x je rostoucí funkce, takže krajními body úsečky, na kterou dopadá voda, jsou $x_1 = x(v_1)$ a $x_2 = x(v_2)$.

Nyní si zdefinujeme funkci $f(x)$ tak, aby platilo, že mezi body x a $x + dx$ dopadne přesně $f(x)dx$ z celkového množství vody. Je nasnadě, že platí

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 1. \quad (1)$$

Označme $v(x)$ inverzní funkci k $x(v)$. Potom do intervalu souřadnic $\langle x, x + dx \rangle$ dopadne voda z intervalu rychlostí $\langle v(x), v(x + dx) \rangle$. To představuje část

$$\frac{v(x + dx) - v(x)}{v_2 - v_1} = \frac{((x + dx)\sqrt{\frac{g}{2h}} - x\sqrt{\frac{g}{2h}})}{v_2 - v_1} = \frac{dx}{v_2 - v_1} \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

z celého intervalu rychlostí. Musíme však vzít v úvahu, že množství vody, které z nádrže za nějaký okamžik vyteče, je přímo úměrné rychlosti vody. Podíl vody v intervalu rychlostí tak

ještě musíme vynásobit rychlostí vody $v(x)$ (kterou pro dostatečně malé dx můžeme pro tento účel považovat za konstantní v celém intervalu), čímž získáme poměrnou část množství vody, které dopadá do intervalu dx , neboli

$$f(x)dx \propto \frac{v(x)(v(x+dx) - v(x))}{v_2 - v_1} = \frac{xdx}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h}.$$

Musí být splněna podmínka (1), takže hledáme normovací konstantu

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x)(v(x+dx) - v(x))}{v_2 - v_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h} = \frac{g(x_2^2 - x_1^2)}{4h(v_2 - v_1)}.$$

Po dosazení za x_1 a x_2 máme

$$A = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(v_2 - v_1)}.$$

Funkce f je ve tvaru

$$f = \frac{1}{A} \frac{xdx}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h} = \frac{gx}{h(v_2^2 - v_1^2)}.$$

Hledaný interval už nyní snadno zkonstruujeme. Označme $n = 0,9$. Potom hledáme také x_0 , pro které platí

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x) dx = n.$$

Řešení integrálu vede na rovnici

$$n = \int_{x_1}^{x_0} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_0} \frac{gxdx}{h(v_2^2 - v_1^2)} = \frac{g(x_0^2 - x_1^2)}{2h(v_2^2 - v_1^2)}$$

a pro x_0 platí

$$x_0 = \sqrt{\frac{2nh(v_2^2 - v_1^2)}{g} + x_1^2} = \sqrt{\frac{2h}{g}(nv_2^2 + (1-n)v_1^2)}.$$

Do intervalu od x_1 do x_0 dopadne 90% vody. Pro úplnost dodejme, že toto řešení je samozřejmě pouze jedno z nekonečně mnoha možných.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha III.E ... husté měření

12 bodů; průměr 8,40; řešilo 42 studentů

Sestavte si hustoměr, např. pomocí brčka a plastelíny, a změřte pomocí něj, jak závisí hustota vody na koncentraci rozpuštěné soli.

Tekutý Matěj.

Úvod

Předmětem úlohy bylo vyrobit v domácích podmínkách hustoměr a změřit hustoty vodných roztoků kuchyňské soli v závislosti na jejich koncentraci. Hustoměr je měřicí přístroj fungující na základě Archimedova zákona, v hustějších kapalinách se ponoří méně. Běžný hustoměr vypadá tak, že vespod se nachází závaží a nahoru vyběhá dlouhá dutá trubice se stupnicí. Po vhození do kapaliny se zorientuje svisle a tam, kde rovina hladiny protíná stupnici, odečteme hustotu kapaliny. Aby hustoměr fungoval správně, musí splňovat dva protichůdné požadavky:

- Spodní část hustoměru musí být co nejtěžší, aby se těžiště nacházelo co nejnižší. Čím níže je položeno těžiště, tím větší rozpětí hustot jsme schopni měřit.
- Průměrná hustota hustoměru nesmí překročit hustotu měřené kapaliny.

Zastavme se u prvního bodu. Představme si, že jsme hustoměr ponořili do kapaliny s vysokou hustotou. Větší část hustoměru vyčnívá nad hladinu. Působíště vztlakové síly se nachází v geometrickém středu ponořené části. Pokud by měl hustoměr vysoko položené těžiště, pak by se těžiště ocitlo nad působíštěm vztlakové síly a svislá poloha by pravděpodobně² nebyla stabilní.

Výroba hustoměru

Pro výrobu hustoměru jsme použili brčko s velkým průměrem. Je totiž vhodné, abychom získali co největší „dutý“ objem. Jako závaží jsme použili šroubek. Parametry použitého hustoměru jsou v tabulce 1. Při výpočtu průměrné hustoty jsme tvar hustoměru aproximovali válcem.

Tab. 1: Vlastnosti hustoměru.

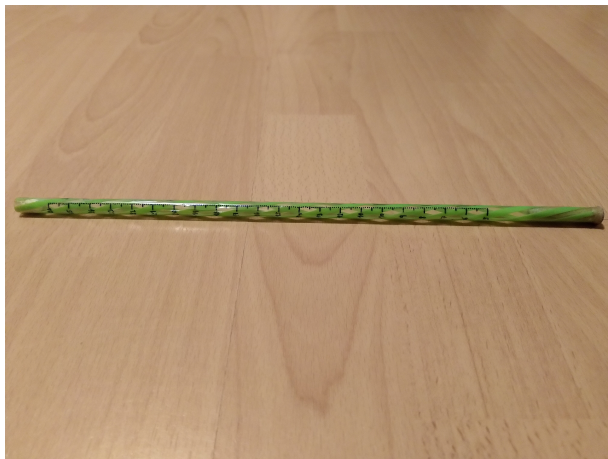
hmotnost	$m_h = (8,845 \pm 0,005) \text{ g}$
vnější průměr brčka	$r = (3,71 \pm 0,06) \text{ mm}$
výška	$l = (28,3 \pm 0,1) \text{ cm}$
průměrná hustota	$\rho_h = (723 \pm 24) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Nejobtížnější částí bylo nalezení lepidla, které pevně spojí kov s plastem a vydrží ve vodě. Použili jsme Chemoprén. Šroubek jsme přilepili na spodek hustoměru a také jsme zalepili otevřený vršek brčka, aby do něj náhodou nezatekla kapalina.

Na brčko jsme lihovým fixem nanесли stupnici v centimetrech. Stupnici jsme přelepili průhlednou izolepou kvůli ochraně³ před setřením.

²Vyhledejte si pojem „metacentrum“. I v případě, že se působíště vztlakové síly nachází pod těžištěm, může být hustoměr/plavidlo stabilní. Záleží, jak se posouvá působíště vztlakové síly při naklání tělesa. V závislosti na konstrukci může mít vzniklý moment sil tendenci vracet plavidlo do původní polohy. Troufáme si ale tvrdit, že vysoká štíhlá konstrukce hustoměru bude nestabilní.

³Později se projevil i jeden nezamýšlený pozitivní efekt. Jednou ze dvou kalibračních kapalin byl totiž líh a nápisy psané lihovým fixem jsou samozřejmě rozpustné v lihu. Izolepa tak uchránila stupnici před smytím.



Obr. 1: Námí zkonstruovaný hustoměr.

Teorie

Měřicí stupnici nejdříve zkalibrujeme pomocí dvou kapalin se známou hustotou a poté u neznámých kapalin přepočítáme údaje odečtené v centimetrech na hustotu. Díky tomu, že brčko má po celé délce konstantní plochu průřezu S , bude existovat jednoduchý přepočet polohy na hustotu. Předpokládejme, že jsme hustoměr ponořili do dvou kapalin se známými hustotami ρ_1 a ρ_2 , přičemž na stupnici jsme odečetli polohy h_1 a h_2 . Z Archimédova zákona vyplývá

$$\rho V_0 g + \rho_1 S h_1 g = \rho_2 V_0 g + \rho_2 S h_2 g = m_h g, \quad (2)$$

kde V_0 je objem části hustoměru pod začátkem stupnice. Z rovnice (2) můžeme vyjádřit poměr

$$\frac{V_0}{S} = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (3)$$

Se znalostí poměru V_0/S už snadno dopočítáme hustotu ρ každé kapaliny

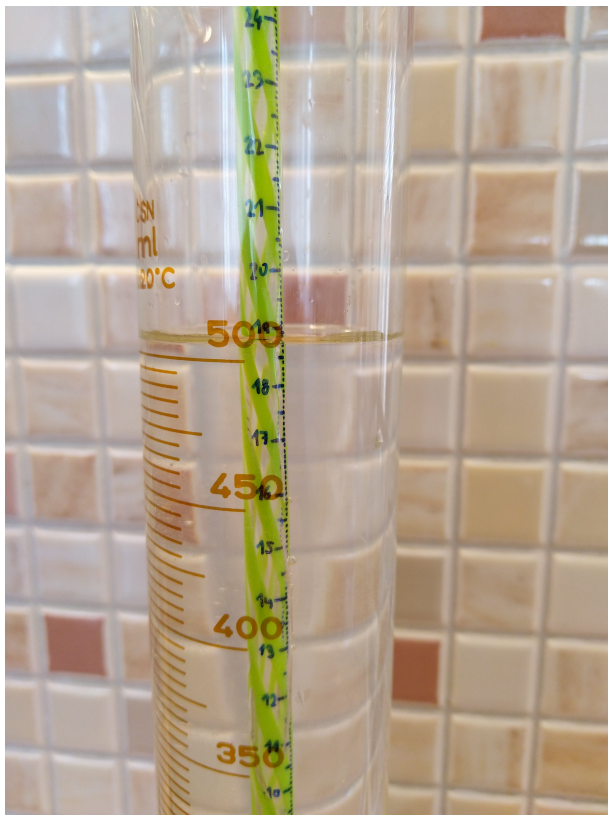
$$\begin{aligned} \rho V_0 g + \rho S h g &= \rho_1 V_0 g + \rho_1 S h_1 g = \rho_2 V_0 g + \rho_2 S h_2 g, \\ \rho &= \frac{\frac{V_0}{S} + h_1}{\frac{V_0}{S} + h} \rho_1 = \frac{\frac{V_0}{S} + h_2}{\frac{V_0}{S} + h} \rho_2. \end{aligned}$$

Po dosazení za V_0/S ze vztahu (3) vychází

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2 (h_1 - h_2)}{\rho_1 (h_1 - h) + \rho_2 (h - h_2)}. \quad (4)$$

Koncentraci solného roztoku určíme jako

$$w = \frac{m_s}{m_s + m_v}, \quad (5)$$



Obr. 2: Použití hustoměru.

kde m_s resp. m_v jsou hmotnosti soli resp. vody v roztoku. Při teplotě 20°C je rozpustnost kuchyňské soli $35,86\text{ g}$ na 100 g vody, nasycený roztok má tedy koncentraci $26,39\%$ ⁴.

Závislost hustoty roztoku na koncentraci se nedá teoreticky spočítat, musí se určit experimentálně. Tabulková data⁵ ukazují, že růst hustoty s koncentrací je přibližně lineární (viz graf 3).

Měření

Měření hustoty kapalin jsme prováděli v odměrném válci. Potřebovali jsme totiž dostatečně hlubokou nádobu, aby se hustoměr neopíral o dno, která přitom musela mít co nejmenší objem, abychom omezili spotřebu soli.

Nejdříve jsme pomocí dvou kapalin se známou hustotou zkalibrovali hustoměr. Konkrétně se jednalo o vodu s hustotou $\rho_v = (996,5 \pm 0,5)\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a denaturovaný líh s hustotou $\rho_l =$

⁴Možná jste si vzpomněli na Mrtvé moře, které má salinitu 30 až 35% v závislosti na období. Tak vysoká salinita je umožněna tím, že v Mrtvém moři jsou rozpuštěny i jiné soli než chlorid sodný.

⁵http://old.pglbc.cz/files/chemie/hustoty_roztoku.pdf

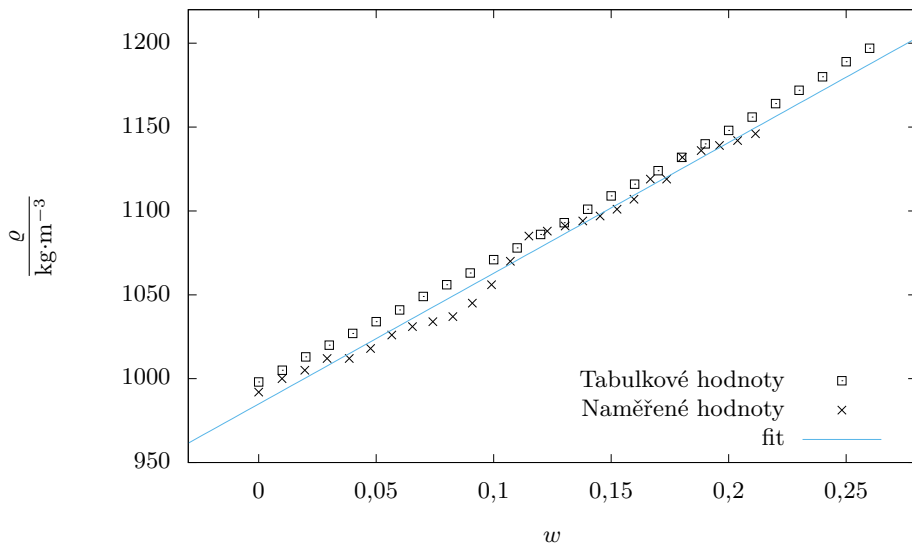
$= (801,5 \pm 0,4) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Hladiny kapalin protly na stupnici polohy $h_v = (18,66 \pm 0,06) \text{ cm}$ a $h_l = (23,45 \pm 0,07) \text{ cm}$.

Poté jsme měřili hustoty solných roztoků. Do vody o hmotnosti $(500 \pm 1) \text{ g}$ jsme přisypávali sůl po pětigramových dávkách. Když množství soli překročilo 110 g , začali jsme přisypávat sůl po šesti gramech. Kvůli rychlejšímu rozpouštění jsme krystalky kuchyňské soli nadrtili v hmoždíři. Po vysypání soli do vody jsme roztok zamíchali. Když se hladina ustálila, vložili jsme do roztoku hustoměr a odečetli jsme polohu na stupnici. Poté jsme přisypali další dávku soli. Většina soli se díky drcení na jemné krystalky rozpustila okamžitě, avšak na dně odměrného válce se v průběhu experimentu navršila hromádka, která se nerozpustila ani po mnoha hodinách.

Hodnoty v centimetrech ze stupnice hustoměru jsme přepočítali na hustoty podle vztahu (4). Naměřené hodnoty jsou v tabulce 2. Závislost hustoty na koncentraci soli jsme vynesli do grafu 3. Proložili jsme ji lineární funkcí $\rho = aw + b$ a vyšlo nám

$$a = (780 \pm 20) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3},$$

$$b = (985 \pm 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$



Obr. 3: Naměřená závislost hustoty roztoku na koncentraci soli v porovnání s tabulkovými hodnotami.

Diskuze

V grafu 3 můžeme porovnat tabulková data s naměřenými hodnotami. Vidíme, že námi naměřené hodnoty netvoří krásnou přímkou, avšak závislost proložená pomocí metody nejmenších čtverců se podobá teoretické předpovědi.

Tab. 2: Naměřené hodnoty h na stupnici hustoměru pro různé hmotnosti rozpuštěné soli m_s .
Z nich jsme spočítali hustoty roztoků ρ a jejich koncentrace w pomocí vztahů (4) a (5).

$\frac{m_s}{\text{g}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{w}{\%}$	$\frac{\rho}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}$
0	18,75	0,0	992
5	18,60	1,0	1 000
10	18,50	2,0	1 005
15	18,35	2,9	1 012
20	18,35	3,8	1 012
25	18,25	4,8	1 018
30	18,10	5,7	1 026
35	18,00	6,5	1 031
40	17,95	7,4	1 034
45	17,90	8,3	1 037
50	17,75	9,1	1 045
55	17,55	9,9	1 056
60	17,30	10,7	1 070
65	17,05	11,5	1 085
70	17,00	12,3	1 088
75	16,95	13,0	1 091
80	16,90	13,8	1 094
85	16,85	14,5	1 097
90	16,80	15,3	1 101
95	16,70	16,0	1 107
100	16,50	16,7	1 119
105	16,50	17,4	1 119
110	16,30	18,0	1 132
116	16,25	18,8	1 136
122	16,20	19,6	1 139
128	16,15	20,4	1 142
134	16,10	21,1	1 146
140	16,00	21,9	1 152

Vidíme, že hustoty solných roztoků vypočtené z naměřených dat jsou obecně nižší než teoretické hodnoty. To může být způsobeno tím, že ne všechna sůl se rozpustila (hromádka na dně zmíněná v sekci *Měření*). Malé množství nerozpuštěné soli by mohlo vysvětlit rozdíl mezi referenčními hodnotami a naším experimentem. Tento vliv však nemůžeme kvantifikovat, protože jsme neměřili velikost hromádky nerozpuštěné soli (bylo by to velmi obtížné).

Další z možných jevů, které mohly způsobit podhodnocení experimentálních výsledků vzhledem k tabulkovým, je závislost hustoty na teplotě. Tabulkové hodnoty totiž platí pro solné roztoky při teplotě 20°C. Teplotu jsme sice neměřili, odhadujeme však, že byla vyšší než 20°C, přibližně mezi 20 a 25°C. Vyšší teplota vyústí v nižší hustotu roztoku. Malá změna teploty sice nemůže vysvětlit celý pozorovaný rozdíl, může být však jedním z vlivů, které jej způsobily.

Teplota roztoku se při rozpouštění soli sama zvyšuje, protože se přitom uvolňuje energie⁶ asi $H = 3,88 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Odchyly naměřených hodnot od lineární závislosti přičítáme hlavně nedokonalosti hustoměru a nepřesnostem v odečítání ze stupnice. Toto odčítání navíc komplikovalo povrchové napětí, které okolo hustoměru vytvářelo meniskus, jehož výška navíc závisela na koncentraci soli. Při ponoření hustoměru na něj působil tlak vody, což mohlo dutou trubici a vzduch v ní stlačit a tím zmenšit její objem. Náš hustoměr byl ale z poměrně tvrdého plastu, proto nepředpokládáme, že by tento efekt měl výraznější vliv na výsledky našeho měření.

Závěr

Hustotu solného roztoku ρ v závislosti na koncentraci soli w jsme v intervalu $w \in \langle 0, 0, 22 \rangle$ určili jako $\rho = ((779 \pm 20)w + (985 \pm 2)) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha III.S ... vzduchová pistole podrobně

10 bodů; průměr 6,55;

řešilo 66 studentů

Máme vzduchovou pistoli o hmotnosti $M = 1,3 \text{ kg}$. Vystřelíme z ní diabolku (náboj), která má hmotnost $m = 0,50 \text{ g}$ a průměr $d = 4,5 \text{ mm}$.

1. Jakou kinetickou energii bude mít náboj po výstřelu, když podle technické specifikace dosáhne rychlosti $v = 250 \text{ fps}$ (tedy 250 stop za sekundu)?
2. Jaký bude zpětný ráz pistole? Zajímá nás jak rychlost, kterou by se zbraň pohybovala, kdyby nebyla upevněná, tak její hybnost.
3. Jak se změní moment hybnosti Země, pokud vystřelíme ze zbraně rovnoběžně se zemským povrchem? Zajímají nás okamžiky, kdy měla maximální hybnost a potom, když dopadla a zcela se zastavila. Pro jednoduchost uvažujte, že zbraň je pevně spojená se Zemí (která je zcela kulatá) a že zbraň při výstřelu nezačala rotovat. Jakou úhlovou rychlost Země získá či ztratí?
4. Jaký je spodní odhad maximálního zrychlení střely, pokud se náboj v první čtvrtině hlavně urychlí na 90 % maximální rychlosti? Vnitřní délka hlavně je $D = 18 \text{ cm}$.
5. Náboj jsme vstřelili do kousku plastelíny o hmotnosti $m_p = 42 \text{ g}$, který je zavěšený na tenkém provázku délky $l = 48 \text{ cm}$. Pokud by náboj v plastelíně uvízl, jaká by byla maximální úhlová výchylka tohoto kyvadla?
6. Může náboj při nárazu na lidskou pokožku překročit hodnotu plošné dopadové energie $Q_{\max} = 50 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$?

Bonus Nakonec se nám experiment s kyvadlem nepodařil a plastelínu jsme prostřelili. Naměřili jsme poloviční výchylku kyvadla, než jsme původně očekávali. Jaká byla výstupní rychlost náboje z plastelíny? Předpokládejte, že při průchodu plastelínou náboj nezmění směr a ani nic z plastelíny neodnese s sebou.

Karel chtěl hlouběji rozebrat standardní úlohu.

⁶jde o tzv. solvatační entalpii <https://www.toppr.com/bytes/hydration-energy/>

Kinetická energie

Nejprve převedeme rychlost na základní jednotky. Jedna stopa má dle definice 30,42 cm. Hodnota 250 fps tedy odpovídá rychlosti $v = 76,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Kinetickou energii pak snadno vypočteme jako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \doteq 1,45 \text{ J}.$$

Energie střely je maximálně 1,5 J, což je odpověď na první otázku. Takovou vzduchovku si můžete v České republice pořídit i bez zbrojního pasu.

Zpětný ráz

Další otázka se týká zpětného rázu. Hybnost, kterou získá kulka, je

$$p = mv \doteq 0,038 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Stejnou hybnost, pouze opačného směru, získá i zbraň. To vyplývá ze zákona zachování hybnosti. Z toho můžeme určit velikost rychlosti zbraně V , pokud by byla volná

$$p = mv = MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}v \doteq 0,029 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Zpětný ráz vzduchové pistole je tedy zhruba $3 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ opačného směru, než vyletí náboj.

Moment hybnosti Země

Při počítání momentu je zcela zásadní rozhodnout se, vůči jaké ose ho chceme určit. Jelikož nás zajímá změna rychlosti rotace Země, dává smysl jej počítat vůči ose procházející zemským těžištěm. Hybnost p , kterou jsme spočítali výše, je kolmá na poloměr Země $R_Z = 6378 \text{ km}$. Změna momentu hybnosti potom bude

$$L = pR_Z = mvR_Z \doteq 2,4 \cdot 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}.$$

To vypadá jako docela vysoká hodnota. Podívejme se však, jaké úhlové rychlosti rotace Země to odpovídá. Moment setrvačnosti zeměkoule s hmotností $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je

$$J_Z = 2M_ZR_Z^2/5.$$

Maximální úhlová rychlost, kterou Země získá či ztratí, bude

$$\omega = \frac{L}{J_Z} = \frac{5mvR_Z}{2M_ZR_Z^2} = \frac{5mv}{2M_ZR_Z} \doteq 2,5 \cdot 10^{-33} \text{ s}^{-1}.$$

Tato hodnota je tak nízká, že by se těleso s touto úhlovou rychlostí neotočilo ani jednou od vzniku vesmíru.

Urychlení střely

Dráha, na které se má náboj urychlit, je $D/4$. Za tu dobu má nabrat rychlost $0,90v$. Aby bylo zrychlení minimální, musí být zároveň konstantní. Pokud by nebylo, pro dosažení stejné rychlosti by muselo být nějakou chvíli vyšší.

Dobu urychlování si označme jako t . Pak můžeme psát, že pro dráhu platí $D/4 = at^2/2$ a pro rychlost $0,90v = at$, kde a je hledané rovnoměrné zrychlení. Dosazením jedné rovnice do druhé dostáváme

$$t = \frac{D}{1,8v} \doteq 1,3 \text{ ms},$$

$$a = \frac{1,62v^2}{D} \doteq 5,2 \cdot 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Pokud bychom uvažovali, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, pak by se náboj urychloval po dobu $1,3 \text{ ms}$ zrychlením $52 \text{ km}\cdot\text{s}^{-2}$. Ve skutečnosti je však zrychlení značně nerovnoměrné a proto bude jeho maximální hodnota v průběhu výstřelu značně vyšší.

Plastelínové kyvadlo

Nejprve dojde ke vstřelení náboje do plastelíny, což můžeme považovat za dokonale nepružnou srážku. Při ní se zachovává pouze hybnost a část kinetické energie se přemění na jiné formy energie. Označíme-li rychlost spojené střely a plastelíny po srážce jako w , bude platit

$$mv = (m + m_p)w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{m}{m + m_p}v \doteq 0,90 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Kinetická energie kyvadla se potom bude postupně přeměňovat na potenciální energii dle zákona zachování mechanické energie. Kyvadlo vystoupí o h výše v tíhovém poli s tíhovým zrychlením g . Dostáváme

$$\frac{1}{2}(m + m_p)w^2 = (m + m_p)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{w^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(m + m_p)^2} \doteq 4,1 \text{ cm}.$$

Výšku výstupu pak můžeme pomocí pravoúhlého trojúhelníku převést na úhel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l-h}{l}\right) = \arccos\left(1 - \frac{m^2v^2}{2gl(m + m_p)^2}\right) \doteq 0,416 \text{ rad} \doteq 23,8^\circ.$$

Kyvadlo by se po vstřelení náboje mělo vychýlit o $23,8^\circ$. Poznamenejme, že jsme zanedbali hmotnost závěsu a že jsme kyvadlo považovali za hmotný bod.

Nyní se podívejme na zajímavější variantu, kterou se zabýval bonus. S plastelínou jsme to nějak nedomysleli a podařilo se nám ji prostřelit. Pro nový rozdíl výšek platí

$$h_2 = l\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nyní využijeme identitu

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

a dostaneme

$$h_2 = l \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \right) = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{2l}} \right).$$

Dosadíme vstupní veličiny

$$h_2 = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 v^2}{4gl(m + m_p)^2}} \right) \doteq 1,0 \text{ cm}.$$

Do této výšky vystoupí pouze plastelína – tentokrát již ne s nábojem. Ze zákona zachování mechanické energie vyplývá

$$m_p g h_2 = \frac{1}{2} m_p w_2^2,$$

kde w_2 je rychlost, kterou plastelína získala po prostřelení nábojem. Platí pro ni

$$w_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 v^2}{4gl(m + m_p)^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq 0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hybnost, která byla odebrána střele, je $p_2 = m_p w_2$. Rozdíl hybností bude

$$mv_2 = mv - m_p w_2.$$

Z něj už snadno určíme výstupní rychlost náboje

$$v_2 = v - \frac{m_p}{m} w_2 = v - \frac{m_p}{m} \sqrt{2gl} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 v^2}{4gl(m + m_p)^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tato hodnota je zhruba poloviční vůči maximální. Je ovšem vidět, že závislost je složitější. Pro jiné uspořádání tak nejspíš nebude platit, že poloviční úhel odpovídá zhruba poloviční rychlosti.

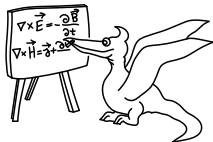
Nebezpečnost zbraně

Hodnoty dopadové energie střely vyšší než $Q_{\max} = 50 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$ považují soudní znalci za odpovídající potenciálněmu smrtelnému účinku. Proto jsme se ptali právě na tuto hranici. Jedná se o energii dopadající střely vydělenou jejím průřezem. Ten považujeme za kruhový s plochou $S = \pi d^2/4$. Maximální energii dostaneme z maximální rychlosti střely

$$Q = \frac{E_k}{S} = \frac{2mv^2}{\pi d^2} \doteq 9,1 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Pokud převedeme plošnou energii na stejnou jednotku, dostáváme $9,1 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$. Tato vzduchová pistole se do limitu Q_{\max} vejde. Mohli byste ale mít vzduchovou pušku, která vystřeluje 3,2krát rychlejší náboje, pro kterou stále nemusíte mít zbrojní pas, protože se vejde do 16 J. Při stejné velikosti a hmotnosti nábojů by pak ale dosáhla $100 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$. Takže byste potenciálně měli problém u soudu s vysvětlováním toho, že jde o malý náboj, který obvykle kůži neprotrhne.

Karel Kolář
karel@fykos.cz



Seriál: Elektro-triky

Úvod

Tento díl seriálu je zaměřený na tipy a triky pro řešení elektrických obvodů a některých úloh v elektrostatice. Začneme ale s obecným řešením nekonečných problémů, které se může hodit i jinde. Ukážeme si, že je možné využít Gaussův zákon i v gravitačním poli, pouze s jinými konstantami. Ačkoli je ústředním tématem tohoto dílu elektřina, rozhodně to není jediné téma.

Pro další čtení doporučujeme knihovničku Fyzikální olympiády. Těchto témat se týkají zejména M. Jarešová: *Elektrické obvody (Stejnoseměrný proud)*⁷ a P. Šedivý: *Obvody střídavého proudu s lineárními jednobrany a dvojbřany*.⁸

Matematické hrátky s nekonečnem

Než se vrhneme na samotné nekonečné obvody, mohli bychom se podívat na matematickou stránku věci. Uvědomme si základní princip, který se v těchto úlohách uplatňuje a díky kterému jsou tyto úlohy daleko jednodušší než stejné úlohy s konečným počtem prvků. Když už se vám něco „stejně zopakuje“ třikrát či čtyřikrát, začnete si snad sami časem říkat: „Proč to tam raději není nekonečněkrát?“

O jaký princip jde? Pokud máme něco nekonečněkrát, tak je to to samé, jako když to máme nekonečněkrát a ještě jednou.⁹ Možná to stále zní docela divně. Proto se podívejme na nějaké matematické příklady. Jakou hodnotu má například tato nekonečná soustava odmocnin?

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Na první pohled těžko říct. Mohli bychom zkusit postupně čím dál tím více konečných prvků. Tedy můžeme začít

$$x_1 = \sqrt{1} = 1, \quad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2} \doteq 1,414, \quad x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \doteq 1,554.$$

Tato metoda může vést ke správnému výsledku, pokud řada konverguje. Jinak řečeno, pokud se limitně blíží k nějakému konkrétnímu číslu. Je ale vidět, že jde o hodně pracný způsob. Také jen těžko odhadneme, jaké by mělo být přesné řešení úlohy pro nekonečné množství prvků. Pokud bychom pokračovali dále, po osmém kroku bychom zjistili, že při zaokrouhlení na čtyři platné cifry nám už výsledek zůstává stejný. Ale těžko ověříme, zda to bude platit pro nekonečně mnoho dalších prvků této řady. Můžeme použít kalkulačku, ale ta také brzy přestane stačit.

Trikové řešení spočívá v tom, že si uvědomíme, že můžeme psát

$$x = \sqrt{1 + x},$$

⁷<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>

⁸<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>

⁹Případně ještě dvakrát. Nebo znovu konečně-krát. Dokonce i nekonečně-krát. Ale při výpočtech si to nebudeme zbytečně komplikovat, většinou je nejrychlejší přidat si právě jeden prvek.

což je skrytá kvadratická rovnice. Tu brisně vyřešme

$$x^2 = 1 + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Protože odmocnina je definována jako kladné číslo, správným řešením bude kořen $s +$ (v případě opačné definice by řešením byl kořen $s -$). Výsledkem je tedy $x = (1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1,618$. Toto číslo se nazývá *zlatý řez*, obvykle se značí φ a najdeme jej na mnoha místech v přírodě.

Stejný postup můžeme použít například u nekonečných řetězových zlomků

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{1}{1 + y},$$

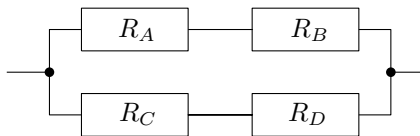
$$y^2 + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

V tomto případě vyhovují obě řešení. Nicméně, pouze to $s +$ je stabilní. Sami si vyzkoušejte, že při malé výchylce se řešení $s +$ po několika iteracích opět vrátí k původní hodnotě, zatímco řešení $s -$ bude čím dál tím víc kolísat. Správné řešení je podmíněno tím, že k němu výraz konverguje, když jde počet zlomků do nekonečna. To splňuje pouze $y = (\sqrt{5} - 1)/2 \doteq 0,618$. Shodou okolností je to opět číslo se vztahem ke zlatému řezu, konkrétně $y = \varphi - 1$ či $y = 1/\varphi$.

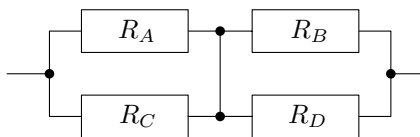
Shodnost potenciálů

Jedním z nejdůležitějších principů pro řešení elektrických obvodů je, že pokud vodičem spojíme dvě místa v obvodu, která mají stejný potenciál, nepoteče mezi nimi žádný proud.

Podívejme se, co to znamená pro podmínku na jedno z nejjednodušších možných uspořádání rezistorů, kterou můžeme mít. Máme dvě varianty zapojení, a to zapojení po dvojicích paralelně (obrázek 4) a druhé, kde přidáme ještě příčku, která nemá odpor (obrázek 5).



Obr. 4: První zapojení.



Obr. 5: Druhé zapojení.

V prvním případě určíme odpor snadno jako

$$R_\alpha = \frac{(R_A + R_B)(R_C + R_D)}{R_A + R_B + R_C + R_D}.$$

V druhém případě je to

$$R_\beta = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_D}{R_B + R_D}.$$

Jak vidíme, obecně nám mohou vyjít různé velikosti celkových odporů. Pokud bychom si ale s výrazem chvíli hráli, tak si uvědomíme, že pokud platí

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_C}{R_D},$$

pak budou výrazy shodné. Tedy například, pokud vyjádříme $R_D = R_B R_C / R_A$ a dosadíme, dostaneme

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{(R_A + R_B)(R_C + R_C \frac{R_B}{R_A})}{R_A + R_B + R_C + R_C \frac{R_B}{R_A}} = \frac{\frac{R_C}{R_A} (R_A^2 + R_A R_B + R_A R_B + R_B^2)}{\frac{1}{R_A} (R_A^2 + R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C)} = \\ &= \frac{R_C (R_A + R_B)^2}{(R_A + R_C)(R_A + R_B)} = \frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_C} = \frac{R_A + R_B}{1 + \frac{R_A}{R_C}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\beta &= \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_C \frac{R_B}{R_A}}{R_B + R_C \frac{R_B}{R_A}} = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_C}{R_A + R_C} = \\ &= \frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_C} = \frac{R_A + R_B}{1 + \frac{R_A}{R_C}}. \end{aligned}$$

Sice jsme podmínku nedostali analytickým postupem, ale pokud ji odhadneme a ověříme, že při ní platí to, co potřebujeme, tak nemusíme řešit, odkud se vzala.

Tuto záměnu, kde si přidáme či odebereme nějaká vodivá spojení, můžeme s výhodou použít především ve složitějších úlohách. Například si jde takto zjednodušit řešení úlohy FYKOSu 22-VI-1¹⁰ kde se určoval odpor n -dimenzionální drátěné krychle mezi nejvzdálenějšími vrcholy.

Převody zapojení trojúhelník – hvězda

V komplexnějších obvodech, kde si nevystačíme s pouhým jednoduchým sériovým a paralelním zapojením, se nám může hodit transformace trojúhelník – hvězda a zpět. O co jde? Pokud máme mezi nějakými třemi uzly v obvodu tři rezistory zapojené do hvězdy (viz obrázek 6), pak toto zapojení je ekvivalentní dobře zvoleným odporům zapojených do trojúhelníku (viz obrázek 7). Pokud si zvolíme označení, kde je rezistor ve straně trojúhelníku označen stejným indexem jako protilehlý paprsek hvězdy, pak se dají vztahy i snadněji zapamatovat.¹¹ Platí

$$R_A = r_B + r_C + \frac{r_B r_C}{r_A},$$

¹⁰https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_6_1.pdf

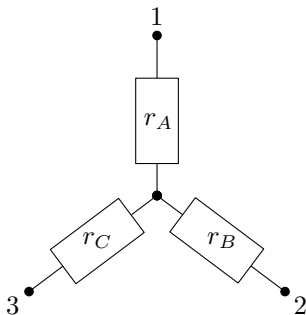
¹¹Například oproti srovnání se vztahy uvedenými v knihovničce FO.

$$r_A = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}.$$

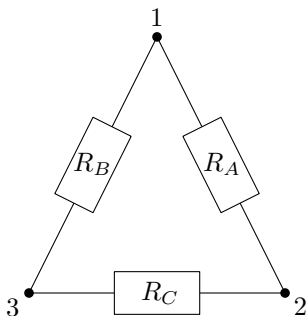
V obou vztazích samozřejmě platí cyklická záměna. Přičemž pro odpory mezi dvěma uzly (např. 1 a 2) máme

$$R_{12} = r_A + r_B = R_C \frac{R_A + R_B}{R_A + R_B + R_C},$$

kde opět platí cyklická záměna (s upgradem, že musíme cyklist i 123).



Obr. 6: Zapojení ve tvaru hvězdy.



Obr. 7: Zapojení ve tvaru trojúhelníku.

Princip superpozice

V elektrických obvodech i v elektrickém poli se uplatňuje princip superpozice, který jsme již zmiňovali. Konkrétní aplikací mohou být nekonečné elektrické sítě. Například čtvercová síť, kde má každý drátek odpor R . Pak je odpor mezi sousedními uzly $R/2$.¹² Pokud máme trojúhelníkovou síť, kde z každého uzlu jde šest hran do sousedních uzlů, odpor mezi sousedními uzly bude analogicky $R/3$.¹³

¹²Viz příklad 8 v Elektrických obvodech v knihovničce FO.

¹³Viz úloha EG ve FYKOSím Fyziklání 2018.

Zrcadlový náboj

Zrcadlový náboj je metoda využívaná v elektrostatice. Použít ji můžeme, pokud umístíme elektrické náboje do blízkosti uzemněné desky. Uzemnění znamená, že je na ní nulový potenciál. Tím, že k ní přiblížíme náboj, způsobíme změnu potenciálu. Deska na to reaguje tak, že ze země přijme či do ní odevzdá elektrony, které na ní opět vynulují potenciál.

Tomuto jevu se říká elektrostatická indukce. Výsledné elektrické pole bude součtem pole původního náboje a pole od indukovaného náboje. Přesný výpočet vypadá velmi obtížně, ale naštěstí máme k dispozici trik. Využijeme toho, že elektrostatické pole je jednoznačně určeno svými okrajovými podmínkami. Jinak řečeno, pokud najdeme pole, které dává na okraji nějaké oblasti takový potenciál, jaký tam má být, našli jsme skutečné pole v dané oblasti.

Nyní si představme dva stejně velké opačné náboje. Snadno spočítáme potenciál výsledného pole. Pokud jeho hodnotu v nekonečnu položíme rovnou nule, zjistíme, že je nulový také v rovině dané body, které jsou od obou nábojů stejně daleko. Tím jsme ale našli pole, které přesně odpovídá nekonečně velké uzemněné desce, neboli rovině s nulovým potenciálem.

Z těchto úvah vyplývá, že když umístíme nad uzemněnou desku bodový náboj, výsledné pole bude součtem pole skutečného náboje a pole od jeho obrazu, tedy od stejně velkému opačného náboje, který se nachází na druhé straně desky, přičemž je od ní stejně daleko. Tento náboj je samozřejmě pouze imaginární, ve skutečnosti je pole generováno nábojem, který se indukuje přímo na desce.

Na základě tohoto můžeme velice jednoduše určit sílu, kterou je náboj přitahován k desce, jako sílu, kterou na sebe působí tyto náboje. Další ukázkou aplikace tohoto principu může být úloha FYKOSu 22-VI-2 – útěk z koule.¹⁴

Oblast na druhé straně desky je ohraničená nekonečnou a deskou. Na celé hranici této oblasti je tak nulový potenciál a to dokážeme triviálně splnit nulovým elektrickým polem. Tím jsme došli k závěru, že nekonečná uzemněná deska dokonale stíní elektrické pole.

Gaussův zákon

Další metodou, kterou použijeme v elektrostatice či v gravitačním poli, je Gaussův zákon. Ten nám dává vztah mezi intenzitou pole vycházející z povrchu nějaké oblasti a náboji uvnitř dané oblasti. Začneme s obecným vztahem pro elektrostatiku ve vakuu¹⁵

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

kde V je námi vybraný objem ohraničený dvourozměrnou plochou, kterou značíme ∂V – takto se obvykle značí hranice množiny.¹⁶ Integrujeme intenzitu elektrického pole \mathbf{E} přes plošné elementy $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, kde \mathbf{n} je normálový vektor k ploše dS . Skalární součin má význam průmětu \mathbf{E} do směru \mathbf{n} . Uvedený vzoreček platí obecně pro libovolně komplikované plochy s tím,

¹⁴https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_6_2.pdf

¹⁵V obecném případě platí

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

kde \mathbf{D} je elektrická indukce, což zohledňuje i nevakuum prostředí.

¹⁶Tedy ∂X je hranice množiny X . Pro X interval to jsou hraniční body počátku a konce intervalu. Kdyby byla množina X čtyřrozměrná, tak by její hranice byla třírozměrná. Integrovat obecně můžeme přes libovolně-rozměrnou množinu, akorát je to ve více rozměrech trochu složitější.

že nesmíte zapomenout na jejich orientaci, tedy že vektor \mathbf{n} míří směrem ven z dané oblasti. Dále Q je celkový elektrický náboj v oblasti a ε_0 je permitivita vakua.

Pro vysoce symetrické problémy si vzorec přepíšeme do zjednodušeného tvaru

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Co znamená ta vysoká symetrie? Potřebujeme vždy vybrat takovou plochu, na které má elektrická intenzita konstantní velikost a zároveň je v každém bodě na tuto plochu kolmá a míří směrem ven z oblasti. Pro názornější vysvětlení si ukážeme pár příkladů. Pokaždé budeme hledat intenzitu elektrického pole na základě známého rozložení nábojů, ale postup lze v případě potřeby samozřejmě otočit.

Příklad – plná homogenně nabitá koule

Představme si, že máme kouli o poloměru R , do které někdo rovnoměrně nastřílel¹⁷ elektrické náboje, které se nemohou hýbat. Koule je tak homogenně nabitá s hustotou náboje ρ . Hledáme intenzitu elektrického pole v celém prostoru.

Všimněme si, že situace je sféricky symetrická. Stejně tak musí být symetrické i elektrické pole. Vektory \mathbf{E} tak musí vždy mířit ve směru přímky procházející středem koule.

Nejdříve uvažujme, že jsme ve vzdálenosti r od středu, kde $r > R$. Představme si kouli s poloměrem r a se středem ve středu nabité koule. Z předchozího pozorování vyplývá, že \mathbf{E} je kolmá na její povrch, zároveň má na něm díky symetrii všude stejnou velikost, označme ji E . Můžeme tak použít zjednodušující vzorec

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Plochu spočítáme jako povrch myšlené koule $S = 4\pi r^2$, dosazením dostáváme

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2},$$

což je Coulombův zákon pro bodový náboj. Vyšlo nám, že pole vně rovnoměrně nabité koule s celkovým nábojem Q je stejné jako pole od bodového náboje Q . To je ale logické – Gaussův zákon říká, že integrál \mathbf{E} přes hranici nějaké oblasti je přímo úměrný náboji uvnitř. Pokud bude náboj sféricky symetrický, integrál se změní na pouhý součin velikosti intenzity a povrchu koule. Potom už nezávisí na konkrétním rozložení náboje – můžeme jej klidně zmenšit do libovolně malé oblasti, například do jednoho bodu.

Podívejme se na zajímavější situaci pod povrchem koule, neboli když $r < R$. V tom případě je sice vzorec pro plochu stále stejný, ale pod touto plochou je menší množství náboje, konkrétně

$$q = \frac{r^3}{R^3} Q.$$

Pro intenzitu tak dostáváme

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

S rostoucí vzdáleností od středu koule roste intenzita elektrického pole lineárně. Je rozumné očekávat, že s rostoucí vzdáleností musí intenzita růst z nulové hodnoty na tu, která odpovídá

¹⁷Technologicky je možné takto do plastu nastřílet relativně dobře definované náboje i do hloubky.

intenzitě na povrchu koule zvnějšku.¹⁸ Dosazením $r = R$ do obou vzorců vidíme, že tento předpoklad je splněn.

Ještě jednou zdůrazněme to, že pokud máme sféricky symetricky nabitou kouli, tak do elektrického pole v libovolném bodě pod jejím povrchem nijak nezasahují vrstvy, které leží ve větší vzdálenosti od středu. Toto tvrzení se dá případně dokázat i pomocí prosté integrace intenzity, ale zdůvodnění na základě Gaussova zákona je mnohem jednodušší.

Příklad – plný homogenně nabitý válec

Označme poloměr válce R a nábojovou hustotu ρ . Pro jednoduchost předpokládejme, že je náš válec nekonečně dlouhý. Potom ze symetrie vyplývá, že vektor \mathbf{E} bude v každém bodě kolmý na osu válce, a tedy i na jeho povrch.

Začneme opět vnějším řešením. Představíme si válec s poloměrem r a s výškou h , který je souosý s nabitým válcem. Opět můžeme použít jednodušší verzi Gaussova zákona, kde tentokrát za plochu dosadíme povrch pláště $S = 2\pi rh$. Náboj, který je uzavřen myšleným válcem, je $Q = \pi R^2 h \rho$. Dostáváme tak

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{R^2 \rho}{2r\varepsilon_0}.$$

Intenzita elektrického pole klesá přímo úměrně s rostoucí vzdáleností od středu nabitého válce. Analogicky můžeme prozkoumat vnitřní oblast

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}.$$

Intenzita uvnitř také roste lineárně se vzdáleností od středu, obdobně jako u plné koule. Možná, že se nekonečný válec může zdát jako sci-fi, ale v případě, že zkoumáme chování nabitě částice v blízkosti nabitého klasického drátěného vodiče, jde o dobré přiblížení.

Příklad – nekonečně rozlehlá rovnoměrně nabitá rovina

Představme si nekonečně rozlehlou a přitom velice tenkou nabitou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Zajímá nás, jaká bude intenzita elektrického pole v celém prostoru (kromě samotné tenké desky). Vzhledem k tomu, že jde o plošnou nábojovou hustotu, rovnou tušíme, že zde nastane skoková změna intenzity. Jako oblast pro Gaussovu větu si opět zvolíme váleček, který umístíme tak, že jeho hlavní osa bude kolmá k rovině (takže podstavy budou rovnoběžné s rovinou). Zároveň budeme chtít, aby váleček procházel deskou. Když si, obdobně jako u nekonečného válce, uvědomíme, že skrz plášť válečku nemůže téct žádná elektrická intenzita, pak je jasné, že záleží jenom na podstavách. Označíme-li plochu podstavy S , bude ve válci celkový náboj $Q = S\sigma$. Pro elektrickou intenzitu dostáváme

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Při výpočtu jsme si zvolili směr intenzity od desky, a to na obou stranách. Vzpomeňme si, že orientaci plochy (resp. vektoru \mathbf{n}) jsme si definovali jako kladnou, pokud mířila směrem ven z oblasti. Na každé straně je směr ven z válce stejný jako směr od desky, což je směr elektrické intenzity. Opět jsme tak mohli použít jednodušší verzi Gaussovy věty.

¹⁸Intenzita elektrického pole obecně nemusí být spojitá. Každá nespojitost je však způsobena plošnými náboji, které v tomto případě nemáme.

Vyšlo nám, že elektrické intenzity mají na obou stranách stejnou velikost, ale opačný směr. To je opět způsobeno symetrií – obě strany musí být vůči sobě zrcadlově převrácené. Celkový „skok“ v intenzitě tak bude

$$\Delta E = 2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Pokud bychom desku umístili do prostoru s homogenním elektrickým polem \mathbf{E}_0 , výsledné pole bude součtem vnějšího pole \mathbf{E}_0 a pole desky. Tím se naruší symetrie a výsledná intenzita už nebude na obou stranách stejně velká. Důležité ale je, že skok v intenzitě zůstane zachován.

Dále si všimněme, že výsledek nezávisí na vzdálenosti od desky. To je dáno tím, že jde o 2D nekonečnou desku umístěnou v 3D prostoru. Tok se tedy se vzdáleností nemůže nijak zředit, na rozdíl od toku od bodového náboje či od nekonečného válce.

Pokud bychom chtěli, tenkou desku bychom mohli nahradit deskou konečné tloušťky s homogenním nábojem o hustotě ρ a tím odstranit skok v intenzitě. Získali bychom tím spojitou změnu intenzity uvnitř desky. Tato situace se dá použít jako aproximace pole v blízkém okolí nabitých vodivých těles, uvnitř vodiče se náboje mohou volně pohybovat, a tedy se náboj umístí jen na jeho povrchu. Navíc uvnitř vodivého tělesa je elektrické pole nulové, je právě odstíněné indukovanými náboji na svém povrchu. V blízkosti povrchu je tedy pole právě σ/ϵ_0 kolmé k povrchu vodiče.

Poznámka k analogiím

Elektrostatické pole je ekvivalentní¹⁹ gravitačnímu poli. Vztahy pro sílu jsou analogické. Jediný podstatný rozdíl je v tom, že zatím každá známá látka má hmotnost, která se navzájem přitahuje, kdežto elektrický náboj může být kladný i záporný. Kvůli tomu také nelze odstínit gravitační pole, ale elektrické odstínit můžeme. Další rozdíly jsou pak už jenom v konstantách a v tom, že „gravitační náboj“ a konstanta úměrnosti mezi silou a zrychlením je ta samá veličina (hmotnost), zatímco u elektrického pole se jedná o dvě různé veličiny. Jinak můžeme používat všechno, co se naučíme pro jedno pole, také v druhém.

Gaussův zákon pro gravitační pole má tvar

$$\int_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM,$$

kde \mathbf{K} je intenzita gravitačního pole, G je gravitační konstanta a M je celková hmotnost uvnitř naší oblasti. Pracujeme s ním stejně jako s elektrostatickou verzí.

Analogie se nám pak mohou hodit k řešení úloh. Například mechanické kmitání a vlnění je analogické elektromagnetickému kmitání a vlnění.

Závěr a upoutávka na příště

Probrali jsme několik vztahů, které lze použít při řešení úloh s elektrickými obvody či v elektrostaticce. Také jsme si vysvětlili základní smysl Gaussova zákona. Při řešení úloh nezapomínejte dodržovat to, co jsme si řekli v prvním dílu seriálu – zaokrouhlovat správně, dávat odpovědi na otázky ze zadání, snažit se o grafickou úpravu. V příštím díle se podíváme na extrémny. Většinu fyzikálních problémů lze totiž převést na hledání extrémů. Například soustavy „chtějí“ zaujmout stav s nejnižší energií nebo světlo se vždy pohybuje po dráze s extrémním časem.

¹⁹Alespoň, co se klasické fyziky týká.



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pílný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		6	6	5	8	9	10	12	10	66	100	55	198
1. Tomáš Patsch	Slovanské G, Olomouc	6	8	6	–	3	–	12	8	43	86	36	132
2. Jakub Hadač	G V. Hlavatého, Louny	2	6	–	–	–	–	9	9	26	70	23	83
3. Pavel Provažník	G Dašická, Pardubice	6	2	6	–	9	–	6	8	37	55	23	82
4. Martin Kysela	G, Český Krumlov	6	8	5	–	–	–	6	6	31	65	22	80
5. David Bálek	G Legionářů, Příbram	6	8	–	–	–	–	–	–	14	80	22	79
6. Barbora Čemanová	G, Park mládeže, Košice	4	2	–	–	–	–	8	5	19	66	21	76
7. David Mendl	G P. de Conbertina	6	2	6	–	–	–	7	–	21	77	16	60
8. Martin Švanda	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	16	57
9.–10. Dominik Blaha	G, Uherské Hradiště	6	8	5	–	–	–	–	–	19	100	10	38
9.–10. Jan Cícha	Gymnázium Brno-Bystrc	2	2	–	–	–	–	–	3	7	44	10	38
11.–12. Otomar Miskolczi	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	9	34
11.–12. Juraj Pavolko	G, P. Horova, Michalovce	6	2	5	–	–	–	–	–	13	83	9	34
13. Dalibor Očenášek	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	8	29
14. Ladislav Vávra	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	6	24
15.–16. Michaela Jarošová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	6	23
15.–16. Michael Křivan	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	6	23
17. Sandeep Kandi	IMSA, Aurora, USA	6	2	4	–	2	–	6	–	20	53	5	20
18.–20. Andrej Bružeriák	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	5	18
18.–20. Vojtěch Pluskal	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	5	18
18.–20. Matúš Páll	G Christiana Dopplera, Praha	2	–	–	–	–	–	–	–	2	44	5	18
21. Anna Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	4	17
22.–23. Jonáš Dej	Wichterlovo G, Ostrava	6	4	5	–	–	–	–	–	15	88	4	15
22.–23. Tadeáš Ďurčanský	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	34	4	15
24. Daniel Franc	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	3	13
25.–26. Adam J. Jerhot	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košiče	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
25.–26. Julie Křimská	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
27. Aleš Chaloupka	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
28. Michaela Jarošová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	3	3	30	1	3
29. Anna Hýžová	Wichterlovo G, Ostrava	–	2	–	–	–	–	–	–	2	33	0	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“%	Σ
		6	6	5	8	9	10	12	10	66	100	198
1. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	8	5	–	9	–	11	10	49	<i>93 40</i>	146
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	6	6	–	3	–	11	9	41	<i>91 39</i>	140
3. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	6	4	5	–	3	–	8	6	32	<i>81 31</i>	114
4. <i>Jáchym Mraček</i>	Akademické G, Praha	2	8	6	–	–	–	12	6	34	<i>66 28</i>	102
5.–6. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	6	8	6	–	3	–	–	10	33	<i>85 26</i>	94
5.–6. <i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	6	4	5	–	1	–	–	8	24	<i>68 26</i>	94
7. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	6	4	4	–	3	–	7	5	29	<i>54 24</i>	88
8. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	6	2	5	–	3	–	–	4	20	<i>57 24</i>	86
9. <i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	6	–	–	–	–	7	11	30	<i>65 23</i>	85
10. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	6	6	–	–	–	–	7	7	26	<i>59 22</i>	81
11. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	2	2	6	–	7	–	10	5	32	<i>62 22</i>	80
12. <i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	6	8	5	–	–	–	12	7	38	<i>85 21</i>	76
13. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	2	8	–	–	2	–	5	4	21	<i>49 20</i>	74
14.–15. <i>Ondřej Grohmann</i>	G, Olomouc-Hejčín	6	6	–	–	–	–	–	4	16	<i>58 18</i>	66
14.–15. <i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	2	4	5	–	–	–	7	4	22	<i>51 18</i>	66
16. <i>Marek Brodský</i>	G Jiřího z Poděbrad, Po- debrady	6	2	1	–	1	–	–	5	15	<i>52 18</i>	65
17. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	6	8	6	–	–	–	–	11	31	<i>94 17</i>	61
18. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	6	6	4	–	–	–	–	–	16	<i>87 15</i>	55
19. <i>Jakub Jedlička</i>	G Christiana Dopplera, Pra- ha	2	2	2	–	–	–	–	8	14	<i>58 14</i>	51
20. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	5	–	–	–	–	6	15	<i>53 13</i>	49
21. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	2	2	–	–	0	–	–	5	9	<i>55 13</i>	46
22. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	6	–	–	–	–	–	–	–	6	<i>92 12</i>	45
23. <i>Jakub Míkeš</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>45 11</i>	39
24.–25. <i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovi- ce	2	2	–	–	–	–	–	1	5	<i>35 10</i>	37
24.–25. <i>Anežka Karamonová</i>	G B. Hrabala	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>70 10</i>	37
26. <i>Adam Hůstava</i>	European School Luxem- bourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>81 9</i>	35
27. <i>Daniél Myšák</i>	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>33 9</i>	32
28. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	2	2	0	–	0	–	3	3	10	<i>26 8</i>	31
29. <i>Paulína Dujavová</i>	G J. A. Raymana, Prešov	6	–	5	–	–	–	–	–	11	<i>77 8</i>	30
30. <i>Oto Ulrich</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>47 8</i>	28
31.–32. <i>Wiktor Macura</i>	G J. Słowackiego, Český Tě- šín	–	–	–	–	–	–	3	–	3	<i>63 7</i>	27
31.–32. <i>Marie Poláková</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	–	–	–	–	–	–	–	6	<i>37 7</i>	27
33.–34. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	6	2	–	–	–	–	7	–	15	<i>60 7</i>	26
33.–34. <i>Tomáš Pecl</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Pl- zeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>63 7</i>	26
35. <i>Karolína Zemene</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>89 7</i>	25
36.–37. <i>Jakub Dubský</i>	G, Ostrov	2	2	–	–	–	–	–	2	6	<i>34 6</i>	24
36.–37. <i>Jan Hlavsa</i>	G J. Palacha, Mělník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>57 6</i>	24
38. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Tě- šín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>56 6</i>	23
39. <i>Tomáš Zatloukal</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>71 5</i>	20
40. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>100 5</i>	18
41. <i>Filip Brutovský</i>	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>83 4</i>	15
42.–43. <i>Barbora Cabalková</i>	G, Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>64 4</i>	14
42.–43. <i>Matěj Prokopič</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>64 4</i>	14

jméno <i>Student</i> <i>Přilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		6	6	5	8	9	10	12	10	66	100	55	198
44.–45. <i>Jakub EL Mouhib</i>	Gymnázium Milady Horákové Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3	12
44.–45. <i>Petr Šícho</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3	12
46. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	-	-	-	-	-	-	-	3	3	45	3	10
47. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	2	8
48. <i>Lukáš Šrol</i>	G Hubeného, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1	6
49. <i>Eliška Šlégelová</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9	1	3

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	„%“	Σ
		3	3	5	8	9	10	12	10	60	100	50	180
1. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	4	3	4	–	9	–	12	12	44	94	39	140
2. Jozef Csipes	G Grösslingova, Bratislava	3	4	6	–	9	–	11	11	44	91	35	126
3. Vojtěch Kuchař	Wichterlovo G, Ostrava	3	1	6	–	3	–	11	9	33	84	33	120
4. Jakub Kliment	G Tajovského, B. Bystrica	3	4	5	–	9	–	9	10	40	87	30	110
5. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	3	1	6	–	3	–	12	11	36	70	28	100
6. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	3	1	6	–	–	–	8	4	22	70	26	93
7. Martina Daňková	Gymnázium Brno-Bystrc	3	3	–	–	–	–	12	5	23	77	21	78
8. Elena Chocholaková	G L. Svobodu, Humenné	3	4	5	–	1	–	12	12	37	87	21	77
9. Martin Opat	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	6	–	–	–	10	6	28	70	21	76
10. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	19	68
11. Dominik Farhan	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	2	0	–	3	–	10	8	26	57	18	67
12. Karolína Letochová	G, Šternberk	3	–	–	–	–	–	8	8	19	65	18	66
13. Marek Milička	G dr. K. Polesného., Znojmo	3	2	5	–	5	–	10	5	30	72	18	64
14. Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	3	4	5	–	–	–	–	9	21	92	15	56
15. Aneta Pjatkanová	G, Kralupy	3	2	–	–	–	–	–	8	13	61	15	54
16. Jan Červeňan	G J. Pivečky, Slavičín	3	–	5	–	–	–	–	4	12	87	14	52
17. Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	3	–	6	–	–	–	–	8	17	62	13	47
18.–19. Alexandra Mészárošová	G Andreja Vrábla, Levice	1	1	–	–	–	–	–	3	5	42	13	46
18.–19. Ondřej Sladký	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	2	5	–	3	–	6	9	28	56	13	46
20. Jan Klivan	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	11	42
21.–22. Anna Marie Ortová	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	10	38
21.–22. Marco Souza de Joode	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	10	38
23. Josef Trojan	G Botičská, Praha	0	1	5	–	–	–	–	–	6	76	9	34
24. Zuzana Horváthová	G Andreja Vrábla, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	9	32
25. Adrián Šegeda	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	7	27
26. Riley Lofgren	Lambert High School, USA	3	–	–	–	–	–	–	–	3	74	7	25
27. Petr Skupien	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	6	24
28. Matej Michalko	G Andreja Vrábla, Levice	3	–	–	–	–	–	–	–	3	46	6	23
29. Zsolt Beke	G H. Selyeho Komárno	3	–	5	–	–	–	–	5	13	59	6	22
30.–31. Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	21
30.–31. Lucia Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	3	–	–	–	–	–	–	9	12	95	6	21
32. Ondřej Chlubna	G Orlová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	5	20
33. Marek Broul	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	4	17
34. Mona Alizadeh	St Paul's GS	2	1	1	–	–	–	8	4	16	48	4	16
35.–36. Tomáš Jánský	G V. Hlavatého, Louny	0	–	–	–	–	–	–	2	2	22	3	13
35.–36. Daniel Theis	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	3	13
37.–39. Martin Bucko	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	3	10
37.–39. Tomáš Foral	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	3	10
37.–39. Jaroslav Grulich	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	3	10
40.–43. Laura Hanoušková	G J. Wolker, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	2	2	26	2	9
40.–43. Matyáš Háze	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	2	9
40.–43. Petr Šolc	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	2	9
40.–43. Michal Žáček	G, Lovosice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	2	9
44.–45. Marek Čermák	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	2	8
44.–45. Ondřej Galuščák	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	2	8
46. Jakub Krátký	S/PŠ Jedovnice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	2	7
47.–51. Ondřej Hejna	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	1	6
47.–51. Brian Chu	AWS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
47.–51. Daniel Ježek	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
47.–51. Václav Sedlák	S/PŠ Jedovnice	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	1	6

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%	“%	Σ
		3	3	5	8	9	10	12	10	60	100	50	180
47.–51. <i>Martin Uždil</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	1	6
52.–53. <i>Martin Felkl</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	1	4
52.–53. <i>Martin Felkl</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	1	4
54. <i>Daniel Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1	3
55. <i>Daniel Kubrt</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20	0	2
56.–57. <i>Duong Phan</i>	Cumberland Valley HS, USA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	1
56.–57. <i>Veronika Staňková</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10	0	1


Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%	“%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	5	8	9	10	12	10	60	100	50	180
1. <i>Jaroslav Herman</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	4	6	–	9	–	9	11	42	91	37	135
2. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	4	5	–	9	–	12	11	44	84	34	125
3. <i>Martin Schmied</i>	G, Jihlava	3	4	5	–	9	–	9	10	40	87	33	118
4. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	4	5	–	–	–	10	10	32	84	24	88
5. <i>Tomasz Twardoch</i>	XIII LO w Szczecinie, Po- land	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	14	53
6. <i>Martin Ormoš</i>	G J. A. Raymana, Prešov	1	1	5	–	–	–	–	6	13	53	13	49
7. <i>Veronika Hendrychová</i>	G, Turnov	3	–	–	–	–	–	–	7	10	69	12	44
8. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	105	11	40
9. <i>Adam Grunt</i>	G, Trutnov	3	4	6	–	–	–	–	–	13	103	10	38
10. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Lwintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	10	37
11. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	3	4	5	–	3	–	–	–	15	88	10	36
12.–13. <i>Ondrej Tomášik</i>	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	9	33
12.–13. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	9	33
14. <i>Jan Divila</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	9	32
15.–18. <i>Mohamed Ahmed El- sayed</i>	STEM High School, Egypt	3	1	1	–	1	–	4	4	14	33	8	29
15.–18. <i>David Kománek</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	8	29
15.–18. <i>Jaroslav Scheinpflug</i>	G Jírovcova, České Budějo- vice	3	4	6	–	9	–	–	7	29	97	8	29
15.–18. <i>Jan Stoklasa</i>	Mendlovo G, Opava	3	–	1	–	–	–	–	3	7	69	8	29
19. <i>Mostafa Ahmed</i>	STEM High School, Egypt	3	1	1	–	1	–	4	4	14	31	8	28
20.–21. <i>Matěj Holubička</i>	Zemědělská akademie a Gymnázium	3	–	–	–	–	–	–	–	3	60	7	26
20.–21. <i>Jan Piroutek</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	7	26
22. <i>Tereza Němcová</i>	G a SOŠ, Jaroměř	1	–	–	–	–	–	–	–	1	42	7	25
23. <i>Peter Ehab</i>	STEM High School, Egypt	3	1	0	–	1	–	–	4	9	29	6	22
24. <i>Jindřich Maňas</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	5	20
25. <i>Mohamed Ayman</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	30	4	14
26. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39	3	13
27. <i>Mohamed Tarek delmohsen Heggi</i>	Ab-STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26	3	12
28.–29. <i>Mohamed Ayman</i>	STEM High School, Egypt	2	1	1	–	0	–	2	5	11	26	3	11
28.–29. <i>Štefan Evin</i>	G, Bardejov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	3	11
30.–31. <i>Šimon Prudil</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28	2	9
30.–31. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	2	9
32. <i>Kornel Howil</i>	XIII LO w Szczecinie, Po- land	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
33.–34. <i>Aleksander Lenart</i>	AGH U of Technology, Po- land	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	3
33.–34. <i>Šimon Prudil</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	3



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.