Úloha III.5 ... hustota pravděpodobnosti vody

9 bodů; průměr 4,12; řešilo 33 studentů

Představme si nádrž, ze které neustále vodorovně vytéká proud vody s konstantním obsahem průřezu. Rychlost proudu však náhodně kolísá s rovnoměrným rozdělením od v_1 do v_2. Po vytečení z nádrže voda volně padá na vodorovnou podlahu níže. Najděte libovolnou oblast podlahy, do které dopadne přesně 90 % vody.

Další z řady úloh, které Jáchyma napadly na záchodě.

Ze zadání je zřejmé, že oblast dopadu vody je úsečka. Zaveďme proto souřadnici x, měřenou od bodu přímo pod výtokem vody z nádrže. Výšku výtoku nad zemí označme h. Nechť funkce $x(v)$ popisuje souřadnici bodu, do kterého dopadnou částice vody s rychlostí výtoku v. Potom platí

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

$$x(v) = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

kde jsme čas pádu vody označili t. Vidíme, že x je rostoucí funkce, takže krajními body úsečky, na kterou dopadá voda, jsou $x_1 = x(v_1)$ a $x_2 = x(v_2)$.

Nyní si zadefinujeme funkci $f(x)$ tak, aby platilo, že mezi body x a $x + \mathrm{d}x$ dopadne přesně $f(x)\mathrm{d}x$ z celkového množství vody. Je nasnadě, že platí

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = 1\,. \tag{1}$$

Označme $v(x)$ inverzní funkci k $x(v)$. Potom do intervalu souřadnic $\langle x, x + \mathrm{d}x\rangle$ dopadne voda z intervalu rychlostí $\langle v(x), v(x + \mathrm{d}x)\rangle$. To představuje část

$$\frac{v(x+\mathrm{d}x) - v(x)}{v_2 - v_1} = \frac{\left((x+\mathrm{d}x)\sqrt{\frac{g}{2h}} - x\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)}{v_2 - v_1} = \frac{\mathrm{d}x}{v_2 - v_1}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

z celého intervalu rychlostí. Musíme však vzít v úvahu, že množství vody, které z nádrže za nějaký okamžik vyteče, je přímo úměrné rychlosti vody. Podíl vody v intervalu rychlostí tak ještě musíme vynásobit rychlostí vody $v(x)$ (kterou pro dostatečně malé $\mathrm{d}x$ můžeme pro tento účel považovat za konstantní v celém intervalu), čímž získáme poměrnou část množství vody, které dopadá do intervalu $\mathrm{d}x$, neboli

$$f(x)\mathrm{d}x \propto \frac{v(x)\left(v(x+\mathrm{d}x) - v(x)\right)}{v_2 - v_1} = \frac{x\mathrm{d}x}{v_2 - v_1}\frac{g}{2h}\,.$$

Musí být splněna podmínka (1), takže hledáme normovací konstantu

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x)\left(v(x+\mathrm{d}x) - v(x)\right)}{v_2 - v_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x\mathrm{d}x}{v_2 - v_1}\frac{g}{2h} = \frac{g\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{4h\left(v_2 - v_1\right)}\,.$$

Po dosazení za x_1 a x_2 máme

$$A = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\left(v_2 - v_1\right)}\,.$$

Funkce f je ve tvaru

$$f = \frac{1}{A\mathrm{d}x} \frac{x\mathrm{d}x}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h} = \frac{gx}{h\left(v_2^2 - v_1^2\right)} \, .$$

Hledaný interval už nyní snadno zkonstruujeme. Označme $n = 0{,}9$. Potom hledáme takové x_0, pro které platí

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x) \, \mathrm{d}x = n \, .$$

Řešení integrálu vede na rovnici

$$n = \int_{x_1}^{x_0} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_0} \frac{gx\mathrm{d}x}{h\left(v_2^2 - v_1^2\right)} = \frac{g\left(x_0^2 - x_1^2\right)}{2h\left(v_2^2 - v_1^2\right)}$$

a pro x_0 platí

$$x_0 = \sqrt{\frac{2nh\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{g} + x_1^2} = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(nv_2^2 + (1-n)\, v_1^2\right)} \, .$$

Do intervalu od x_1 do x_0 dopadne 90% vody. Pro úplnost dodejme, že toto řešení je samozřejmě pouze jedno z nekonečně mnoha možných.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`