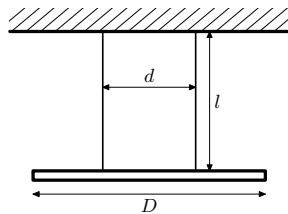


Úloha IV.E ... torzní kyvadlo

12 bodů; průměr 6,55; řešilo 42 studentů

Vezměte si alespoň 40 cm dlouhou homogenní tyčku. Ve dvou bodech symetricky vůči jejímu středu k ní přidejte dva závěsy ze stejného materiálu (například nit nebo vlasec), které dále upevněte k nějakému pevnému stativu tak, aby měly stejnou délku a aby byly rovnoběžné. Změřte periodu torzních kmitů tyčky v závislosti na vzdálenosti závěsů d pro různé délky závěsů l a určete, o jakou závislost na těchto dvou parametrech se jedná. Torzní kmity vypadají tak, že se tyčka otáčí ve vodorovné rovině, přičemž její střed zůstává v klidu.



Karel chtěl hypnotizovat účastníky.

Teória

Zaujíname sa o malé kmity zavesenej tyče vo vodorovnej rovine pri jej otáčaní okolo zvislej osi prechádzajúcej ťažiskom. Moment zotrvačnosti I tyče voči tejto osi je

$$I = \frac{mD^2}{12}$$

a príslušná kinetická energia E_k pri pohybe uhlovou rýchlosťou ω bude

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{mD^2}{24}\omega^2.$$

Potenciálnu energiu E_p určíme z nadvihnutia sústavy ako pri obyčajnom kyvadielku ako

$$E_p = mg\Delta h = mgl(1 - \cos\beta) \approx \frac{1}{2}mgl\beta^2,$$

kde β je uhol, o ktorý sa vychýlilo vlákno zo zvislého smeru. My však potrebujeme túto energiu vyjadriť vo veličine asociovanej s rýchlosťou ω , teda prostredníctvom uhla α , o ktorý sa pri pohybe pootočila tyč. Tieto dve veličiny sú prepojené vzťahom

$$\beta = \alpha \frac{d}{2l}$$

získaným z rovnosti dĺžky oblúkov opísaných bodom závesu pri otáčaní okolo stredu tyče a závesu. Po dosadení dostávame

$$E_p = mg \frac{d^2}{8l} \alpha^2.$$

Dobu kmitu určíme analógiou s harmonickým oscilátorom ako 2π násobok odmocniny podielu členov v energiách pred ω^2 a α^2 dostávajújúc

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

Postup merania

Ako tyč sme použili drevený hranol s rozmermi $D = 89$ cm, šírkou $t = 1,5$ cm a výškou $h = 3,5$ cm. Chybu merania týchto dĺžok odhadujeme na $D = 0,1$ cm. Hmotnosť tyče sme určili ako $m = (240 \pm 2)$ g. Na tyči sme vyznačili miesta na zavesenie, chybu vzdialenosti závesov odhadujeme ako $\sigma_d = 0,2$ cm. Vzdialenosť d sme menili s krokom 10 cm. Záves tvoril motúz s dĺžkovou hustotou $\lambda = 2,0 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ uviazaný na pevnú oceľovú trubku. Merali sme pri štyroch rôznych dĺžkach závesu, chybu určenia dĺžky závesu odhadujeme na $\sigma_l = 1$ cm. Po uvoľnení tyče sme po ustálení kmitov stopkami merali dobu dvadsiatich kmitov $20T$.

Spracovanie merania

Namerané hodnoty, z nich vypočítané periódy kmitov a ich neistoty sú uvedené v tabuľke 1. Slovom „prične“ sú označené klasické kmity, pre ktorých periódu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l + h/2}{g}}.$$

Tu je dôležité si uvedomiť, že prične kmity sa dejú s dĺžkou závesu až po ťažisko, zatiaľ čo torzné kmity len po záves.

Závislosti periódy kmitov od rozostupu závesov $T(d)$ sú vynesené v grafe 1 a preložené závislosťou $T = a/d$. Pre jednotlivé dĺžky závesu sme dostali konštanty a uvedené v tabuľke 2. Porovnaním so vzťahom pre periódu dostávame referenčné

$$a_t = 2\pi D\sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

Chybu výpočtu a_t určíme ako

$$\sigma_{a_t} = a_t\sqrt{\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{2g}\right)^2}.$$

Diskusia

Z grafu a z malých chýb regresných parametrov a môžeme vidieť, že náš model závislosti periódy kmitov na šírke závesu je správny. Porovnaním experimentálnych hodnôt s vypočítanými vidíme ďalej aj to, že model je správny aj ako závislosť na dĺžke závesu a má aj správne určenú multiplikatívnu konštantu.

Malý rozdiel medzi nameranými a vypočítanými hodnotami môže byť spôsobený vplyvom iných kmitov ako torzných, no najmä nepresnosťou merania dĺžky závesu. V úvahách sme zanedbali možné nehomogenity hranola, ktorý sme navyše aproximovali tyčou. Táto aproximácia je však oprávnená, keďže moment zotrvačnosti hranola je v plnom tvare $I = \frac{1}{12}m(D^2 + t^2) \approx \frac{1}{12}mD^2$ v rámci chyby merania D . Ťažisko hranola sa nenachádzalo presne v strede, bolo odchýlené asi 0,5 cm na stranu, stred závesov sme umiestnili práve do tohto bodu.

Pozoruhodné je rozpätie meraných periód od takmer pol sekundy po skoro desať (pôvodne sme chceli merať aj pre $d = 10$ cm, kde by jedno meranie trvalo asi 4 minúty).

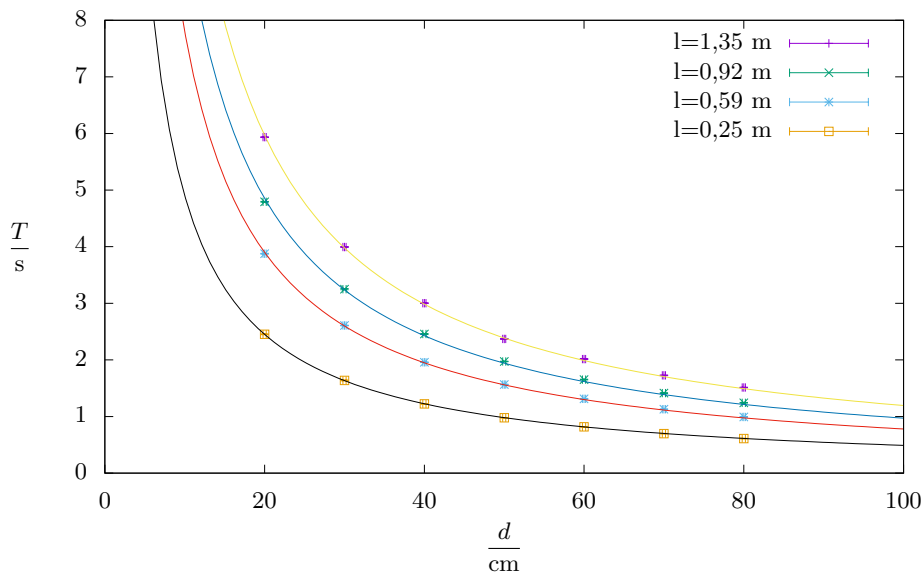
Na meranie samotné malo vplyv aj tlmenie kmitov. Na začiatku sme prebytočný povrázok nechali voľne visieť, čo spôsobovalo silné tlmenie pri rýchlych kmitoch. To sme odstránili namotaním prebytočného povrázku okolo hranola v mieste závesu. Táto malá prebytočná hmotnosť povrázku mohla ovplyvniť dobu kmitu, veľkosť tohto vplyvu odhadujeme do 1%.

Tab. 1: Namerané periody torzných kmitů.

$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{20T}{\text{s}}$			$\frac{T}{\text{s}}$	$\frac{\sigma_T}{\text{ms}}$
1,35	80	30,3	30,3	30,2	1,513	5
1,35	70	34,6	34,6	34,5	1,728	5
1,35	60	40,3	40,4	40,2	2,015	6
1,35	50	47,4	47,4	47,4	2,370	5
1,35	40	60,1	60,1	60,0	3,003	5
1,35	30	79,7	80,1	79,9	3,995	8
1,35	20	118,8	118,6	118,7	5,935	6
1,37	priečne	47,4	47,2	47,2	2,363	6
0,92	80	24,9	24,8	24,9	1,243	5
0,92	70	28,3	28,2	28,3	1,413	5
0,92	60	33,0	33,2	33,0	1,653	6
0,92	50	39,4	39,4	39,5	1,972	5
0,92	40	49,1	49,2	49,1	2,457	5
0,92	30	64,6	65,2	65,2	3,250	11
0,92	20	90,9	95,8	95,9	4,793	6
0,94	priečne	39,0	38,6	38,7	1,938	8
0,59	80	19,9	19,9	19,8	0,993	5
0,59	70	22,6	22,6	22,5	1,128	5
0,59	60	26,1	26,4	26,2	1,312	7
0,59	50	31,3	31,2	31,4	1,565	6
0,59	40	39,2	39,1	39,2	1,958	5
0,59	30	52,1	52,1	52,3	2,608	6
0,59	20	77,7	77,4	77,5	3,877	7
0,61	priečne	31,2	30,9	31,2	1,555	7
0,25	80	12,2	12,2	12,2	0,610	5
0,25	70	14,0	13,9	14,0	0,698	5
0,25	60	16,3	16,4	16,4	0,818	5
0,25	50	19,5	19,6	19,6	0,978	5
0,25	40	24,5	24,5	24,4	1,223	5
0,25	30	32,9	32,6	32,7	1,637	7
0,25	20	49,2	49,2	48,8	2,453	8
0,27	priečne	20,3	20,0	19,8	1,002	9

Tab. 2: Výsledné koeficienty fitu.

$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{a}{\text{cm}\cdot\text{s}}$	$\frac{\sigma_a}{\text{cm}\cdot\text{s}}$	$\frac{a_t}{\text{cm}\cdot\text{s}}$	$\frac{\sigma_{a_t}}{\text{cm}\cdot\text{s}}$
1,35	119,4	0,3	119,8	0,5
0,92	97,1	0,5	98,9	0,6
0,59	78,0	0,2	79,2	0,7
0,25	49,03	0,04	51,5	1,0

Obr. 1: Závislost periody torzných kmitov T na šířce závěsu d .

Záver

Zostavili sme teoretický model kmitov, ktorý sme následne experimentálne overili. Perióda torzných kmitov tyče na dvoch závesoch dĺžky l upevnených d od seba symetricky okolo ťažiska tyče je popísaná vzťahom

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{l}{3g}},$$

kde D je dĺžka tyče a g je tiažové zrýchlenie.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.