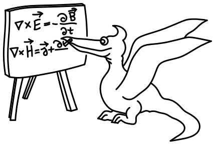


Seriál: Tření a vnější síly

V úvodním dílu seriálu jsme se zabývali dokonalými kmity – na naše závaží na pružině nepůsobil odpor vzduchu, kyvadlo kmitalo v bezvětří a kužel se potápěl v dokonale stojaté vodě. V reálném světě ovšem často musíme počítat s tím, že na naše závaží působí kromě síly způsobované pružinou i další síly. V tomto díle se budeme zabývat tím, jak s takovýmito externími silami pracovat, a představíme si důležitý důsledek povahy oscilátorů v poli vnějších sil – rezonanci.

O co se síly snaží?

Uvažujme nyní kmitající systém, který popíšeme výchylkou x a hybností $p = mv$, kde v je rychlost změny výchylky. Označíme-li zrychlení výchylky jako a, dá nám druhý Newtonův zákon rovnici

$$F = ma\,,$$

kde F je součet všech sil působících na systém. Prozatím budeme uvažovat pouze pohyb v jedné dimenzi. V minulém dílu nám stačilo pracovat pouze se silou, která se snažila vrátit systém do rovnovážné polohy a měla vyjádření

$$F_0 = -kx\,,$$

kde x byla výchylka odpovídající rovnovážné poloze. Nyní k této síle připočteme obecnou externí sílu závisející na čase, což lze reprezentovat zápisem

$$F_\mathrm{e} = F_\mathrm{e}(t)\,.$$

Výsledná rovnice má tvar

$$F_\mathrm{e}(t) = ma + kx\,. \tag{1}$$

Obecné řešení této rovnice je složité, proveďme proto zpočátku aproximaci – předpokládejme, že hmotnost je natolik malá, že kinetická energie systému je vždy zanedbatelná ve srovnání s potenciální energií systému. Rovnice (1) se tím zjednoduší na

$$F_\mathrm{e}(t) = kx\,.$$

Vidíme, že v tomto případě se síla vracející systém do rovnovážné polohy přesně vyrovná s externí silou a výchylka následuje bez jakéhokoliv zpoždění externí sílu. Pokud by závislost externí síly na čase byla například $F_\mathrm{e}(t) = F_{\mathrm{e}0}\cos(\omega t)$, pak by se výchylka v čase měnila jako

$$x(t) = \frac{F_{\mathrm{e}0}}{k}\cos(\omega t)\,,$$

kde $F_{\mathrm{e}0}$ je amplituda externí síly.

Normální systém ovšem nulovou hmotnost nemá – to způsobí, že systém má nenulovou hybnost ve chvíli, kdy se externí síla vyrovná se silou F_0, a tím pádem pokračuje v pohybu i mimo tuto výchylku. Externí síla tak vlastně určuje novou rovnovážnou polohu, do které se systém snaží dostat, ale kterou vždy „přestřelí“.

Tuto ideu můžeme realizovat formálněji na následujícím příkladu. Uvažujme sílu s časovým průběhem $F_\mathrm{e}(t) = F_{\mathrm{e}0}\Theta(t)$, kde $\Theta(t)$ je tzv. Heavisideova funkce, pro kterou platí

$$\Theta(t) = \begin{cases} \Theta(t) = 1 & t > 0 \\ \Theta(t) = 0 & t < 0 \end{cases} .$$

Jedná se tedy o konstantní sílu, kterou v čase $t = 0$ „zapneme“. Pro čas $t < 0$ je rovnice (1) shodná s rovnicí harmonických kmitů. Pro jednoduchost uvažujme, že systém má pro $t < 0$ nulovou výchylku, a tím pádem je v klidu. Pro $t > 0$ je pak pohybová rovnice

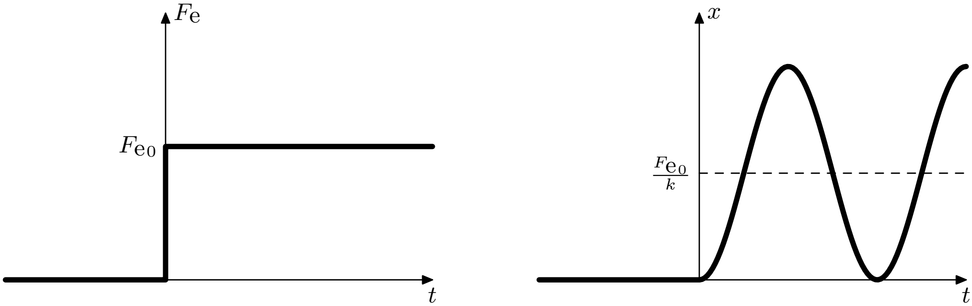
$$F_{\mathrm{e}0} = ma + kx\,,$$
$$0 = ma + k\left(x - \frac{F_{\mathrm{e}0}}{k}\right).$$

Zde si můžeme uvědomit, že pokud udáváme polohu v souřadnicích $x' = x - \frac{F_{\mathrm{e}0}}{k}$, zůstává rychlost $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = v'$ nezměněná a platí

$$0 = ma' + kx'\,.$$

Vidíme, že systém v tomto případě vykonává jednoduché harmonické kmity, ovšem okolo nové rovnovážné polohy, kterou je $\frac{F_{\mathrm{e}0}}{k}$. Důležité je, že tyto kmity probíhají s přirozenou úhlovou frekvencí systému

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$



Obr. 1: Systém vlivem vnější síly začne kmitat okolo nové rovnovážné polohy.

Systém pod vlivem externí síly můžeme kvalitativně popsat následujícím způsobem – externí síla se snaží dostat systém do nové rovnovážné polohy dané velikostí síly, avšak oscilační povaha systému mu brání setrvat v klidu v blízkosti rovnovážné polohy.

Povolené ztráty

Mimo externí síly musíme v reálných systémech uvažovat také třecí síly. Ty jsou obecně poměrně složité, nicméně pro relativně pomalé oscilace lze tření vznikající odporem tekutiny přibližně modelovat jako sílu

$$F_\mathrm{t} = -\gamma m v\,,$$

kde γ je koeficient tření (má rozměr s^{-1}, tedy stejný jako frekvence). Tento model tření má značnou výhodu v tom, že je lineární. Pokud je náš pohyb složen ze dvou rychlostí v_1 a v_2, výsledná třecí síla je

$$F_\mathrm{t} = -\gamma m\left(v_1 + v_2\right) = -\gamma m v_1 - \gamma m v_2 = F_{\mathrm{t}1} + F_{\mathrm{t}2}\,.$$

Pokud tuto sílu vnímáme jako externí sílu, rovnice (1) vede (opět pro nesložený pohyb) na

$$-\gamma m v = ma + kx\,. \tag{2}$$

Tento vztah není zcela triviální, jelikož a, x i v se v čase mění. Abychom odhalili základní fyzikální principy, uvažujme opět zjednodušení, kdy koeficient γ je relativně malý vzhledem k přirozené frekvenci oscilací $\omega_0 = \frac{k}{m}$. V takovém případě je naše rovnice vlastně opět rovnicí harmonických kmitů, avšak s malým vlivem tření. Kvůli tomuto tření bude systém ztrácet energii. Množství ztracené energie lze odhadnout, budeme-li předpokládat, že systém osciluje pouze harmonicky, tj. platí

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos(\omega_0 t)\,,\\ v(t) &= -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)\,,\\ a(t) &= -\omega_0^2 x_0\cos(\omega_0 t)\,. \end{aligned}$$

Výkon ztráty energie je dán jako

$$P = F_\mathrm{t} v = -\gamma m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\,.$$

S použitím vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

dostáváme

$$P = -\frac{1}{2}\gamma m x_0^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\gamma m x_0^2 \omega_0^2\cos(2\omega_0 t)\,.$$

Průměrný výkon ztráty energie za jednu periodu kmitů je pak dán pouze prvním členem, jelikož cosinus se zprůměruje na nulu. Změna energie systému za jednu periodu je tedy

$$\Delta E = PT = P\frac{2\pi}{\omega_0} = -\pi\gamma m\omega_0 x_0^2\,.$$

Tato změna energie se projeví jako pokles amplitudy kmitání x_0, která bude po jednom cyklu x_0', přičemž z rovnováhy energie plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k\left(x_0'\right)^2 &= \frac{1}{2}kx_0^2 - \pi\gamma m\omega_0 x_0^2\,,\\ \left(x_0'\right)^2 &= x_0^2\left(1 - 2\pi\gamma\frac{m}{k}\omega_0\right) = x_0^2\left(1-\frac{2\pi}{\omega_0}\gamma\right) = x_0^2\left(1-\gamma T\right) \end{aligned}$$

a provedením approximace pro malé γ

$$x_0' = x_0\sqrt{1-\gamma T} \approx x_0\left(1-\frac{\gamma}{2}T\right)\,.$$

Nezapomeňme, že jsme v našem odvození uvažovali pouze malé hodnoty γ, a tedy výraz $1-\frac{\gamma}{2}T$ může být pouze přiblížením určité funkce pro nízké koeficienty tření. Při důkladnějším postupu se ukazuje, že správné řešení obsahuje exponenciální funkci, kterou pro malé hodnoty γ můžeme vyjádřit jako

$$\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} \approx 1 - \frac{\gamma}{2}t\,,$$

tedy platí

$$x_0'(t) = x_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\,. \tag{3}$$

Při ještě důkladnějším zkoumání se ukáže, že pouhý exponenciální pokles amplitudy není jediný efekt tření, ale mění se i frekvence oscilací. Při velkém tření se může dokonce stát, že systém vůbec oscilovat nebude. Těmito zpřesněními a odpovídajícími příklady se však zatím zabývat nebudeme. Nyní nám stačí si pamatovat, že tření způsobuje exponenciální pokles amplitudy kmitů.

Všechny síly dohromady

Nyní se budeme zabývat tím, jak ideu tření a ztrát energie v systému zkombinovat s ideou externích sil, které se snaží se systémem pohybovat. Pro tento účel budeme uvažovat jednoduchou harmonickou externí sílu

$$F_\mathrm{e}(t) = F_{\mathrm{e}0}\cos(\omega t)\,,$$

kde ω se může lišit od ω_0. Zároveň započteme v kmitech vliv tření, čímž získáme výslednou pohybovou rovnici

$$F_{\mathrm{e}0}\cos(\omega t) = ma + \gamma m v + kx\,. \tag{4}$$

V systému, který tato rovnice popisuje, soupeří několik vlivů. Externí síla kontinuálně mění rovnovážný bod, kolem kterého se systém snaží oscilovat, zároveň však tření zabraňuje přílišné rychlosti systému, jehož oscilace tak ztrácí energii. Výsledkem těchto vlivů může být velmi komplikovaný pohyb, ovšem tření zajistí, že většina složek tohoto pohybu nakonec vymizí. Nás bude zajímat ta část pohybu, která s plynoucím časem nezmizí, tzv. *stacionární řešení*. Z tvaru rovnice (4) můžeme tušit, že aby byla platná, musí systém nějak oscilovat, ale konkrétní amplituda a relativní fáze vzhledem k oscilacím externí síly nejsou jasné. Budeme předpokládat, že systém osciluje podle rovnic

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos\left(\omega' t - \varphi_0\right)\,,\\ v(t) &= -\omega' x_0\sin\left(\omega' t - \varphi_0\right)\,,\\ a(t) &= -\omega'^2 x_0\cos\left(\omega' t - \varphi_0\right)\,. \end{aligned}$$

S použitím sčítacích vzorců pro goniometrické funkce dostáváme

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega' t - \varphi_0\right) &= \cos(\varphi_0)\cos(\omega' t) + \sin(\varphi_0)\sin(\omega' t)\,,\\ \sin\left(\omega' t - \varphi_0\right) &= \sin(\omega' t)\cos(\varphi_0) - \cos(\omega' t)\sin(\varphi_0)\,. \end{aligned}$$

Tím pádem má rovnice tvar

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{e}0}\cos(\omega t) = &\cos(\omega' t)\left(kx_0\cos(\varphi_0) + \gamma m\omega' x_0\sin(\varphi_0) - m\omega'^2 x_0\cos(\varphi_0)\right) + \\ &+ \sin(\omega' t)\left(kx_0\sin(\varphi_0) - \gamma m\omega' x_0\cos(\varphi_0) - m\omega'^2 x_0\sin(\varphi_0)\right)\,. \end{aligned}$$

Aby tato rovnice platila v jakýkoli čas t, člen obsahující $\sin(\omega' t)$ musí být nulový neboli musí platit

$$kx_0\sin(\varphi_0) - \gamma m\omega' x_0\cos(\varphi_0) - m{\omega'}^2 x_0\sin(\varphi_0) = 0\,,$$
$$\left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)\sin(\varphi_0) = \gamma\omega'\cos(\varphi_0)\,.$$

Tato rovnice je triviálně spněna pro $\gamma = 0$ a $\varphi_0 = n\pi$, kde n je celé číslo. To znamená, že pokud je tření nulové, fázový rozdíl mezi silou a oscilacemi systému bude buď nulový, nebo budou síla a systém přesně v protifázi. V ostatních případech máme

$$\operatorname{cotg}(\varphi_0) = \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{\gamma\omega'}\,. \tag{5}$$

Vidíme, že tento výraz replikuje předpovídané chování pro $\gamma \to 0$, jelikož pro malé hodnoty γ dostáváme naopak velkou hodnotu funkce kotangens, která odpovídá buď takřka nulovému fázovému posunu (pro kladnou velkou hodnotu), nebo protifázi (pro zápornou hodnotu). Tím pádem je pohybová rovnice dána jako

$$\begin{aligned}F_{e0}\cos(\omega t) &= \cos(\omega' t)\left(kx_0\cos(\varphi_0) + \gamma m\omega' x_0\sin(\varphi_0) - m{\omega'}^2 x_0\cos(\varphi_0)\right) = \\ &= x_0\cos(\omega' t)\sin(\varphi_0)\left(k\operatorname{cotg}(\varphi_0) + \gamma m\omega' - m{\omega'}^2\operatorname{cotg}(\varphi_0)\right)\,.\end{aligned}$$

Nyní by mělo být zřejmé, že další podmínkou platnosti rovnice v každém čase je $\omega' = \omega$. Díky tomu už známe jak frekvenci, tak fázový posun kmitů. Ještě nás ovšem zajímá amplituda kmitů. Substitucí v rovnici (5) dostáváme

$$\begin{aligned}F_{e0} &= x_0 k\sin(\varphi_0)\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega} + \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega}\right) = \\ &= x_0 k\frac{\sin(\varphi_0)}{\gamma\omega\omega_0^2}\left(\omega_0^4 - \omega_0^2\omega^2 + \gamma^2\omega^2 + \omega^4 - \omega^2\omega_0^2\right) = \\ &= x_0 k\frac{\sin(\varphi_0)}{\gamma\omega\omega_0^2}\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right)\,.\end{aligned}$$

Na tomto místě použijeme další goniometrickou identitu

$$1 + \operatorname{cotg}^2(\varphi_0) = \frac{1}{\sin^2(\varphi_0)}\,,$$

s jejíž pomocí vyjádříme

$$\sin(\varphi_0) = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2\varphi}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}{\gamma^2\omega^2}}} = \pm\frac{\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}\,,$$

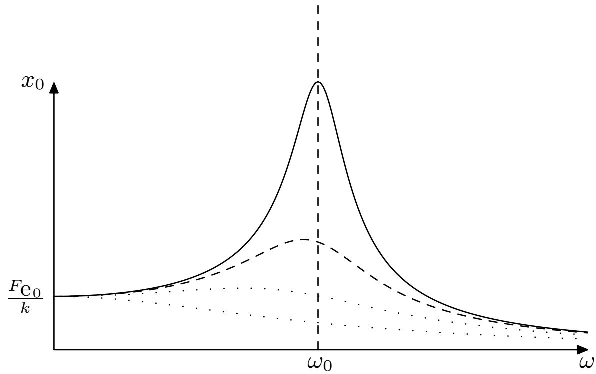
takže

$$F_{e0} = \pm x_0\frac{k}{\omega_0^2}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\,.$$

Pokud nás zajímá pouze absolutní velikost amplitudy (relativní fázi už známe), máme jednoduše

$$x_0 = \frac{1}{m}\frac{F_{\mathrm{e}0}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}\,. \tag{6}$$

Všimněme si, že pokud za předpokladu malého tření ($\gamma \ll \omega_0$) zvolíme frekvenci externí síly ω blízkou ω_0, výsledná amplituda oscilací je obrovská. Tomuto jevu se říká *rezonance* (viz obrázek 2).



Obr. 2: Amplituda jako funkce frekvence vnější síly. Grafy odpovídají třecím koeficientům $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0{,}2,\ 0{,}5,\ 1{,}2$ s klesajícím vrcholem pro rostoucí γ. Všimněme si, že pro γ, které již není mnohem menší než ω_0, se maximum amplitudy přesouvá pryč od ω_0.

Rezonanci lze pozorovat v mnoha systémech a dá se velmi dobře využít, kupříkladu pomocí rezonančních obvodů lze zvýraznit některé frekvence signálů oproti jiným. Samozřejmě existuje mnoho příkladů rezonance v akustice, například jednotlivé tóny. Jak je možné, že systém má více než jednu přirozenou frekvenci, budeme řešit v pozdějších dílech seriálu, zabývajících se vlněním. Prozatím nám postačí zkoumat vlastnosti rezonance jednoduchých oscilátorů.

Vraťme se ke vztahům pro fázový rozdíl a amplitudu oscilujícího systému s externí silou. Z kvalitativního hlediska nás zajímají limity $\omega \to \infty$, $\omega \to 0$ a $\omega \to \omega_0$. Pokud je frekvence síly výrazně nižší než frekvence přirozených oscilací, platí

$$x_0 \to \frac{F_{\mathrm{e}0}}{m\omega_0^2} = \frac{F_{\mathrm{e}0}}{k}\,.$$

Zároveň $\operatorname{cotg}(\varphi_0) \to \infty$, takže $\varphi_0 \to 0$ a opět máme situaci, ve které výchylka přesně následuje sílu. To dává smysl, jelikož předpoklad $\omega \to 0$ odpovídá systému, na nějž působí jen velmi pomalu se měnící vnější síla, a ten je díky tlumení schopen tuto sílu následovat. Efektivně to také odpovídá předpokladu $\omega_0 \to \infty$, což je ekvivalentní s případem $m \to 0$, který jsme diskutovali na začátku textu.

Pro případ $\omega \to \infty$, $\operatorname{cotg}(\varphi_0) \to -\infty$, a tedy $\varphi \to -\pi$ je výchylka systému v přesné protifázi k oscilacím síly. Amplituda oscilací je

$$x_0 \to \frac{F_{\mathrm{e}0}}{m\omega^2} \to 0\,.$$

V této situaci jsou oscilace vnější síly tak rychlé, že se systém nestíhá rozpohybovat.

V posledním případě (při rezonanci) platí $\operatorname{cotg}(\varphi_0) \to 0$ čili $\varphi_0 \to \frac{\pi}{2}$. Síla je shodná se směrem rychlosti, oscilační amplituda

$$x_0 \to \frac{F_{\mathrm{e}0}}{\gamma\omega}$$

je určena třením, resp. ztrátami v systému. Dále vidíme, že pro malé ztráty může amplituda růst bez omezení, v praxi však často dojde k nelineárním efektům, jako je například poškození systému.

Závěr

V tomto díle seriálu jsme se zabývali tím, co se stane, když do našeho systému přidáme více sil. V příštím díle zjistíme, co se změní, když přidáme více oscilátorů! Budeme zkoumat chování pružin se dvěma závažími, kyvadel, která se mohou pohybovat více směry, a podobné problémy.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.