

Úvodem

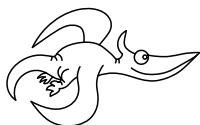
Milé řešitelky, milí řešitelé,

je za námi téměř polovina letošního ročníku, který je díky aktuální situaci pro všechny jiný. Avšak pevně doufáme, že jste zdraví a v rámci možností se vám daří.

A co nás čeká ve 3. sérii? Upečeme si perník s hydrogenuhličitanem sodným, vyřešíme Jirkův a Káti problém s bungee-jumpingem a zkusíme katapultovat myšáka Joe pomocí ventilátoru. V experimentální úloze se budeme věnovat výpočtu difuzní konstanty vzhledem k závislosti velikosti barevné skvrny ve vodě. V seriálu se tentokrát zaměříme na oscilátory, které budou vzájemně propojeny, s čímž souvisejí také oscilace ve více dimenzích.

Tak šup, běžte řešit. Nezapomínejte, že máte poslední možnost nasbírat body a tím si zajistit místo na jarním soustředění! Budeme se těšit!

Organizátoři



Zadání III. série

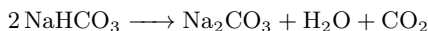
Termín uploadu: 29. 12. 2020 23.59

Termín odeslání: 28. 12. 2020

Úloha III.1 ... pečící

3 body

Při pečení perníku se do těsta přidává jedlá soda – hydrogenuhličitan sodný (NaHCO_3). Uvažujte, že se při vyšší teplotě rozloží podle rovnice



na uhličitan sodný, oxid uhličitý a vodu. O kolik se díky bublinkám oxidu uhličitého a vodní páry zvětší objem buchty, když do ní přidáme 10 g hydrogenuhličitanu sodného? Počítejte, že oxid uhličitý a vodní pára se chovají jako ideální plyny a těsto v okolí bublinek tuhne při teplotě 200°C a tlaku 1013 hPa.

Úloha III.2 ... bungee

3 body

Jirka s Kátou si chtějí vyzkoušet bungee-jumping. Na skok z výšky $h = 100$ m mají dokonale pružné lano o délce $l = 40$ m, které je kalibrováno tak, že když s ním skočí Káťa o hmotnosti $m_K = 50$ kg, zastaví se ve výšce $h_K = 16$ m nad zemí. Může toto lano bezpečně použít Jirka s hmotností $m_J = 80$ kg? Odpor vzduchu a výšku Káti a Jirky zanedbejte.

Úloha III.3 ... bum-bác, bum-bác

6 bodů

Představme si, že na geosynchronní oběžnou dráhu umístíme velké množství satelitů. Shodou okolností dojde ke srážce, která se vymkne kontrole a vytvoří tenkou sférickou vrstvu homogenně posetou deseti miliony úlomků o průměrné velikosti $x = 10$ cm. Předpokládejte, že směry rychlostí jednotlivých úlomků jsou v tečné rovině ke sféře orientované náhodně. Kolik času průměrně uplyne mezi dvěma srážkami?

Úloha III.4 ... větrníkový katapult

6 bodů

Malý myšák Joe se rád katapultuje z konce vrtule ventilátoru tak, že se jednoduše ve vhodnou dobu pustí a odletí. Kdy se má pustit, aby doletěl co nejdál? Vrtule má délku l a otáčí se s úhlovou rychlostí ω , přičemž rovina otáčení je kolmá na vodorovnou rovinu. Dodejme, že střed otáčení je ve výšce h nad zemí.

Úloha III.5 ... pašování ve vesmíru

9 bodů

Dvě vesmírné lodě letí v jedné přímce proti sobě. Jejich počáteční vzdálenost je d . První se pohybuje rychlostí v_1 , druhá v_2 (ve stejné vztažené soustavě). První dokáže vyvinout maximální zrychlení a_1 , druhá a_2 (obě v libovolném směru). Posádky lodí si chtějí předat nějaké „zboží“, ale k tomu potřebují, aby se lodě potkaly ve stejný čas na stejném místě a přitom měly stejnou rychlost. Za jaký nejmenší čas je toho možné dosáhnout? Relativistické jevy neuvažujte.

Úloha III.P ... vlnitý elektromagnetismus

11 bodů

Co kdyby přírodní zákony nebyly v celém vesmíru stejné? Co kdyby se nějak měnily s polohou? Zaměřme se na elektromagnetickou interakci. Jak minimálně by se konstanta v Coulombově zákonu musela měnit se vzdáleností, abychom to mohli pozorovat? Jak bychom to pozorovali?

Úloha III.E ... difuze

12 bodů

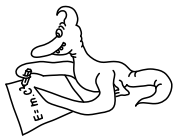
Určitě jste ve škole slyšeli o tepelném pohybu molekul, jako je difuze či Brownův pohyb. Změřte časovou závislost velikosti barevné skvrny ve vodě a vypočtete difuzní konstantu. Proveďte měření pro několik různých teplot a sestrojte graf teplotní závislosti difuzní konstanty. Jak byste mohli zařídit, aby byla teplota v průběhu každého měření konstantní?

Úloha III.S ... elektron v poli

10 bodů

Uvažujte částici s nábojem q a hmotností m , která je přichycená k pružině o tuhosti k , jejíž druhý konec je ukotven v jednom bodě. Předpokládejte, že pohyb částice je omezen na pohyb v jedné rovině. Celý systém je v magnetickém poli o velikosti B_0 , které je kolmé na rovinu pohybu částice. Pokusíme se popsat možné oscilace této částice. Začněte sestavením rovnic pohybu pro tuto částici – nezapomňte započítat vliv magnetického pole.

Poté předpokládejte oscilující pohyb pro obě kartézské souřadnice částice, a proveďte Fourierovskou substituci, tj. nahraďte derivace násobky $i\omega$, kde ω je frekvence oscilací. Vyřešte výslednou soustavu rovnic tak, abyste získali poměr amplitud oscilací a frekvenci oscilací. Takto získané řešení je poměrně složité, a abychom mu lépe porozuměli, je vhodné přiblížit si ho v jednodušším případě. Předpokládejte tedy dále, že magnetické pole je velmi silné, tj. $\frac{q^2 B_0^2}{m^2} \gg \frac{k}{m}$. Určete přibližnou hodnotu (hodnoty) ω v této aproximaci, hledejte vždy nejvyšší nenulový řád přiblížení. Dále načrtněte pohyb (pohyby) částice v reálném prostoru při této aproximaci.



Řešení II. série

Úloha II.1 ... svítí-nesvítí

3 body; průměr 1,27; řešilo 80 studentů

Délka dne a noci se v průběhu roku mění, přičemž na různých místech na Zemi se může měnit jinak. Jak je to však s roční průměrnou délkou dne? Je všude stejná, nebo se na různých místech na Zemi liší? Stačí uvést pouze kvalitativní popis.

Bonus Pokuste se odhadnout, o kolik nejvíce může být průměrný den delší, než 12 h.

Dodo vyhazoval staré úlohy.

Délku dňa pre pozorovateľa na Zemi ovplyvňuje kombinácia jeho zemepisnej šírky a deklinácie Slnka, ktorá sa v priebehu roka mení. Slnko je na oblohe najjužnejšie počas zimného slnovratu 21. alebo 22. decembra a najsevernejšie počas letného slnovratu 20. alebo 21. júna. To má za následok, že na severnej pologuli je deň v tieto dáta najkratší, resp. najdlhší, a na južnej pologuli naopak. Hranica, keď je dĺžka dňa a noci rovnaká, nastáva počas jarnej (20. marca) a jesennej (23. septembra) rovníkovej rovnodennosti.¹ V tento deň sa na póloch mení polárna noc na polárny deň. Na rovníku je situácia jednoduchá – Slnko je nad obzorom vždy 12 h, vychádza a zapadá kolmo na obzor.

Pre nás je najvýhodnejšie pozeráť sa na situáciu zo sústavy spojenj sa so Slnkom a hviezdami. Hore popísané zmeny sa dajú popísať jednoducho. Okolo Slnka obieha Zem, ktorej rotačná os je v tejto sústave orientovaná pevne so sklonom asi $23,5^\circ$. Počas obehu sa tak postupne mení poloha slnečného tieňa na Zemi. Z dĺžky rovnobežiek v tieni Zeme by sme potom ľahko určili dĺžku noci. Vidíme, že za predpokladu rovnomerného obehu Zeme okolo Slnka po kružnici, je stredná dĺžka dňa aj noci na celej Zemi presne 12 h. Dni, ktoré sú pol roka od seba sa navzájom presne priemerujú na stred, teda na 12 h.

Tento predpoklad musíme pre riešenie problému opustiť. Zem obieha okolo Slnka po eliptickej dráhe – najbližšie k Slnku je v perihéliu, okolo 4. januára, a najďalej v aféliu, okolo 5. júna. Z druhého Keplerovho zákona potom môžeme vidieť, že v januári sa Zem okolo Slnka pohybuje rýchlejšie a v júni pomalšie. Preto je leto na severnej pologuli dlhšie ako na južnej (ktoré je práve okolo januára). Na severnej pologuli sú dni dlhšie ako 12 h viac ako pol roka, a to až 186 dní medzi rovníkmi. Na zbytok roka tak pripadá len 179 dní, čo je o týždeň menej. Máme záver, že priemerný deň je dlhší na severnej pologuli ako na južnej. Krátko ešte odhadneme dĺžku priemerného dňa na severnom póle. Je tu 186 dní Slnko nad obzorom a 179 dní pod ním. V priemere teda dostávame

$$T = 24 \text{ h} \frac{186 \text{ d}}{365 \text{ d}} = 12,23 \text{ h},$$

čo je o skoro 14 minút viac ako 12 hodín na rovníku.

Na záver spomeňme ešte iné javy spôsobujúce zmenu dĺžky dňa ako času, keď sa nachádza aspoň nejaká časť slnečného kotúča nad obzorom. Prvým z nich je samotný rozmer Slnka na oblohe, jeho polomer je asi $0,25^\circ$. Ďalej ohyb svetla v zemskej atmosfére spôsobuje zdanlivé

¹Situácia je v skutočnosti komplikovanejšia ako načrtnuté riešenie, ktoré považuje deň za čas medzi prechodom stredu disku Slnka matematickým horizontom. Správne by sa mala uvažovať stredná refrakcia na obzore, ktorá je približne $0,5^\circ$ a horný okraj disku. Získaný všeobecný záver je však naďalej platný.

nadvihnutie objektov najvýraznejšie pri obzore. Objekt nachádzajúci sa na horizonte je v skutočnosti už asi $0,5^\circ$ pod ním. Ďalej na dĺžku dňa má samozrejme vplyv aj tvar nášho lokálneho horizontu. Ako jeden zaujímavý vplyv uvedieme vplyv nadmorskej výšky (čím vyššie sa nachádzame, tým viac pod horizont budeme vidieť). Je zrejmé, že tieto efekty budú mať rôzny vplyv na rôznych zemepisných šírkach, predĺženie dňa totiž závisí na sklone dráhy Slnka na oblohe voči horizontu. Na póloch tak uvidíme ešte o niekoľko polárnych dní viac, ako je uvedené vyššie. Tento vplyv môže k dobe trvania priemerného dňa pridať aj štvrt hodiny.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha II.2 ... loď na obzoru

3 body; průměr 2,59; řešilo 88 studentů

Kačka a Katka sledují loď plující konstantní rychlostí do přístavu. Kačka stojí na skále nad přístavem, přičemž má oči ve výšce $h_1 = 20$ m nad hladinou. Katka se nachází dole pod skálou, její oči jsou v nadmořské výšce $h_2 = 1,7$ m. Pokud Katka zahlédne na obzoru vrchol blížící se lodi se zpožděním $t = 25$ min oproti Kačce, za jak dlouho loď vysoká $h = 30$ m dopluje do přístavu? Zemi považujte za dokonalou kouli se známým poloměrem.

Radka vzpomínala na dovolenou u moře.

Nákres situace je na obrázku 1. Bod S označuje střed Země a body P_1, P_2 jsou polohy očí prvního a druhého pozorovatele. Bod V_1 značí polohu vrcholu blížící se lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne první pozorovatel. Analogicky bod V_2 je vrchol lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne druhý pozorovatel.

Ve chvíli, kdy se na obzoru vrchol lodi objeví, je přímkou procházející okem pozorovatele a vrcholem lodi tečnou k zemskému povrchu. Její bod dotyku označíme T_1 pro prvního pozorovatele, respektive T_2 pro druhého pozorovatele.

Abychom zjistili, za jak dlouho loď dopluje, potřebujeme znát její rychlost a vzdálenost od přístavu po zemském povrchu. Nejprve vyjádříme vzdálenost lodi v okamžiku, kdy ji zahlédne první pozorovatel. K tomu využijeme znalost poloměru Země a velikost úhlu $\varphi_1 = |P_1SV_1|$. Pro tu zřejmě platí

$$\varphi_1 = |P_1ST_1| + |T_1SV_1| = \theta_1 + \rho_1,$$

kde jsme čistě pro přehlednost označili příslušné úhly řeckými písmeny. Velikosti úhlů θ_1 a ρ_1 dokážeme zjistit z příslušných pravoúhlých trojúhelníků

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{r}{r+h_1} \Rightarrow \theta_1 = \arccos \frac{r}{r+h_1}, \\ \cos \rho_1 &= \frac{r}{r+h} \Rightarrow \rho_1 = \arccos \frac{r}{r+h}. \end{aligned}$$

Na tomto místě můžeme využít aproximace – protože je $h \ll r$, platí

$$\frac{r}{r+h} = \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{h}{r}.$$

Zároveň víme, že pro malé úhly lze použít vzorec $\cos x = 1 - x^2/2$. Kombinací obou vztahů dostáváme

$$\rho_1 = \arccos \frac{r}{r+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{r}}, \quad \theta_1 \approx \sqrt{\frac{2h_1}{r}}.$$

Celková velikost úhlu φ_1 bude

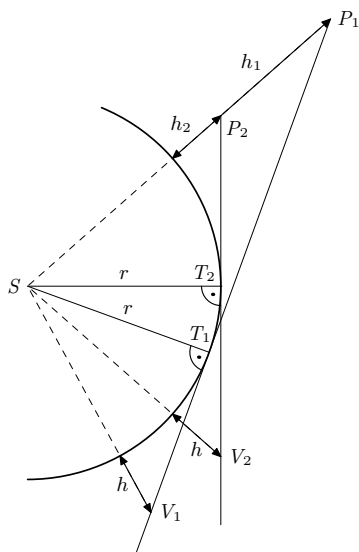
$$\varphi_1 = \arccos \frac{r}{r+h_1} + \arccos \frac{r}{r+h} \approx \frac{\sqrt{2h_1} + \sqrt{2h}}{\sqrt{r}}.$$

Vyjádříme-li tento úhel v radiánech a pak ho vynásobíme poloměrem Země, dostaneme povrchovou vzdálenost lodi v okamžiku, kdy její vrchol zahlédne první pozorovatel. Tu si označíme $s_1 = r\varphi_1$. Obdobným způsobem můžeme vyjádřit i povrchovou vzdálenost lodi s_2 v okamžiku, kdy její vrchol zahlédne druhý pozorovatel. Dostaneme

$$s_2 = r\varphi_2 = r \left(\arccos \frac{r}{r+h_2} + \arccos \frac{r}{r+h} \right) \approx \frac{\sqrt{2h_2} + \sqrt{2h}}{\sqrt{r}}.$$

Ze zadání víme, že loď se pohybuje rovnoměrně čili má konstantní rychlost v . Získáme ji vydělením rozdílu povrchových vzdáleností ($s_1 - s_2$) rozdílem časů t

$$v = \frac{s_1 - s_2}{t} \approx \frac{\sqrt{2r} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{t}.$$



Obr. 1: Povrch Země s tečnými paprsky.

Nyní již známe povrchovou vzdálenost lodi od přístavu i rychlost. Čas, za který loď dopluje, spočítáme jako jejich podíl. Musíme si však určit od jakého okamžiku čas počítáme. Chceme-li určit čas doplutí lodi od okamžiku, kdy ji spatřil druhý pozorovatel, dostaneme ho jako

$$t_2 = \frac{s_2}{v} \approx \frac{\sqrt{h_2} + \sqrt{h}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} t.$$

Všimněme si, že výsledek vůbec nezávisí na poloměru Země (za předpokladu, že platí $r \gg h, h_1, h_2$). Po dosazení hodnot ze zadání vychází $t_2 \doteq 53,5$ min. Pokud bychom se rozhodli počítat čas doplutí od okamžiku, kdy loď spatřil první pozorovatel, dostaneme obdobný vztah

$$t_1 = \frac{s_1}{v} \approx \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}} t \doteq 78,5 \text{ min}.$$

Radka Krížová

radka.krizova@fykos.cz

Úloha II.3 ... auto na dně jezera

5 bodů; průměr 3,70; řešilo 96 studentů

Ne jednou se ve filmu stalo, že auto spolu s cestujícími spadlo do vody. Vypočítejte, jakým momentem sil by musel řidič tlačit na dveře, aby je otevřel na dně jezera, když je jejich spodní rám 8,0 m pod hladinou. Uvažujte obdélníkové dveře s rozměry 132 cm \times 87 cm, které se otvírají podle svislé osy.

Katarína má ráda dramatické okamžiky na útesech.

Na dveře auta na dne jezera působí tlaková síla okolitej kvapaliny s veľkostí $F = pS$. Hydrostatický tlak je závislý na hĺbke h ako $p = h\rho g$, čiže v rôznych hĺbkach jazera je tento tlak rôzny. Keďže dveře majú nezanedbateľnú výšku, bude potrebné použiť diferenciálny počet. Dveře rozdělíme na elementárne štvorčeky a skúmame silové pomery na týchto elementoch. Pozdĺž osi y sa táto elementárna síla mení podľa vzťahu $dF = p dS = h\rho g dS = h\rho g dx dh$. Tlak atmosféry môžeme zanedbať, lebo predpokladáme, že atmosférický tlak je aj v aute.

Voči pántom dverí táto elementárna síla vyvodzuje elementárny moment. Keďže momentový účinok sily je rôzny v rôznych vzdialenostiach od pántov dverí, tak sa tento elementárny moment pozdĺž osi x mení podľa vzťahu $dM = x dF$, kde x je vzdialenosť od pántov dverí. Pre prehľadnosť označme šírku dverí d .

Matematický zápis momentu sily, ktorým musí šofér pôsobiť na dveře je $M = \int dM$. Z toho dostávame

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{dveře}} x dF = \int_{\text{dveře}} x h \rho g dS = \rho g \int_0^d \int_{h_1}^{h_2} x h dh dx = \rho g \left[\frac{h^2}{2} \right]_{h_1}^{h_2} \int_0^d x dx = \\ &= \rho g \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^d \left[\frac{h^2}{2} \right]_{h_1}^{h_2} = \frac{\rho g d^2}{4} (h_2^2 - h_1^2) \doteq 56\,000 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Na to, aby šofér otvoril dveře na dne jezera, musí na ne pôsobiť momentom sily 56 kNm. Ak bol rozmer 132 cm použitý ako výška dverí auta a rozmer 87 cm ako šírka dverí auta, potom by bol moment sily 36 kNm.

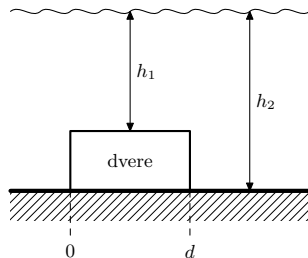
Katarína Častulíková

katka.castulikova@fykos.cz

Úloha II.4 ... vytahování ledu teplem

7 bodů; průměr 4,33; řešilo 55 studentů

Ve sklepe v hloubce $h = 4,2$ m je uskladněný led, který potřebujeme vytáhnout nahoru. Máme tepelný stroj, který pracuje s teplotou okolí a ledu s $\eta = 12\%$ účinností vůči jeho maximální možné účinnosti (dané Carnotovým cyklem). Teplota vzduchu je $T_v = 24^\circ\text{C}$, vytažený led



Obr. 2: Dvere auta pod hladinou.

potrebujeme mít na teplotě $T_{\max} = -9,0^\circ\text{C}$. Jakou teplotu musí mít led ve sklepe, aby jej bylo možné vytáhnout pomocí tohoto stroje? Proč to půjde, i když přitom zahřejeme led, který současně vytahujeme? *Karel má zálibu v podivných strojích.*

Carnotov cyklus je teoretický model stroja, ktorý pracuje čisto tým, že presúva teplo z teplejšieho objektu (v našom prípade vzduch) do chladnejšieho (v našom prípade ten vyťahovaný ľad). Dá sa spočítat, že maximálna dosiahnuteľná účinnosť je v takom prípade

$$\eta_C = 1 - \frac{T}{T_v},$$

pričom zadanie hovorí, že náš stroj má celkovú účinnosť $\eta_c = \eta \eta_C$.

Takže už vieme s akou účinnosťou daný ľad vyťahujeme. Čo z nej vieme ešte zistiť? Vieme, že účinnosť udáva podiel medzi vykonanou prácou a dodaným teplom. Teplo dodáva okolitý vzduch, čiže to nás až tak nezaujíma. To, čo nás zaujíma je teplo dodané ľadu. Teplo, ktoré nám dodal vzduch sa môže premeniť jedine na prácu a na teplo, ktoré dodáme ľadu. Symbolicky $Q_{\text{in}} = W + Q_{\text{out}}$. Z toho môžeme (s použitím definície účinnosti $\eta_c = W/Q_{\text{in}}$) vyjadriť teplo dodané ľadu v závislosti na vykonanej práci

$$Q_{\text{out}} = \frac{W}{\eta_c} - W = \frac{1 - \eta_c}{\eta_c} W.$$

Pričom netreba zabúdať, že η_c závisí od teploty ľadu, ktorá sa bude v priebehu vyťahovania meniť.

Predpokladajme, že vyťahovaný kus ľadu má hmotnosť m a počiatočnú teplotu T_0 (naša neznama). Potom na to, aby sme ho zdvihli o malú zmenu výšky dh je potrebná práca $dW = mg dh$. Ľad teda prijme teplo $dQ = mg dh (1 - \eta_c) / \eta_c$. Keď si mernú tepelnú kapacitu ľadu označíme c a dosadíme za η_c dostávame diferenciálnu rovnicu

$$dT = \frac{g}{c} \frac{1 - \eta \left(1 - \frac{T}{T_v}\right)}{\eta \left(1 - \frac{T}{T_v}\right)} dh,$$

kde aktuálnu teplotu ľadu značíme pre jednoduchosť T .

Teploty sú samozrejme udávané v Kelvinoch a tým pádom môžeme očakávať, že podiel T/T_v bude približne 1. Taktiež sa dá predpokladať, že $1 \gg \eta (1 - T/T_v)$, čo nám výraz napravo značne zjednoduší a diferenciálnu rovnicu môžeme prepísať do separovaného tvaru

$$(T_v - T) dT = \frac{g T_v}{c \eta} dh,$$

Tak nám stačí už len obe strany zintegrovať.

Na pravej strane sa integruje konštanta, takže výsledok bude jednoducho

$$\frac{gT_v}{c\eta} h,$$

kde zo zadania $h = 4,2\text{ m}$ je výška, o ktorú sme lad vytiahli.

Ľavá strana je polynóm, takže primitívna funkcia k nej je jednoducho $T_v T - T^2/2$. Integrujeme od T_0 po T_{\max} , a tak integrál bude

$$T_v (T_{\max} - T_0) - \frac{T_{\max}^2 - T_0^2}{2},$$

takže dostávame kvadratickú rovnicu

$$\frac{1}{2}T_0^2 - T_v T_0 - \frac{1}{2}T_{\max}^2 + T_v T_{\max} - \frac{gT_v}{c\eta} h = 0.$$

Rovnica nevyzerá najkrajšie, ale všetko (okrem neznámej) sú konkrétne zadané čísla. Stačí nám teda numericky dopočítat, pričom je dôležité nezabudnúť, že teploty treba dosádzať v Kelvinoch.

Dostaneme, že $T_0 \doteq -10,5^\circ\text{C}$ (druhý koreň vychádza okolo 58°C , čo nedáva zmysel nielen preto, že by sa už nejednalo o lad, ale hlavne preto, že by tento lad bol teplejší než vzduch, pričom všetky naše úvahy pracovali s tým, že lad je chladí). Môžeme si rovno overiť, že výraz $\eta(1 - T/T_v)$ dosahuje hodnoty maximálne rádu 0,01, čiže to, že sme ho zanedbali voči 1, bolo úplne v poriadku.

Šimon Pajger

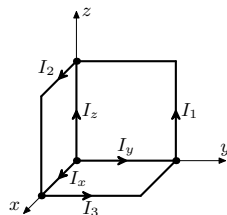
legolas@fykos.cz

Úloha II.5 ... detektor magnetických nestacionarit

řešilo 27 studentů

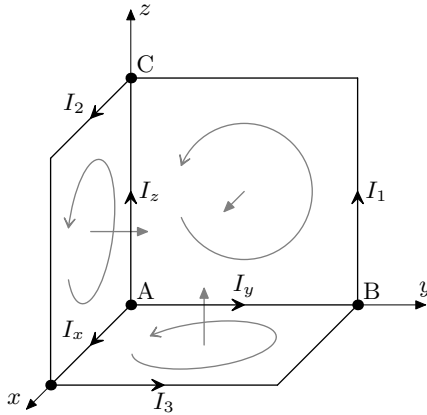
10 bodů; průměr 4,85;

Elektrický obvod znázorněný na obrázku může sloužit jako detektor nestacionárního magnetického pole. Jedná se o devět hran krychle tvořených elektrickým drátem. Elektrický odpor jedné hrany je R . Nacházeli se tato konstrukce v nestacionárním homogenním magnetickém poli, které má pro jednoduchosť konstantní směr a jeho velikost se mění jen pomalu, tečou na vyznačených místech proudy I_1 , I_2 , I_3 . Určete ze znalosti těchto proudů směr a časovou změnu velikosti magnetického pole v prostoru.



Vašek si říkal, že řešitelé budou mít z úlohy na elektromagnetickou indukci radost.

Odkud se berou proudy v našem detektoru? Konstrukci detektoru si lze představit jako systém spojených vodivých smyček. Jako nezávislé smyčky lze např. zvolit smyčky ležící v jednotlivých rovinách definovaných vždy dvěma kartézskými osami. Budeme hovořit o smyčkách 1, 2, resp. 3, myslíme-li smyčku ležící v rovině yz , zx , resp. xy . Tok magnetického pole těmito jednotlivými smyčkami se s časem mění, a proto se podle zákona elektromagnetické indukce na těchto smyčkách indukuje elektromotorické napětí, které zapříčiní vznik elektrického proudu. Úloha je komplikovaná v tom, že máme složitější systém, na kterém se projevuje elektromagnetická indukce, a je třeba si s ním správně poradit.



Obr. 3: Schéma zapojení včetně znázornění směru kladných napětí a orientace normál k jednotlivým stěnám.

Předpokládejme, že na jednotlivých smyčkách se nám indukovalo elektromotorické napětí U_i , kde $i = 1, 2, 3$, přičemž směr kladného napětí U_i je vyznačen na obrázku 3 šipkou uvnitř odpovídající smyčky. Pro doplnění, směr napětí nám udává, jakým směrem je urychlován kladný náboj ve smyčce. Elektromotorická napětí U_i nebudeme do obr. zakreslovat a to z toho důvodu, že ho nelze zakreslit jako jeden zdroj v každé smyčce. Uvědomme si, že při řešení vzniklého elektrického obvodu záleží na tom, jak bychom náhradní zdroj do smyčky umístili. Napětí U_i se ve skutečnosti rozdělí do všech větví každé smyčky a to třeba i nerovnoměrně. Zákon elektromagnetické indukce nám pouze říká, jaké je celkové elektromotorické napětí U_i pro danou smyčku. Tato informace nám však stačí. Za předpokladu, že jsou časové změny pomalé, můžeme uvažovat kvazistacionární přiblížení a přistoupit tak ke druhému Kirchhoffovu zákonu. Jeho aplikací na smyčku 1 dostaneme

$$U_1 - RI_y - 2RI_1 + RI_z = 0. \quad (1)$$

Druhý, třetí a čtvrtý člen představují po řadě úbytek napětí na větvích AB, BC a CA. V rámci kvazistacionárního přiblížení se nám také nikde v obvodu nemění nábojová hustota, a proto výsledný proud tekoucí do každého uzlu musí být nulový, neboli platí

$$I_x = I_3 - I_2, \quad I_y = I_1 - I_3, \quad I_z = I_2 - I_1. \quad (2)$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme

$$U_1 = R(4I_1 - I_2 - I_3). \quad (3)$$

Analogicky pro smyčky 2 a 3 dostaneme

$$U_2 = R(4I_2 - I_3 - I_1), \quad (4)$$

$$U_3 = R(4I_3 - I_1 - I_2). \quad (5)$$

Všimněme si, že tyto rovnice získáme z (3) cyklickou permutací $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Podobně v (2) se vyskytuje cyklická permutace $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Nyní se podíváme kvalitativně na to, co nám říká o napětí U_i zákon elektromagnetické indukce. Říká, že napětí U_i je rovno záporně vzaté časové změně toku Φ_i magnetického pole \mathbf{B} plochou Σ_i obepínající smyčku i , neboli zapsáno matematicky

$$U_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}. \quad (6)$$

Plocha Σ_i může být volena téměř libovolně, pro jednoduchost však volíme plochu rovinnou. Pak všechny Σ_i mají stejný povrch S . Navíc je pro zvolenou plochu důležité správně zvolit orientaci. Orientace plochy musí být zvolena „soulhasně“ s její hranicí, tj. smyčkou. Vzhledem k naší volbě kladného směru obíhání smyček je potřeba zvolit orientace normál k jednotlivým plochám, jak je znázorněno na obrázku 3. Pro volbu „soulhasně“ orientace si můžete pomoci pravou rukou. Při této volbě pak bude znaménko v rovnici (6) správně.

Magnetické pole je nestacionární a homogenní, a proto ho lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B} = B\mathbf{n},$$

kde $B \equiv B(t)$ je časově závislá velikost magnetického pole a \mathbf{n} je konstantní, v každém bodě stejně orientovaný jednotkový vektor. Vzhledem k naší volbě souřadnic (viz obrázek 3) a vzhledem k tomu, že jsou námi zvolené plochy časově neměnné, je tok magnetického pole smyčkou 1 jednoduše roven

$$\Phi_1 = B_x S,$$

kde B_x je x -ová komponenta magnetického pole. Z rovnice (6) pak plyne

$$U_1 = -S \frac{dB_x}{dt}. \quad (7)$$

Výše zmíněnými cyklickými permutacemi dostaneme

$$U_2 = -S \frac{dB_y}{dt}, \quad (8)$$

$$U_3 = -S \frac{dB_z}{dt}. \quad (9)$$

Směr a orientaci magnetického pole v prostoru určíme pomocí standardní volby sférických úhlů θ a φ . Úhel θ měří odklon od osy z a φ je úhel v rovině xy měřený v kladném směru od osy x . Projekce magnetického pole do směrů jednotlivých os pak jsou

$$\begin{aligned} B_x &= B \sin \theta \cos \varphi, \\ B_y &= B \sin \theta \sin \varphi, \\ B_z &= B \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Úhly θ a φ jsou dle zadání časově neměnné. Dosazením rovnic (10) do rovnic (7)-(9) dostaneme

$$U_1 = -S \frac{dB}{dt} \sin \theta \cos \varphi, \quad (11)$$

$$U_2 = -S \frac{dB}{dt} \sin \theta \sin \varphi, \quad (12)$$

$$U_3 = -S \frac{dB}{dt} \cos \theta. \quad (13)$$

Z rovnic (11)-(13) chceme vyjádřit úhly θ a φ a také časovou změnu velikosti magnetického pole. Jedná se vlastně o problém podobný transformaci kartézských souřadnic do sférických s tím rozdílem, že faktor $-S \frac{dB}{dt}$, který hraje roli radiální souřadnice r , může nabývat kladných i záporných hodnot. Z rovnic (11)-(13) můžeme určit pouze směr magnetického pole a ne jeho orientaci, tj. můžeme určit pouze podél jakých přímk magnetické pole míří. Ukážeme, proč tomu tak je.

Uvažujme, že známe $\frac{dB}{dt}$ a je např. záporné. Potom faktor $-S \frac{dB}{dt}$ hraje roli kladné radiální souřadnice a z transformace do radiálních souřadnic nalezneme úhly θ a φ . Stejně pravé strany rovnic (11)-(13) však dostaneme, pokud změnímme znaménko $\frac{dB}{dt}$ a zároveň provedeme inverzi, tj. záměnu $\theta \rightarrow \pi - \theta$ a $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$. Přesvědčit se můžete sami dosazením a použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce. V našem případě to znamená, že nejspíše rozdíl mezi prvním případem, kdy magnetické pole míří do orientovaného směru daného úhly θ a φ a zároveň jeho velikost klesá, a mezi druhým případem, kdy má magnetické pole opačnou orientaci danou úhly $\pi - \theta$ a $\varphi + \pi$ a zároveň jeho velikost roste.

Z rovnic (11)-(13) na základě předchozí diskuze a na základě podobnosti transformace kartézských souřadnic do sférických dostáváme vztah pro velikost časové změny magnetického pole

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{1}{S} \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$$

a vztah pro úhly udávající směr přímk, podél kterých míří magnetické pole,

$$\theta = \arccos \left(\frac{U_3}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}} \right),$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}(U_2, U_1),$$

kde funkce $\operatorname{atan2}$ představuje zobecnění funkce arctg . Na závěr dosadíme za napětí U_i z rovnic (3)-(5), čímž dostaneme hledané vztahy

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{R}{S} \sqrt{18(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - 14(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1)},$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{4I_3 - I_1 - I_2}{\sqrt{18(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - 14(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1)}} \right),$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}(4I_2 - I_3 - I_1, 4I_1 - I_2 - I_3).$$

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha II.P ... nákladný hokej

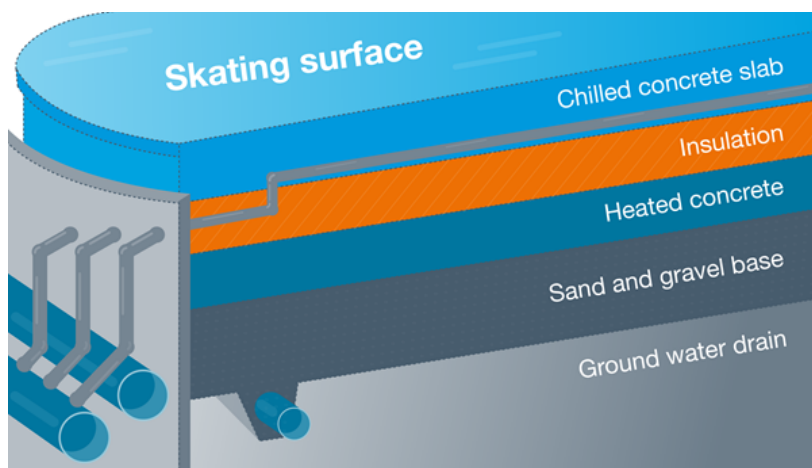
9 bodů; průměr 5,01; řešilo 74 studentů

Odhadněte, kolik stojí kompletní zalednění hokejového hřiště.

Danka nemá ráda hokej, ale bruslení ano.

Aby sme mohli vytvoriť odhad ceny zaľadnenia hokejového ihriska, musíme najprv zistiť, ako je vlastne celý proces realizovaný.

Hokejové ihrisko tvorí niekoľko vrstiev materiálov: ľadový povrch, vychladená betónová doska, izolácia, zohriaty betón, pieskový a štrkový podklad a odvod vody, viď obrázok 4 (zdroj²). Ľadový povrch je vytváraný vo vrstvách. Tenká vrstva vody nanosená na vychladenú betónovú dosku zamrzne takmer okamžite a vytvorí tak základ pre ľadovú plochu, na ktorý sa postupne nanášajú ďalšie tenké vrstvy vody. Časť prvých ľadových vrstiev sa farbja požadovanými farbami, aby bolo vytvorené ihrisko. Vychladená betónová doska spočiatku zabezpečuje zamŕzanie nanášaných vodných vrstiev a následne udržiava ľadový povrch zamrznutý, a to optimálne na teplote $T = -4\text{ }^{\circ}\text{C}$, ktorú ovplyvňuje mnoho faktorov, ako napríklad okolitá teplota v budove štadiónu, vonkajšia teplota a vlhkosť.² Chladenie je realizované chladiacim systémom zabudovaným v betónovej doske, ktorý si podrobnejšie rozoberieme o chvíľu. Vrstva izolácie a ohriateho betónu udržiava zem pod ľadom nezamrznutú, pretože inak by mohlo dôjsť k expanzii a prípadnému poškodeniu ihriska. Celá konštrukcia ihriska je položená na podklade tvorenom pieskom a štrkom, ktorý obsahuje odvod vody.



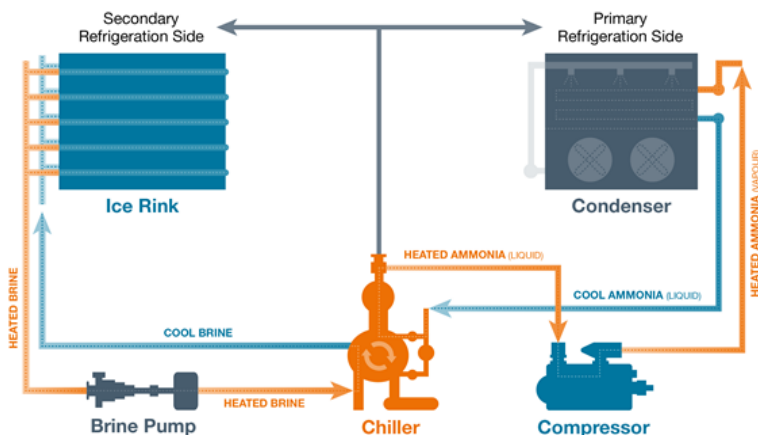
Obr. 4: Prierez ľadom a vrstvami podkladov hokejového ihriska

Samotné chladenie je realizované pomocou nepriameho chladiaceho systému.² Ten používa tekutý chladič (zvyčajne amoniak), ktorý absorbuje teplo zo sekundárnej tekutiny (zvyčajne slaná voda, prípadne etylén či propylénglykol), ktorá zase absorbuje teplo zo zdroja. Sланá voda sa používa preto, lebo mrzne až pri teplote nižšej ako je bod mrazu čistej vody na povrchu. Pri teplote nižšej ako $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ môže voda stále tiecť cez potrubie, ale zároveň je dosť studená na to, aby mohla zabezpečiť zamrznutie vody na povrchu. V nepriamom chladiacom systéme sú tri hlavné komponenty: chladič, kompresor a kondenzátor. Proces chladenia je prehľadne znázornený na obrázku 5 (zdroj³), preto ho tu nebudeme slovne popisovať.

Z tohto popisu hokejového ihriska už máme celkom dobrú predstavu o tom, ako funguje chladenie hokejového ihriska, a čo je na vytvorenie ľadovej plochy potrebné. Podme sa teda postupne pozrieť na jednotlivé náklady s tým spojené. Budeme pritom predpokladať, že nestavíme hokejové ihrisko nanovo, ale už máme kúpený kompletný chladiaci systém.

²<https://tinyurl.com/ice-rinks-refrigeration>

³<https://tinyurl.com/ice-rinks-refrigeration>



Obr. 5: Schéma nepriameho chladiaceho systému použitého na chladenie ľadovej plochy.

Na zaľadnenie ihriska budeme určite potrebovať vodu, a to nie malé množstvo. Na vytvorenie povrchu hokejového ihriska je potrebných 45 – 57 tisíc litrov vody, pričom ľadová vrstva má typicky hrúbku medzi 0,75 až 1,5 palca (cca 1,9 – 3,8 cm).³ Hrúbka vrstvy nemôže byť tenšia, pretože by sa korčuľa mohla ľadom prerezať až k betónu. Nemôže byť ani hrubšia, pretože by pre väčšie množstvo ľadu nemuselo postačovať chladenie, a teda by sa ľad na povrchu roztápal. Oficiálna hokejová ľadová plocha by mala byť $l = 200$ ft (teda 60,96 m) dlhá a $w = 85$ ft (čiže 25,91 m) široká.⁴ Ak by bola vrstva ľadu hrubá $h = 2,9$ cm (priemer typických hrúbok uvedených vyššie), a to na celej ploche ihriska, tak celkový objem ľadu na ihrisku by bol

$$V_1 \approx h l w \doteq 46 \text{ m}^3,$$

čo je teda 46 000 ℓ ľadu. Ako je všeobecne známe, hustota ľadu⁵ $\rho_l = 917 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je menšia ako hustota vody $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tento objem ľadu preto zodpovedá vode s objemom

$$V_v = \frac{\rho_l}{\rho_v} V_1 \doteq 42\,000 \text{ ℓ}.$$

Vidíme, že táto hodnota je o niečo menšia ako minimálna hodnota, ktorú sme uviedli vyššie. Nesmieme zabúdať ani na straty spôsobené napríklad vyparovaním vody počas procesu chladenia, keďže vyparovanie z povrchu prebieha v určitej miere pri všetkých teplotách kvapaliny. Uvažujme preto, že na vytvorenie požadovanej vrstvy ľadu spotrebujeme $V_v = 45\,000$ ℓ vody. Predpokladajme, že naše hokejové ihrisko zaľadňujeme niekde v Prahe. Je žiaduce, aby ľad na hokejovom ihrisku bol čo najčistejší, keďže práve taký ľad má optimálne vlastnosti pre korčuľovanie.⁶ Použijeme naň preto pitnú vodu a budeme predpokladať, že má dostatočne dobré

⁴<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

⁵<https://cs.wikipedia.org/wiki/Led>

⁶<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

vlastnosti a nemusíme preto kupovať prostriedky na čistenie vody. Cena pitnej vody v Prahe je v súčasnosti⁷ $c_v = 50,30 \text{ Kč}\cdot\text{m}^{-3}$. Čiže za vodu, z ktorej vyrábame ľad celkovo zaplatíme

$$S_1 = c_v V_v \doteq 2\,270 \text{ Kč}.$$

Druhá vec, ktorá bude najviac prispievať do ceny zaľadnenia ihriska je elektrická energia spotrebovaná chladiacim systémom. Uvažujme, že chladiaci systém ako celok má príkon⁸ $P = 106 \text{ kW}$. Nech vytvorenie ľadovej plochy trvá⁹ $t = 48 \text{ h}$. Za túto dobu chladiaci systém spotrebuje energiu

$$E = Pt \doteq 5\,088 \text{ kWh}.$$

Pozrime sa na to, či naozaj bude toľkoto energie stačiť na premenu studenej vody na ľad. Hmotnostné skupenské teplo tuhnutia ľadu je¹⁰ $l_t = 334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. To je o dva rády viac ako energia prislúchajúca zmene teploty vody o 1°C , teda ak uvažujeme zamrzanie vody s teplotou blízkou 0°C . Pre odhad nám stačí uvažovať iba teplo potrebné na zmenu skupenstva. To spočítame ako

$$Q = l_t V_v \rho_v \doteq 15 \text{ GJ} \doteq 4\,170 \text{ kWh}.$$

Takéto množstvo tepla potrebujeme z vody odobrať, aby sme ihrisko zaľadnili. Ak by sme jednoducho predpokladali, že chladiaci systém musí dostať na svoje fungovanie aspoň toľko elektrickej energie, koľko tepla musí odobrať vode, tak z našich výpočtov vyplýva, že táto energia bude postačovať. Samozrejme, situácia je oveľa komplikovanejšia. Zariadenia nemajú 100%-nú účinnosť, čo vyplýva už zo zákonov termodynamiky, a tiež nesmieme zabúdať na rôzne tepelné straty. V každom prípade môžeme zhodnotiť, že nami získaná energetická spotreba chladiaceho systému môže byť reálna. Teraz spočítajme, koľko nás bude táto energia stáť. Uvažujme priemernú cenu elektrickej energie¹¹ $c_E = 1,9 \text{ Kč}\cdot\text{kWh}^{-1}$. Potom za elektrinu spotrebovanú pri zaľadnení hokejového ihriska zaplatíme

$$S_2 = c_E E \doteq 9\,670 \text{ Kč}.$$

Dokopy za vodu, ktorú necháme premeniť na ľad a elektrickú energiu, ktorá sa spotrebuje chladiacim systémom, zaplatíme $S = S_1 + S_2 \doteq 12\,000 \text{ Kč}$.

Síce uvažujeme, že chladiaci obeh už obsahuje všetky potrebné komponenty a nie je potrebné ich preto nakupovať. Zo zaujímavosti si ale môžeme spočítať, koľko by mohla stáť slaná voda použitá v chladiacom obeh. Objem vody použitý na chladenie je asi $V_c = 9\,000$ galónov,¹² teda cca $34\,000 \text{ l}$. Predpokladajme, že budeme opäť brať pôvodne pitnú vodu. Zaplatíme za ňu

$$S_3 = c_v V_c \doteq 1\,950 \text{ Kč}.$$

Na výrobu slanej vody budeme ešte potrebovať soľ, pričom môžeme použiť NaCl pre priemyselné účely. Uvažujme, že slaný roztok bude čo najviac nasýtený, aby mal čo najnižšiu teplotu tuhnutia. V tom prípade bude hmotnostná koncentrácia soli vo vode¹³ $k = 23,3\%$, teda musí platiť

$$k = \frac{m_s}{m_s + m_c},$$

⁷<https://www.pvk.cz/vse-o-vode/cena-vodneho-a-stocneho/>

⁸<http://tiny.cc/screw-chiller>

⁹<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

¹⁰https://sk.wikipedia.org/wiki/Merné_skupenské_teplo_topenia

¹¹<https://www.usetreno.cz/energie-elektrina/cena-elektriny/>

¹²<https://www.rsi.edu/blog/hvacr/ice-hockey-rink-refrigeration/>

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Brine#Refrigerating_fluid

kde m_s je hmotnost soli a m_c hmotnost vody v potrubí. Odtiaľ si úpravami vyjadríme hmotnosť soli, ktorú budeme potrebovať a dostaneme

$$m_s = m_c \frac{k}{1-k} = V_c \rho_v \frac{k}{1-k} \doteq 10\,330 \text{ kg}.$$

Nech kupujeme priemyselnú NaCl za cenu¹⁴ $c_s = 6 \text{ Rs} \cdot \text{kg}^{-1} \doteq 1,80 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$. Potom za sol zaplatíme

$$S_4 = c_s m_s \doteq 18\,600 \text{ Kč}.$$

Slaná voda v chladiacom obehu by teda podľa našich odhadov stála asi 20 500 Kč. V porovnaní s cenou spotrebovanej elektrickej energie na jedno zaľadnenie a takisto ceny potrebnej vody vidíme, že keby sme mali nakupovať aj komponenty do chladiaceho obehu, tak aj cena zaľadnenia by značne vzrástla.

Ak by sme naozaj chceli hokejové ihrisko zaľadniť, potrebovali by sme na to určite aj nejakých odborných pracovníkov, ktorí by sa podieľali na realizácii celého procesu. Týchto pracovníkov by sme, samozrejme, tiež museli vyplatiť, čo by zdvihlo cenu zaľadnenia. Uvažujme, že títo technickí pracovníci majú v roku 2020 minimálnu mzdu¹⁵ (nepodarilo sa nám nájsť žiadne údaje o tom, koľko v ČR reálne zarábajú) $m = 87,30 \text{ Kč} \cdot \text{hod}^{-1}$ Zamestnávateľ musí ešte okrem tejto sumy za svojho zamestnanca odvieť ďalších 34% do zdravotnej a sociálnej poisťovne.¹⁶ Uvažujme, že počas celej doby zaľadňovania, sú v každej chvíli prítomní priemerne $n = 3$ zamestnanci. Potom celkovo za jedno zaľadnenie zaplatí zamestnancom

$$S_5 = 1,34 m n \doteq 16\,850 \text{ Kč}.$$

Na záver môžeme zhrnúť, že ak máme pripravené všetko vybavenie na zaľadnenie hokejového ihriska, tak zaň zaplatíme asi 12 000 Kč. Za odborných pracovníkov, ktorí zaľadnenie vykonajú, zaplatíme ďalších 16 850 Kč. Celkovo teda bude jedno zaľadnenie stáť odhadom 30 000 Kč.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha II.E ... hrnečku dost

13 bodů; průměr 9,61; řešilo 49 studentů

Proměřte závislost rychlosti, s jakou přibývá kvásek, na čase a na okolní teplotě.

Soutěž V průběhu měření vyfoťte sebe nebo třeba buchty, které ze vzniklého kvásku upečete, a fotografie nám pošlete na adresu fykos-solutions@fykos.cz. Vystavíme je na našem Facebooku a Instagramu a autora nejlepší fotky oceníme zbrusu novými FYKOSími ponožkami.

Kátě nějak pomalu nabýval kvásek.

Teorie

Při kynutí kvásku pozorujeme vlastně množení kvasinek, které při pučení (rozdělení mateřské buňky na dvě dceřiné) rozkládají cukr na alkohol a oxid uhličitý. Právě tím je zvětšován objem

¹⁴<http://tiny.cc/sodium-chloride>

¹⁵<https://www.kurzy.cz/kalkulacka/minimalni-mzda/>

¹⁶<https://www.migrace.com/cs/poradna/informace-pro-cizince/cizinci-ze-zemi-mimo-eu/pracovni-pomer/zamestnani-mimo-eu-odvody>

kvásku. Ideální teplota pro množení kvasinek je kolem¹⁷ 30 °C, z tohoto důvodu byl experiment proveden pro teploty v rozmezí 25 °C až 40 °C. Vzhledem k tomu, že jedna kvasinka se rozdělí vždy na dvě dceřiné, které se následně také dělí, lze předpokládat exponenciální průběh.

Samotný objem závisí především na teplotě kvůli velké teplotní roztažnosti plynu. Rychlost množení je pak ovlivněna mnoha faktory, mezi hlavní patří nejen počáteční množství kvasinek, jejich druh a aktivita, ale také teplota, při které pučení probíhá, a množství cukru. Pokud droždí není dostatečně dobře promíseno s cukrem, dochází k růstu objemu pomaleji, neboť má k cukru přístup jen část kvasinek. Proto se ke kvasinkám přidává ještě nějaká tekutina (v našem případě mléko), která usnadní promísení, protože se v ní cukr s droždím alespoň částečně rozpustí.

Měření

Během experimentu je třeba dát pozor na udržování stejných počátečních podmínek pro každé měření. Vždy jsme použili zarovnanou lžici moučkového cukru (je nutné dát vždy stejné množství, neboť při různém bychom nemohli správně zhodnotit vliv teploty). Pokus by mohla ovlivnit také hrubost zrn cukru, protože každý druh se rozpouští jinak dobře, a proto je vhodné použít pokaždé stejný. Objem jsme měřili pomocí odměrného válce, který měl stupnici s dílky po 5 ml.

Na druhu nádoby také záleží, jelikož po určité době dochází k oddělení částí suspenze. Lehčí kvasinky vyplavou na povrch, zatímco mléko s rozpuštěným cukrem se drží u dna. U vyšší odměrky pak mají kvasinky ve vyšších vrstvách menší množství cukru v okolí, a tudíž může docházet k méně častému pučení než v mělčí odměrce. Nicméně ve vysoké nádobě můžeme určovat objem s lepší přesností, neboť je snazší vyrobít stupnici s jemnějším dělením. Z tohoto důvodu jsme pro měření použili odměrný válec.

Konstantní teplotu jsme udržovali vodní lázní a kontrolovali teploměrem. Droždí jsme rozmělnili na co nejmenší části, vhodili spolu s cukrem do odměrného válce, dolili do 200 ml mlékem a promíchali. Od této chvíle jsme na stopkách měřili čas a zaznamenávali jej pokaždé, když se objem zvětšil o 5 ml. Objem jsme odečítali z rysky na středu mezi nejnižším a nejvyšším bodem hladiny.

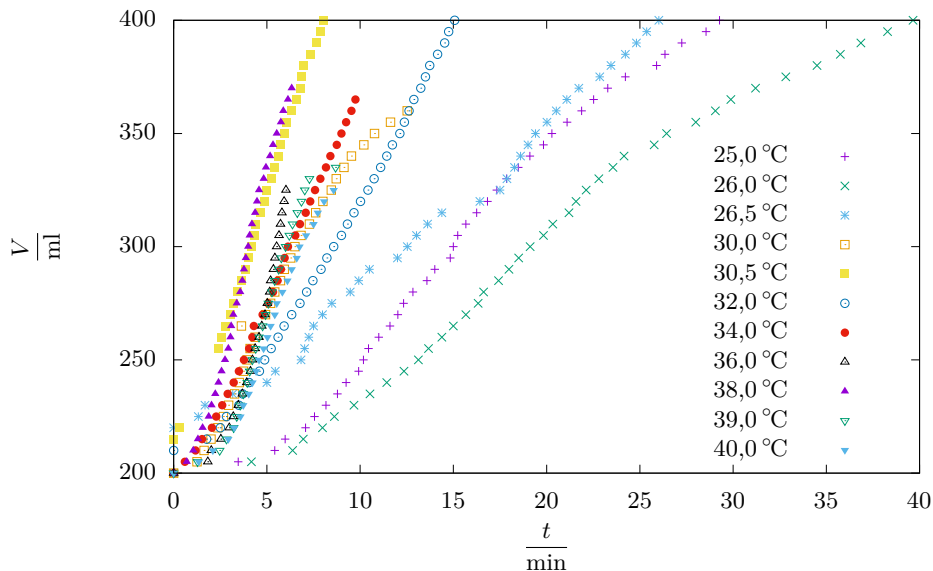
V případě, že stěna z kvasinek byla na hladině moc tenká, začaly bubliny plynu prskat a plyn se uvolňoval do okolí. V tomto okamžiku jsme měření ukončili. Z důvodu možného praskání bublinek není vhodné po začátku měření směs promíchávat, neboť by se tím objem výrazně snížil, i když na úkor toho dochází k oddělování částí suspenze a kvasinky tak mají horší přístup k cukru rozpuštěnému v mléce.

Naměřená data jsme vynesli do grafu 6. Pro každou teplotu jsme je proložili regresní přímkou, hodnoty směrnic jsou uvedeny v tabulce 1 a znázorněny v grafu 7.

Diskuze

Z regrese jsme vyjmuli počáteční hodnoty, kdy pučení probíhalo ještě velmi pomalu. Z naměřených dat je patrné, že průběh byl většinou víceméně lineární. To lze odůvodnit především špatnou distribucí cukru ke kvasinkám a také chladnutím prostředí s kvasinkami, když vystoupaly v odměrném válci nad hladinu vodní lázně a jejich teplota šla následně regulovat jen velmi

¹⁷NEUPAUEROVÁ, Karla. Bakalářská práce: Využití kvasinek v potravinářském průmyslu. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2012. Dostupné z http://digilib.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/21723/neupauerova_2012_bp.pdf?sequence=1&isAllowed=y



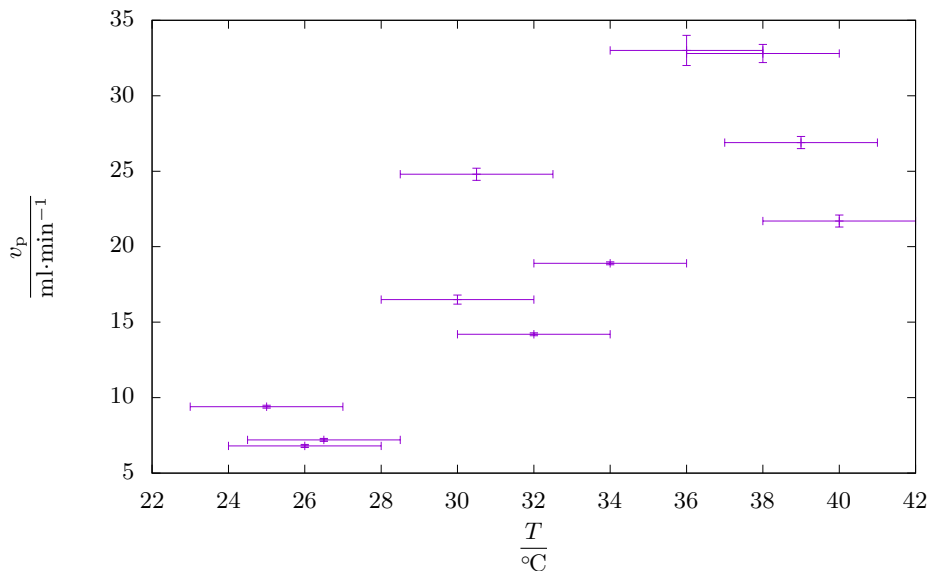
Obr. 6: Závislost objemu kvásku na čase pro různé teploty.

těžko. Po konci měření byla teplota kvasinek většinou o 1 až 2 °C nižší než počáteční, což může být, spolu s nedostatkem cukru, jedním z důvodů poklesu rychlosti pučení po určitém čase. Dalším z důvodů je též praskání bublinek vzduchu, které nemusíme vždy zpozorovat a zanášejí tak do měření další nejistotu.

Tab. 1: Závislost rychlosti pučení kvasinek na teplotě, která byla měřena s chybou 2 °C.

T °C	v_p ml·min ⁻¹
25,0	9,4 ± 0,1
26,0	6,8 ± 0,1
26,5	7,2 ± 0,1
30,0	16,5 ± 0,3
30,5	24,8 ± 0,4
32,0	14,2 ± 0,1
34,0	18,9 ± 0,1
36,0	33,0 ± 1,0
38,0	32,8 ± 0,6
39,0	26,9 ± 0,4
40,0	21,7 ± 0,4

Rychlosti množení kvasinek v závislosti na teplotě prostředí jsme vynesli do grafu 7, kde



Obr. 7: Závislost rychlosti pučení kvasinek na teplotě.

je patrné, že v rámci chyby roste rychlost pučení s rostoucí teplotou až do svého maxima při teplotě 36 °C. Z tohoto grafu lze usuzovat, že ideální teplota pro množení pekařských kvasnic je kolem 36 °C.

Závěr

V rámci experimentu se nám nepodařilo potvrdit počáteční předpoklad exponenciálního nárůstu objemu. K tomu by došlo v ideálních podmínkách, které však nejsme schopni s běžným vybavením zaručit. Místo toho jsme pozorovali lineární závislost objemu na čase.

Ověřili jsme, že rychlost pučení kvasinek závisí na teplotě a to tak, že nejlepší podmínky pro množení jsou kolem 36 °C. Tento údaj se sice plně neshoduje s citovanou literaturou (kde byla uvedena ideální teplota 30 °C), to však může být způsobeno jiným druhem kvasnic. Pod 30 °C probíhá množení velmi pomalu, s rostoucí teplotou se zvyšuje tendence kvasinek množit se až do zmíněných 36 °C, odkud následně pozvolna klesá.

Kateřina Charvátová

katerina.charvatova@fykos.cz

Úloha II.S ... kmitající RLC

10 bodů; průměr 4,78; řešilo 36 studentů

Uvažujme obvod, ve kterém jsou sériově zapojeny cívka, kondenzátor, rezistor a zdroj napětí. Cívka má indukčnost L , kondenzátor má kapacitu C a rezistor má odpor R . Zdroj vytváří střídavé napětí $U = U_0 \cos(\omega t)$. Všechny součástky považujte za ideální. S pomocí zákona zachování energie napište rovnici pro náboj, rychlost náboje (proud I) a zrychlení náboje (rychlost

změny proudu I). Jedná se o rovnici tlumených kmitů. Porovnáte-li ji s rovnicí pro tlumené kmity závaží na pružině, co v tomto obvodu hraje roli hmotnosti, tuhosti pružiny a tření? Jaká je přirozená frekvence kmitů?

Dále pomocí veličin L , R a ω vyjádřete kapacitu kondenzátoru, při které by byl fázový posun napětí na kondenzátoru roven $\frac{\pi}{4}$. Jaká bude amplituda napětí na kondenzátoru při tomto fázovém posunu?

Nemechanické kmity jsou taky kmity.

Rovnice pro náboj, jeho rychlost a zrychlení je možné odvodit pomocí zákona zachování energie, který nám říká, že součet napětí přes všechny komponenty obvodu musí být roven napětí na zdroji, neboli

$$\frac{Q}{C} + RI + JL = U_0 \cos(\omega t).$$

Za výchylku lze v tomto systému považovat náboj na kondenzátoru, za rychlost proud I a za zrychlení pak zrychlení proudu J . Tím pádem hraje roli tuhosti pružiny veličina $\frac{1}{C}$, hmotnost odpovídá indukčnosti L a konstantu tření γ lze vyjádřit jako $\frac{R}{L}$ (musíme si uvědomit, že jsme sílu tření definovali jako γmv , a tedy koeficient u třecí síly je γm ; proto dělíme R veličinou L , jež odpovídá hmotnosti). Roli vnější síly $F \cos(\omega t)$, která nutí systém k oscilacím, hraje napětí $U_0 \cos(\omega t)$. Přirozená frekvence kmitů oscilátoru s pružinou je dána jako $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, čemuž v našem obvodu odpovídá $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$.

Fázový posun mezi napětím a oscilacemi náboje je dán vztahem

$$\cotg \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega},$$

který jsme odvozovali v seriálu. Napětí na kondenzátoru se mění s oscilacemi náboje na kondenzátoru takže sdílí stejný fázový posun. Pro požadovaný fázový posun lze psát

$$\begin{aligned} \cotg \frac{\pi}{4} = 1 &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega}, \\ \omega_0^2 &= \omega(\gamma + \omega), \\ \omega_0 &= \sqrt{\omega(\gamma + \omega)}. \end{aligned}$$

V našem obvodu pak platí

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{LC}} &= \sqrt{\omega \left(\frac{R}{L} + \omega \right)}, \\ C &= \frac{1}{\omega(R + \omega L)}. \end{aligned}$$

Amplituda napětí na kondenzátoru závisí na amplitudě náboje na kondenzátoru (označíme ji Q_0) jako

$$U_C = \frac{Q_0}{C}.$$

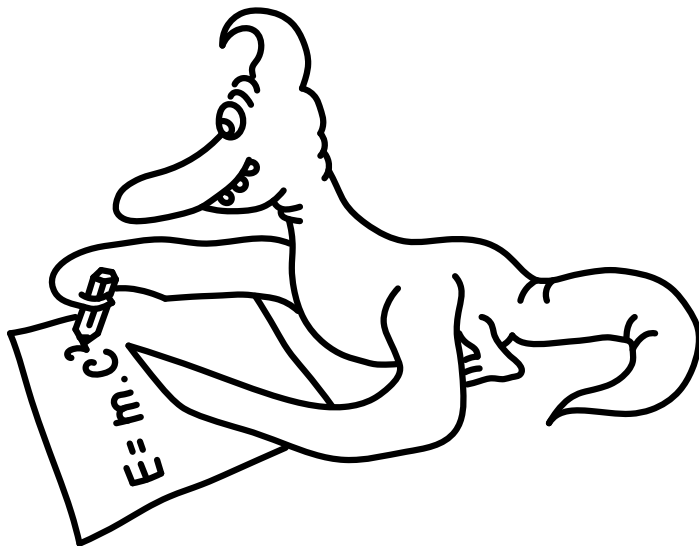
Amplituda náboje je dána vztahem pro amplitudu tlumených kmitů, je tedy rovna

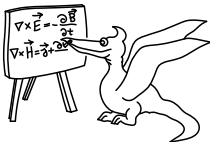
$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2}} = \\ &= \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega \left(\frac{R}{L} + \omega\right) - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2} R \omega}, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku dosadili za získanou hodnotu C . Dostáváme výslednou amplitudu kmitů napětí, která má velikost

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{2}R\omega} \omega(R + \omega L) = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \left(1 + \omega \frac{L}{R}\right).$$

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz





Seriál: Víc oscilátorů víc

Na konci minulého dílu bylo naznačeno, že se budeme zabývat více navzájem propojenými oscilátory či oscilacemi ve více dimenzích. Než se ovšem do takových úkolů pustíme, bude třeba poněkud zformalizovat některé matematické kroky, které jsme při odvození chování jednoduchých oscilací učinili. Konkrétně se bude jednat o dvě důležité kapitoly z matematiky – naším prvním cílem budou derivace a diferenciální rovnice a poté se podíváme na některé aspekty komplexních čísel. Doufáme, že většina z témat pro vás bude pouze opakováním, zatímco jiná přinesou nový pohled na věc. Doporučujeme také prozkoumat různé jiné zdroje mimo tento seriál, pokud si vysvětlením nějaké problematiky nebudete jistí. Jelikož se jedná o velmi rozšířené koncepty, zdrojů pro studium existuje bezpočet.

Pod mikroskopem jsou všechny křivky přímky

V minulých dílech jsme se zabývali přiblížením určité funkce v okolí nějakého bodu. Je to právě ukotvení této aproximace v rigoróznějším matematickém formalismu, které vede k pojmu derivace. Proces tohoto ukotvení začneme na jednoduchém konkrétním případě – polynomiální funkci.

Již víme, že pro malá h platí

$$(1 + h)^a \approx 1 + ah.$$

Při řešení předchozích problémů jsme si také ukazovali, že pro $A \gg B$ lze psát

$$(A + B)^a = A^a \left(1 + \frac{B}{A}\right)^a \approx A^a \left(1 + \frac{aB}{A}\right).$$

Vždy jsme tedy aproximovali funkci x^a v okolí nějakého bodu (v prvním případě v okolí bodu 1, v případě druhém v okolí bodu A) tím, že jsme provedli rozvoj pro určité malé reálné číslo. Samotná hodnota funkce v okolí tohoto bodu závisí na několika parametrech – jednak na funkční hodnotě právě v tom bodě, jehož okolí nás zajímá, dále pak na velikosti zvoleného malého čísla a nakonec na nějaké kombinaci parametrů odvozených ze základní funkce v daném bodě. Tato *odvozenina*, vytvořená z parametrů funkce a její funkční hodnoty v příslušném bodě, se právě nazývá derivace. Formálně lze psát, že naše aproximace funguje jako

$$\Delta x \ll x_0 : f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \cdot \Delta x,$$

kde hovoříme o *derivaci funkce f dle proměnné x v bodě x_0* . Jako ilustraci si vezměme předchozí případ, kdy jsme měli

$$(1 + h)^a \approx 1 + ah,$$

pokud tedy definujeme $g(x) = x^a$, můžeme psát

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_1 = a.$$

Jelikož ve druhém uvedeném příkladě platí

$$(A + B)^a \approx A^a + aA^{a-1}B,$$

lze obdobně psát

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_A = aA^{a-1}.$$

Můžeme zkontrolovat, že tento výraz skutečně funguje pro $A = 1$. Obecně pak z naší lineární aproximace definujeme derivaci funkce v daném bodě jako

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ohledně limity $\Delta x \rightarrow 0$ nám stačí vědět, že indikuje, že $\Delta x \ll 1$ je velmi malé číslo. Přesnou definicí se zde nebudeme zabývat. Derivace funkce je tedy také funkcí, která se může bod od bodu měnit. Často pak vynecháváme konkrétní označení bodu, ve kterém je derivace vyhodnocena, a používáme stejné označení jako v originální funkci. Níže je ve zkratce uveden seznam derivací některých běžných funkcí

$$\begin{aligned} \frac{dx^a}{dx} &= ax^{a-1}, \\ \frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} = \cos x, \\ \frac{d \cos x}{dx} &= -\sin x, \\ \frac{de^x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = e^x, \\ \frac{d \ln x}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Kombinujeme funkce

Jelikož derivace počítáme ve fyzice velmi často, vyplatí se zamyslet nad jejich algebrou. Je opravdu nezbytné vždy explicitně počítat limitu funkcí? Nebo lze zjistit hodnoty derivací z nějakého množství základních bloků? Ukazuje se, že to možné je; za pomoci několika pravidel.

Prvním pravidlem, které si ukážeme, je linearita. To znamená, že pokud máme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ a definujeme pomocí nich funkci $h(x) = af(x) + bg(x)$, kde a a b jsou nějaké kontanty, bude platit

$$\frac{dh}{dx} = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}.$$

Tím pádem derivace součtu funkcí je prostě pouze součet derivací funkcí. O něco složitější chování (a jak se později ukazuje, naprosto zásadní vlastnost derivací) charakterizuje tzv. Leibnizovo pravidlo, které odpovídá na otázku, jak naložit se součinem funkcí. Platí

$$\begin{aligned} \frac{dfg}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x\right)\left(g(x) + \frac{dg}{dx}\Delta x\right) - f(x)g(x)}{\Delta x} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}, \end{aligned}$$

kde jsme zanedbali druhý řád v Δx v čitateli.

Posledním pravidlem, které budeme odvozovat, je pravidlo pro derivaci složené funkce. Definujme funkci $f(x) = g(h(x))$, kde $g(x)$ i $h(x)$ jsou další funkce. Pak platí

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - g(h(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g\left(h(x) + \frac{dh}{dx}\Delta x\right) - g(h(x))}{\Delta x}.$$

Pokud lze předpokládat, že $\frac{dh}{dx}\Delta x = \Delta h$ je stále malé číslo, dostaneme

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x)) + \frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}\Delta x - g(h(x))}{\Delta x} = \frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}.$$

Toto pravidlo se označuje jako řetězové a bude hrát důležitou roli při odvozování derivací některých složitých funkcí.

Fyzikální význam derivací

Ačkoli je tento matematický aparát velmi zajímavý, jeho fyzikální význam je snad ještě zajímavější. Už tušíme, že schopnost charakterizovat chování nějaké funkce v okolí určitého bodu pomocí lineární aproximace je klíčová ke zjednodušení popisu chování mnoha systémů. Nyní nám derivace umožňuje popsat, jak rychle se příslušná funkce mění v okolí daného bodu – derivace určuje *míru změny veličiny*. Efektivně to znamená, že pro dostatečně malé okolí bodu nějaké funkce lze tuto funkci aproximovat jako přímkou, přičemž směrnice této přímky je dána právě derivací v tomto bodě.

Popis míry změny veličiny je jedním z ústředních bodů jakéhokoliv fyzikálního zkoumání. Například v kinematice často sledujeme pozici určitého hmotného bodu v závislosti na čase. Pokud se zaměříme na velmi krátký časový interval, lze trajektorii bodu popsat přímkou, tj. předpokládáme, že se bod v tomto časovém úseku pohybuje víceméně rovnoměrně nebo je v klidu. Mírou změny polohy je v tuto chvíli zřejmě rychlost. Z toho lze usoudit, že rychlost je derivací polohy podle času. Symbolicky zapsáno, pro polohu x jakožto funkci času t (píšeme $x = x(t)$) máme

$$v = \frac{dx}{dt},$$

kde v je rychlost bodu.

Odvození derivací pro popis dynamiky částic je středobodem newtonovské mechaniky. Zkusme tedy zformulovat Newtonovy zákony v jazyce derivací. První zákon mluví o tom, že tělesa, na která nepůsobí žádná síla, setrvávají v klidu či v rovnoměrném přímočarém pohybu. To znamená, že rychlost tělesa se nemění – míra změny rychlosti tělesa je nulová, což lze s využitím přechozího zapsat jako

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Druhý zákon dává do souvislosti zrychlení a síly působící na těleso. Důležitým zobecněním je, že pokud ponecháme volnost pro změnu hmotnosti s časem, píšeme

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

Třetí zákon nehovoří o změnách čili zůstává v originálním znění.

Pokud se hmotnost tělesa s časem nemění, můžeme psát (což lze jednoduše odvodit z výše uvedených pravidel)

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

kde $\frac{d^2x}{dt^2}$ značí *druhou derivaci* polohy podle času, kterou identifikujeme jako zrychlení. Jelikož ve většině případů jsou vnější síly závislé pouze na poloze, rychlosti či času, jsme schopni druhý Newtonův zákon vyjádřit čistě pomocí času, polohy a derivace polohy.

Kmity ve formalismu derivací

Pro závaží na pružině platí Hookův zákon

$$F = -kx,$$

kde $x = l - l_0$ označuje prodloužení pružinky vzhledem k rovnovážné poloze. Aplikací druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Rovnici, která obsahuje funkce a jejich derivace, se říká diferenciální rovnice. Abychom tuto rovnici vyřešili, potřebujeme najít polohu jako funkci času $x(t)$ takovou, že druhá derivace této funkce bude až na násobící konstantu stejná jako původní funkce. Pokud se podíváme na definice derivací základních funkcí, můžeme si všimnout, že

$$\frac{d^2 \cos z}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d \cos z}{dz} \right) = \frac{d(-\sin z)}{dz} = -\cos z.$$

Vidíme, že tato funkce se nám může hodit, ovšem musíme do ní dosadit bezrozměrnou veličinu z , zatímco v původní rovnici hledáme závislost na čase. Jelikož víme, že se jedná o kmity, má smysl vyzkoušet jako bezrozměrný parametr $z = \omega_0 t$ a pokusit se derivovat vzhledem k času místo parametru z . Dostáváme

$$\frac{d^2 \cos(\omega_0) t}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \cos(\omega_0) t}{d\omega_0 t} \frac{d\omega_0 t}{dt} \right) = -\omega_0 \frac{d \sin(\omega_0 t)}{dt} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0) t.$$

Nyní už jen stačí, aby tato funkce měla rozměr vzdálenosti. K tomu ji stačí vynásobit konstantní amplitudou kmitů A , čímž dostaneme $x(t) = A \cos(\omega_0) t$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 A \cos(\omega_0) t}{dt^2} &= -kA \cos(\omega_0) t, \\ -m\omega_0^2 A \cos(\omega_0) t &= -kA \cos(\omega_0) t, \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \end{aligned}$$

což není nic jiného než klasický vzorec pro přirozenou frekvenci kmitů.

Na tomto příkladě vidíme sílu formalismu derivací. Za cenu rozvoje matematického aparátu jsme se mohli zcela vyhnout diskuzi o fázovém prostoru, analytické geometrii kružnice a podobným problémům. Derivace tedy představují výrazně algebraičtější cestu k zodpovězení fyzikálních problémů. Samozřejmě, může se zdát, že jsme si při výše uvedeném postupu museli náhodně tipnout funkci času s vhodnými vlastnostmi. Není tomu tak – pro řešení diferenciálních rovnic existují sofistikované postupy, ty však jdou za rámec tohoto seriálu. Pro složitější problémy jsou derivace nepostradatelným nástrojem už jen proto, že například odpovídající trajektorie ve fázovém prostoru nemají analyticky popsateľný tvar.

Princip superpozice

Tento princip výrazným způsobem zmenšuje počet všech možných řešení, která musíme hledat pro danou *lineární* diferenciální rovnici. Jak vypadá lineární diferenciální rovnice? Opět platí standardní definice lineariry, tj. pokud máme funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou obě samostatně řešením diferenciální rovnice, tak i $af(x)+bg(x)$, kde a, b jsou konstanty, je řešením dané rovnice. Podívejme se například na druhý Newtonův zákon pro závaží na pružině. Pro polohu $x(t)$ jako funkci času platí

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

Pokud definujeme $g(t) = ax(t)$, dostaneme

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{g}{a} \right) = -k \frac{g}{a}.$$

Jelikož je derivace lineární, můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{m}{a} \frac{d^2 g}{dt^2} &= -k \frac{g}{a}, \\ m \frac{d^2 g}{dt^2} &= -kg \end{aligned}$$

a tedy i $g(t)$ je validním řešením této diferenciální rovnice. Podobně lze ukázat, že pokud máme ještě nějaké $h(t) = g(t) + x(t)$, pak sečtením rovnic dostaneme

$$m \frac{d^2 g}{dt^2} + m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kg - kx = -k(g + x)$$

a z lineariry derivace vyplývá

$$m \frac{d^2 (g + x)}{dt^2} = m \frac{d^2 h}{dt^2} = -kh.$$

Říkáme, že h je lineární kombinací neboli superpozicí funkcí g a x . Významem principu superpozice je fakt, že z několika různých řešení dokážeme sestrotit všechna ostatní, která se typicky liší jen v počátečních a okrajových podmínkách úlohy. Těchto řešení může být obecně nekonečně mnoho.

Fáze a komplexní čísla

Komplexní čísla rozšiřují obor reálných čísel zavedením imaginární jednotky i . Ta má unikátní vlastnost, kterou nemá žádné reálné číslo, totiž

$$i^2 = -1.$$

Jinak se imaginární jednotka chová jako reálné číslo, tj. lze ji sčítat, odčítat, násobit, mocnit atd. Těmito operacemi vznikají čísla, která jsou zčásti reálná a zčásti imaginární – říkáme jim komplexní. Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v tzv. algebraickém tvaru

$$z = x + iy,$$

kde x a y jsou reálná čísla. Pak hovoříme o reálné části $\operatorname{Re} z = x$ komplexního čísla a o jeho imaginární části $\operatorname{Im} z = y$.

Jelikož reálná čísla můžeme vnímat jako číselnou osu, můžeme přidání imaginární jednotky i vnímat jako přidání nové dimenze. Komplexní čísla, která jsou kombinací čistě reálných a čistě imaginárních čísel, lze pak vnímat jako vektory v (tzv. Gaussově) rovině, viz obrázek 8. Definujeme absolutní hodnotu komplexního čísla jako velikost tohoto vektoru

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

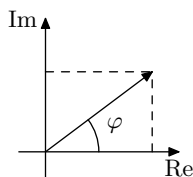
Úhel, který příslušné vektory svírají s reálnou osou, bude

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Uvědomme si však, že úhel φ je 2π -periodický, zatímco funkce arctg je jen π -periodická. Pro výpočet φ tak musíme použít jiný vzorec, například

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x),$$

kde funkce $\operatorname{atan2}$ je definována právě jako prostředek pro výpočet úhlu v rovině. Jedná se v podstatě o funkci $\operatorname{arctg}(y/x)$, u níž se ale mění znaménko podle kvadrantů.



Obr. 8: Komplexní číslo jako vektor v komplexní rovině. Horizontální osa představuje reálná čísla a vertikální osa je osou imaginární.

Algebra komplexních čísel je velmi bohatá a v tomto seriálu není dost prostoru, abychom ji mohli obsáhnout celou. Pro nás nejdůležitější vlastnost komplexních čísel je popsána Eulerovou rovnicí, která definuje komplexní exponenciálu jako

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

kde y je reálné číslo. Exponenciálu z obecného komplexního čísla $x + iy$ už spočítáme snadno díky rovnosti

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

K čemu je nám tento vztah užitečný? Umožňuje nám převést algebru goniometrických funkcí na algebru exponenciál. Ty mají z hlediska derivací velmi výhodné vlastnosti.

Ve fyzikálních systémech se často komplexní čísla zavádějí ve chvíli, kdy je potřeba pracovat s fází kmitání. Tu lze totiž reprezentovat úhlem komplexního čísla v Gaussově rovině. Kmitý samotné potom představuje rotující vektor v této rovině. Zde by měla být jasná analogie s fázovým prostorem – v něm obíhal bod reprezentující stav systému po kružnici. V komplexní rovině bude takový bod obíhat taktéž po kružnici.

Kružnice je množina všech bodů se stejnou vzdáleností od středu, proto ji budeme reprezentovat jako množinu všech komplexních čísel se stejnou absolutní hodnotou A . Pro úhel φ definujeme goniometrický tvar komplexního čísla jako

$$z = A (\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Fyzikálním významem A je amplituda kmitů, zatímco úhel $\varphi = \omega t$ představuje fázi. Ve fázovém prostoru byla poloha reprezentována jedním z rozměrů prostoru, v komplexní rovině bude polohu představovat reálná část

$$x = \operatorname{Re} z = A \cos(\omega t) .$$

Nyní využijeme komplexní exponenciálu a zápis zjednodušíme na

$$\begin{aligned} z &= A e^{i\omega t} , \\ x &= \operatorname{Re} (A e^{i\omega t}) . \end{aligned}$$

V tomto formalismu lze také velmi snadno řešit fázové posuny. Pokud je fázový posun bodu roven φ_0 , pak bod v komplexní rovině bude dán jako

$$z = A e^{i(\omega t + \varphi_0)} = A e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \hat{A} e^{i\omega t} .$$

Nyní je tedy fáze zcela obsažena v násobící konstantě, ze které jsme udělali komplexní číslo. Její absolutní hodnota má však stále význam amplitudy, protože platí $A = |\hat{A}|$.

Derivace komplexních funkcí a fourierovská substitute

V tomto seriálu se budeme zabývat pouze derivacemi funkcí, které mají reálný argument (tj. definiční obor leží zcela na reálné ose), ale komplexní hodnoty. Typickým příkladem je exponenciála reprezentující kmitý

$$f(t) = e^{i\omega t} .$$

Pravidla pro derivace, která jsme odvodili pro čistě reálná čísla, platí i pro funkce s komplexními hodnotami. Toto je vlastně důsledkem linearitě derivace, protože

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)}{dt} = \frac{d \operatorname{Re} f}{dt} + i \frac{d \operatorname{Im} f}{dt} .$$

V tomto výrazu už figurují pouze derivace reálných funkcí.

Vraťme se zpět ke komplexní exponenciále. Víme, že

$$\frac{df}{dt} = \frac{de^{i\omega t}}{d(i\omega t)} \cdot \frac{d(i\omega t)}{dt} = e^{i\omega t} \cdot i\omega = i\omega f.$$

Dále lze obdobným způsobem ukázat, že platí

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = i^2 \omega^2 f = -\omega^2 f,$$

což je vlastně přímo rovnice harmonických kmitů. V případě, že $f(t)$ je funkce popisující kmitání, dostáváme jednoduchý předpis, jak nahrazovat derivace v rovnicích, a to ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\rightarrow i\omega, \\ \frac{d^2}{dt^2} &\rightarrow -\omega^2 \end{aligned}$$

a obdobně pro vyšší mocniny. Tato substituce nemá odborný název, ve zkratce ji zde budeme označovat jako fourierovskou substituci.

Jednoduchá molekula

Uvažujme nyní jednoduchý fyzikální systém, na němž si prakticky ukážeme některé postupy, které jsme odvodili výše. Mějme dvě částice o stejné hmotnosti m , jež jsou spojeny pružinou s tuhostí k a s nulovou klidovou délkou. Částice se mohou pohybovat pouze v jednom rozměru, jejich pozice budeme proto udávat jako body x_1, x_2 na souřadnici x .

Síly působící na částice mají stejnou velikost, ale opačný směr. Nechť je první částice před druhou čili je splněna podmínka $x_1 < x_2$. Potom pro sílu působící na první, resp. druhou částici platí

$$\begin{aligned} F_1 &= k(x_2 - x_1), \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Druhý Newtonův zákon použijeme na každou částici zvlášť s výsledky

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= F_1 = k(x_2 - x_1), \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= F_2 = k(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Lze předpokládat, že tento systém bude nějakým způsobem oscilovat, tj. že řešení pohybových rovnic bude ve formě

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}), \\ x_2 &= \operatorname{Re}(\hat{B}e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

kde \hat{A} a \hat{B} jsou (potenciálně komplexní) konstanty a ω je neznámá frekvence oscilací. Do druhého Newtonova zákona dosadíme fourierovskou substituci

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x_1 &= kx_2 - kx_1, \\ -m\omega^2 x_2 &= kx_1 - kx_2. \end{aligned}$$

Rovnice vydělíme m a zavedeme konstantu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

čímž je převedeme do tvaru

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2) x_1 &= \omega_0^2 x_2, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) x_2 &= \omega_0^2 x_1.\end{aligned}$$

Jednoduchými algebraickými úpravami dostaneme

$$x_1 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega_0^4} x_1.$$

Odtud je vidět, že máme *dvě* možná řešení – jak $\omega = 0$, tak $\omega = \sqrt{2}\omega_0$. Existence dvou řešení je pro podobné problémy typická, neboť dvě oscilující částice znamenají dva stupně volnosti systému. Mírně atypická je přítomnost řešení $\omega = 0$, které má význam neoscilujícího řešení. V tomto případě platí $x_1 = x_2$, což odpovídá rovnoměrnému přímočarému pohybu obou částic tak, že pružina mezi nimi není vůbec natažená.

Pro druhý případ (například dosazením do první rovnice) dostáváme

$$x_2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega_0^2} x_1 = -x_1,$$

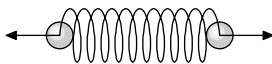
což je možné číst tak, že částice oscilují v protifázi. Dosadíme si z komplexního vyjádření

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\hat{B}e^{i\omega t}) &= -\operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}), \\ \operatorname{Re}\hat{B}\operatorname{Re}e^{i\omega t} - \operatorname{Im}\hat{B}\operatorname{Im}e^{i\omega t} &= -\operatorname{Re}\hat{A}\operatorname{Re}e^{i\omega t} + \operatorname{Im}\hat{A}\operatorname{Im}e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Tato rovnice musí platit pro všechny časy t , konkrétně i pro $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{2\omega}$. V nich přechází do tvaru

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\hat{B} &= -\operatorname{Re}\hat{A}, \\ -\operatorname{Im}\hat{B} &= \operatorname{Im}\hat{A},\end{aligned}$$

takže můžeme psát $\hat{B} = -\hat{A}$. Tento výsledek bychom mohli interpretovat také pomocí fázového posunu jako $\hat{B} = e^{i\pi}\hat{A}$, což znamená přesnou protifázi, jak nám již vyšlo výše.



Obr. 9: Naznačený pohyb částic při oscilujícím řešení.

Ověřme princip superpozice. Ukázali jsme, že rovnoměrný přímočarý pohyb v případě, kdy jsou částice na stejné pozici, je jedním z možných řešení. Zapišme jej ve tvaru

$$x = vt + x_0,$$

kde v je rychlost rovnoměrného pohybu a x_0 je počáteční souřadnice. Zároveň máme oscilující řešení

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}), \\x_2 &= -\operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}).\end{aligned}$$

Mělo by platit, že pokud sečteme $x + x_1 = x'_1$ a $x + x_2 = x'_2$, získáme také validní řešení pro náš systém. Dosadíme-li například do první rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x'_1}{dt^2} &= m \frac{d^2}{dt^2} (vt + x_0 + \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t})) = m \frac{d}{dt} (v + \operatorname{Re}(i\omega \hat{A}e^{i\omega t})) = \\&= m \operatorname{Re}(i^2 \omega^2 \hat{A}e^{i\omega t}) = -m\omega^2 \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}).\end{aligned}$$

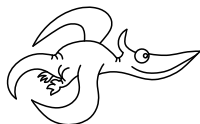
Pro pravou stranu téže rovnice platí

$$k(x'_2 - x'_1) = k(x_2 - x_1) = -2k \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t}).$$

Jelikož $\omega^2 = \frac{2k}{m}$, nové řešení stále vyhovuje původní rovnici.

Výhled na příště – vše je lineární

V tomto díle jsme si ukázali, jak linearita harmonických oscilací umožňuje relativně jednoduše řešit i zdánlivě složité systémy. Stačí nám vždy nalézt pouze několik speciálních řešení našich pohybových rovnic a ostatní možné pohyby můžeme vyjádřit jako superpozici těchto řešení. Odborně se jim říká normální módy a budeme se jimi zabývat i v příštím díle seriálu, kde si představíme další velmi užitečný matematický formalismus – lineární algebru.



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“%	Σ
		6	6	5	7	10	9	13	10	66	100 18	132
1. Lukáš Linhart	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	8	6	5	6	–	6	13	6	50	88 14	107
2. Vojtěch Kadeřábek	G Mensa, Praha	2	6	4	4	5	5	8	–	34	66 11	80
3. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	2	6	5	–	–	7	12	–	32	68 9	66
4. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	6	6	5	–	–	5	–	–	22	70 7	52
5. David Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	0	6	–	–	–	–	9	–	15	64 4	32
6.–7. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	4	6	–	–	–	–	9	–	19	84 4	31
6.–7. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	6	–	–	–	4	10	–	22	54 4	31
8. Sandeep Kandi	IMS A, Aurora, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41 3	27
9.–10. Lukáš Jarábek	G Grösslingová, Bratislava	8	4	2	–	0	4	5	0	23	39 3	23
9.–10. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	0	–	3	–	–	5	–	–	8	55 3	23
11. Vítězslav Lamoš	G, Omská, Praha	–	6	–	–	–	4	–	–	10	61 2	19
12. Kristián Matuš	G, Nový Jičín	0	–	–	–	–	–	–	–	0	48 2	15
13.–14. Boris Pasterňak	Leaf Academy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81 1	13
13.–14. Samuel Ševčík	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59 1	13
15.–16. Jakub Ebringer	G, Blansko	2	–	–	–	–	–	–	–	2	56 1	10
15.–16. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	2	–	–	4	4	–	10	37 1	10
17. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57 1	8
18. Isuru Liyanawaduge	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100 0	6
19. Patrik Pecina	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	31 0	5
20. Václav Vinkler	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17 0	3

Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“%	Σ
		6	6	5	7	10	9	13	10	66	100 18	132
1. Pavel Provazník	G Dašická, Pardubice	6	6	5	6	4	4	6	–	37	70 12	86
2. David Bálek	G Legionářů, Příbram	8	6	5	7	–	6	–	9	41	86 11	85
3. Jonáš Dej	Wichterlovo G, Ostrava	–	6	2	–	9	–	–	8	25	84 11	81
4. Barbora Čemanová	G, Park mládeže, Košice	8	6	4	–	–	8	13	5	44	80 10	74
5. Jan Lepič	G, Strakonice	4	6	5	6	–	4	10	0	35	57 9	70
6. Jakub Hadač	G V. Hlavatého, Louny	6	6	4	4	–	7	–	7	34	69 9	68
7. Martin Kysela	G, Český Krumlov	0	2	5	5	–	4	10	–	26	61 8	62
8. Daniela karpíšková	Masarykovo G, Plzeň	2	6	4	–	–	5	8	1	26	49 7	56
9. Evan Kim	Tesla STEM High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82 7	54
10. Alexander Stoyanov	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	4	4	2	1	0	4	6	2	23	40 7	53
11.–12. Jan Engler	G, Hodonín	–	6	4	–	–	–	–	5	15	77 7	51
11.–12. Vojtěch Juza	G, Litomyšl	6	6	3	–	–	6	11	–	32	61 7	51
13. Lukáš Létal	G J. Škody, Přerov	0	4	2	5	–	5	11	–	27	58 6	47

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ	
		6	6	5	7	10	9	13	10	66	100	18	132	
14. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	4	6	5	–	–	–	–	–	15	<i>88</i>	<i>6</i>	46	
15. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	2	6	5	5	1	4	–	–	23	<i>49</i>	<i>6</i>	43	
16. <i>Vít Brázda</i>	G Dašická, Pardubice	–	6	3	–	–	6	–	–	15	<i>89</i>	<i>5</i>	40	
17. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	0	–	2	0	1	5	5	–	13	<i>36</i>	<i>5</i>	39	
18. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	–	6	3	–	–	–	–	10	–	19	<i>85</i>	<i>4</i>	35
19. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	6	0	4	–	7	–	–	17	<i>52</i>	<i>4</i>	32	
20. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horová, Michalovce	2	6	3	–	–	5	–	–	16	<i>55</i>	<i>4</i>	31	
21.–22. <i>Vojtěch Kysilka</i>	G, Roudnice nad Labem	2	2	3	4	–	6	12	–	29	<i>63</i>	<i>4</i>	29	
21.–22. <i>Karolína Sedová</i>	G Jana Keplera, Praha	–	6	2	–	–	–	–	–	8	<i>88</i>	<i>4</i>	29	
23. <i>Ivy Qin</i>	RC Palmer Sec. Sc.	0	6	5	3	0	3	5	6	28	<i>42</i>	<i>3</i>	28	
24. <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	–	2	–	–	–	2	–	–	4	<i>52</i>	<i>3</i>	26	
25. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>77</i>	<i>3</i>	23	
26. <i>Jakub Genčur</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	6	–	–	–	–	–	–	6	<i>96</i>	<i>3</i>	22	
27. <i>Jiří Mládek</i>	G, Soběslav	0	6	1	1	–	4	6	0	18	<i>32</i>	<i>2</i>	18	
28. <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>77</i>	<i>2</i>	17	
29. <i>Ashmit Dutta</i>	Wayzata High School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>80</i>	<i>2</i>	16	
30.–31. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	0	6	–	–	–	–	–	–	6	<i>56</i>	<i>1</i>	10	
30.–31. <i>Petr Vitko</i>	G Teplice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>37</i>	<i>1</i>	10	
32. <i>Barbora Peřinová</i>	Česká zemědělská akademie Humpol	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>31</i>	<i>1</i>	9	
33. <i>Jakub Koňárek</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	6	2	–	–	–	–	–	8	<i>73</i>	<i>1</i>	8	
34.–36. <i>Jan Cícha</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	–	4	1	1	–	–	–	–	6	<i>33</i>	<i>0</i>	6	
34.–36. <i>Pragun Pudukoli</i>	Sishu Griha HS, India	0	6	–	–	–	–	–	–	6	<i>50</i>	<i>0</i>	6	
34.–36. <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>100</i>	<i>0</i>	6	
37. <i>Damián Tancoš</i>	G, Kukučínova, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>14</i>	<i>0</i>	5	
38. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	–	–	0	–	–	–	–	–	0	<i>36</i>	<i>0</i>	4	
39. <i>Timotej Marhefka</i>	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>5</i>	<i>0</i>	2	

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
		3	3	5	7	10	9	13	10	60	100	16	120
1. <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	3	3	5	7	8	9	14	5	54	<i>93</i>	<i>15</i>	112
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	2	3	5	6	7	–	14	10	47	<i>94</i>	<i>14</i>	104
3. <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	2	3	5	6	4	7	–	9	36	<i>85</i>	<i>11</i>	82
4. <i>Yahya Numan INCIR-KUS</i>	Yasar Acar High School	1	3	5	6	10	5	5	9	44	<i>68</i>	<i>11</i>	81
5. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	2	3	5	7	0	6	13	3	39	<i>65</i>	<i>10</i>	78
6. <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	2	3	5	–	2	5	13	–	30	<i>67</i>	<i>9</i>	69
7. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	1	3	5	7	10	–	–	8	34	<i>89</i>	<i>9</i>	67
8. <i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	–	3	5	1	–	5	13	–	27	<i>70</i>	<i>8</i>	62
9. <i>Elena Chochoľaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	4	3	5	–	–	–	–	5	17	<i>74</i>	<i>8</i>	60
10. <i>Nikita Ustinov</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	5	6	4	6	–	–	27	<i>78</i>	<i>8</i>	59
11. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	2	1	2	3	–	5	11	3	27	<i>52</i>	<i>7</i>	55
12. <i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	1	0	5	2	–	5	12	3	28	<i>53</i>	<i>7</i>	51
13. <i>Daniël Skýpala</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	3	5	4	–	6	–	–	18	<i>70</i>	<i>6</i>	46
14.–15. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	–	3	5	–	–	–	11	–	19	<i>71</i>	<i>6</i>	45
14.–15. <i>Pavína Zavrělová</i>	Biskupské G, Brno	0	3	5	–	–	7	11	–	26	<i>63</i>	<i>6</i>	45
16. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	0	3	5	2	–	7	13	–	30	<i>64</i>	<i>6</i>	44
17. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	0	0	5	5	–	–	4	–	14	<i>55</i>	<i>5</i>	40
18. <i>Jan Bajer</i>	G, Jihlava	0	3	3	1	0	5	6	0	18	<i>33</i>	<i>5</i>	39
19. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	0	5	–	–	7	–	8	22	<i>78</i>	<i>5</i>	38

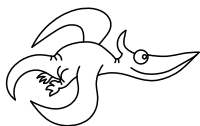
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>7</i>	<i>10</i>	<i>9</i>	<i>13</i>	<i>10</i>	<i>60</i>	<i>100</i>	<i>16</i>	<i>120</i>
20. Antonín Kubík	G, Roudnice nad Labem	2	3	5	1	–	3	–	–	14	52	5	37
21.–22. Adam Hůstava	European School Luxem- bourg II	0	3	3	4	–	3	–	–	13	64	5	36
21.–22. Jakub Mikeš	G J. Škody, Přerov	1	3	4	5	–	4	–	–	17	75	5	36
23. Jakub Pelc	G, Benešov	1	1	2	–	–	4	8	0	16	44	4	35
24. Aleksandar Rusev	First Language school, Bul- garia	0	3	3	6	9	3	–	10	34	72	4	34
25. Jáchym Mraček	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	4	31
26.–29. Lukáš Fidler	Jiráskovo G, Náchod	1	3	5	6	–	–	–	–	15	78	4	29
26.–29. Matej Korž	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	2	–	–	7	9	–	18	73	4	29
26.–29. Adam Krška	G, Mikulov	–	–	5	–	–	–	–	–	5	85	4	29
26.–29. Aneta Píková	G, Strakonice	2	3	3	4	–	7	–	–	19	41	4	29
30. Václav Maštera	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	3	28
31. Matouš Hofmeister	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	3	26
32. Anička Chu Ngoc	G, Jihlava	0	–	–	–	–	5	11	–	16	49	3	25
33.–34. Lubomír Břoušek	G, Jihlava	–	–	–	–	–	6	–	–	6	60	3	24
33.–34. Eliška Malá	Slovanské G, Olomouc	0	3	0	–	–	2	–	–	5	42	3	24
35.–36. Luboš Bariak	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	4	3	–	7	43	3	23
35.–36. Eliška Durstová	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	3	23
37. David Brodňanský	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	2	–	–	7	–	–	9	81	3	22
38.–39. Tomáš Heger	Jiráskovo G, Náchod	–	3	3	–	–	–	–	–	6	57	2	21
38.–39. Wiktor Macura	G J. Slowackiego, Český Tě- šín	–	3	5	–	–	4	–	–	12	64	2	21
40. Vojtěch Votruba	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	2	20
41.–42. Eva Feldebabelová	Katolické gymnázium Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	2	19
41.–42. Matúš Jakubec	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	2	19
43.–44. Monika Janderová	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovi- ce	–	–	–	–	–	5	–	–	5	51	2	18
43.–44. Martin Polák	G Masaryk.nám.	0	–	2	3	–	1	–	–	6	34	2	18
45. Jevhenij Vorochta	Jiráskovo G, Náchod	0	1	1	6	–	2	–	–	10	40	2	17
46. Matěj Charousek	G Na Vítězné pláni, Praha	0	–	5	–	–	–	–	–	5	43	2	16
47. Tereza Skořepová	G Dašická, Pardubice	1	0	0	0	0	1	–	0	2	18	2	15
48. Bishoy Roushdy	STEM High School, Egypt	0	–	2	–	–	4	–	–	6	25	2	14
49. Ondřej Korběl	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	1	13
50. Michaela Šídová	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	1	12
51. Michal Štěpán	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	1	10
52.–53. Štěpán Kozák	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1	8
52.–53. Vojtěch Smola	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	1	8
54.–55. Samuel Stanek	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	1	7
54.–55. Kristián Šťastný	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	1	7
56.–57. Abanoub Osama	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	0	6
56.–57. Bianka Tomaščíková	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	0	6
58.–59. Mohamed Sayed Mostafa	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	0	5
58.–59. Eliška Věnečková	G J. Vrchlického, Klatovy	–	1	3	1	–	–	–	–	5	33	0	5
60.–67. Hamdy Amen	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	7	0	4
60.–67. Zyad Ekramy	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	14	0	4
60.–67. Lukáš Hubáč	SPŠ a VOŠ, Písek	0	–	–	–	–	–	–	–	0	17	0	4
60.–67. Mahmoud Shawky	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	7	0	4
60.–67. Mahmoud Shawky	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	7	0	4
60.–67. Radim Skála	G, Hořovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	0	4
60.–67. Martin Václavíček	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	31	0	4
60.–67. Nabil Youssef	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	9	0	4

jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“%	Σ	
		3	3	5	7	10	9	13	10	60	100	16	120
68.–69. <i>Moaz Ahmed</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0	3
68.–69. <i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
70.–71. <i>Akram Haitham</i>	G, Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	0	2
70.–71. <i>Akmal Hashad</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	0	2
72.–75. <i>Hamdy Nour El-din Mansour</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	0	1
72.–75. <i>Mohammed Meshrif</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	0	1
72.–75. <i>Ahmed Ragab</i>	Tesla STEM High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6	0	1
72.–75. <i>Seif Eldein Walid</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	0	1
76.–83. <i>Mahmoud El-Nezely</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>Saif El-said</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>Moemen Ibrahim</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>Mahmoud Kassem</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>Ahmed Moussa</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>Ahmed Nassar</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>Omar Sharaf</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
76.–83. <i>ahmed waleed</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“%	Σ	
		3	3	5	7	10	9	13	10	60	100	16	120
1. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	4	3	5	5	10	6	14	8	55	93	15	111
2. <i>Vojtěch Kuchař</i>	Wichterlovo G, Ostrava	4	3	5	4	4	8	14	7	49	79	13	95
3. <i>Marek Milička</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	2	3	5	6	10	6	–	7	39	79	11	84
4. <i>Šimon Kurz</i>	G Luďka Pika, Plzeň	1	3	5	6	10	6	12	0	43	73	11	82
5. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	2	3	5	7	10	–	–	10	37	95	11	81
6. <i>Dominiik Farhan</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	1	2	5	7	–	6	6	3	30	66	10	73
7. <i>Štěpán Pressl</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	3	5	7	6	8	13	–	42	84	9	68
8. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	2	3	5	6	–	4	7	–	27	62	8	62
9. <i>Tomáš Volf</i>	G Jura Hronca, Bratislava	0	3	5	6	3	4	11	–	32	60	8	60
10. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	3	5	1	–	6	13	–	29	69	7	53
11. <i>Daniel Fousek</i>	G, Špitálská, Praha	1	3	3	6	–	5	3	–	21	55	6	45
12. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	2	3	5	–	–	–	–	3	13	76	6	44
13. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	0	1	4	4	–	–	13	–	22	79	5	41
14. <i>Matúš Kolenka</i>	G Konštantínova, Prešov	3	3	2	1	–	5	11	3	28	41	5	38
15. <i>Viduranga Landers</i>	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	4	30
16. <i>Marek Broul</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	–	5	6	–	4	–	–	15	83	4	29
17.–18. <i>Mona Alizadeh</i>	St Paul's GS	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	3	26


jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
		3	3	5	7	10	9	13	10	60	100	16	120
17.–18. <i>Marika Kosohorská</i>	G J. Vrchlického, Klato- vy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	90	3	26
19. <i>Livia Čerešňová</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	2	-	-	6	-	-	8	58	3	25
20. <i>Andrew Pun</i>	M. Garneau Collegiate Institute	-	-	-	-	-	-	-	-	-	85	3	23
21. <i>Martin Opat</i>	G Ludovíta Štúra, Tren- čín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	2	21
22.–23. <i>Log Franc</i>	Cumberland Valley HS, USA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	2	20
22.–23. <i>Agra Navaratne Nava- ratne</i>	D.S.Senanayake College	-	-	-	-	-	-	-	-	-	48	2	20
24.–26. <i>Aahana Aahana</i>	CHIREC International School	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	2	19
24.–26. <i>Aneta Pjatkanová</i>	G, Kralupy	-	2	5	-	-	-	-	4	11	49	2	19
24.–26. <i>Ondřej Sladký</i>	G Mikulášské n. 23, Pl- zeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	2	19
27.–28. <i>Jaroslav Grulich</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	2	17
27.–28. <i>Konstantin Tripunov- ski</i>	American HS Skopje, Macedonia	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	2	17
29. <i>Zsolt Beke</i>	G H. Selyeho Komárno	-	-	5	-	-	-	-	-	5	72	1	13
30. <i>Makar Kuznietsov</i>	Lviv Lyceum	-	3	5	-	4	-	-	-	12	67	1	12
31.–33. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havřov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	1	10
31.–33. <i>Gauri Shankar H</i>	Pondicherry University	0	3	2	-	-	-	-	5	10	48	1	10
31.–33. <i>Patrik Kočan</i>	G M. Hattalu, Trstená	0	1	2	-	-	1	-	-	4	28	1	10
34.–35. <i>Gauri Shankar H</i>	Pondicherry University	-	-	-	-	-	-	-	-	-	21	1	9
34.–35. <i>Martin Polyácsko</i>	G Alejová, Košice	-	-	4	5	-	-	-	-	9	75	1	9
36. <i>Jakub Kliment</i>	G Tajovského, B. Bystri- ca	0	3	5	-	-	-	-	-	8	73	1	8
37. <i>Dávid Benko</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	-	-	-	-	-	-	-	-	44	1	7
38.–39. <i>Martina Daňková</i>	Gymnázium Brno- Bystrc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83	0	5
38.–39. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	1	1	3	-	-	-	-	-	5	45	0	5
40.–42. <i>Youssef Abdelmoneim</i>	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	0	3
40.–42. <i>Philopater Gabra</i>	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	0	3
40.–42. <i>Le Vu Neumann</i>	G Opatov, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	3
43. <i>Anna Kaiserová</i>	SPŠS a OA Kadaň	-	-	2	-	-	-	-	-	2	40	0	2
44.–47. <i>Hussein Hassan</i>	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
44.–47. <i>Islam Hassan</i>	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
44.–47. <i>Andrew Henin</i>	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
44.–47. <i>Ahmed Jaheen</i>	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.