Úloha I.3 ... cyklistický anemometr

5 bodů; (chybí statistiky)

Vašek jede za větrného počasí na kole. Jede-li rovně rychlostí $v = 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, naměří, že proti němu fouká vítr vodorovně pod úhlem 25° od směru jízdy. Při vyšší rychlosti $v' = 20\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ je tento úhel už jenom 15°. Určete rychlost a směr větru vzhledem k nehybnému pozorovateli.

Vašek si říkal, že na něj při jízdě fouká až moc.

Jedná se o úlohu, kterou vyřešíme vektorovým skládáním rychlostí. Zavedeme souřadnice spojené s nehybným pozorovatelem, ve kterých je rychlost Vaška v prvním případě $\mathbf{v} = (v,\, 0)$. V druhém případě pak zrychlí na rychlost $\mathbf{v}' = (v',\, 0)$. Vítr vzhledem k nehybnému pozorovateli vane rychlostí $\mathbf{u}$ zapsanou ve složkách jako $\mathbf{u} = (u\cos\alpha,\, u\sin\alpha)$, kde α je úhel, který svírá rychlost větru $\mathbf{u}$ s rychlostí cyklisty $\mathbf{v}$ a je odlišný od úhlu, který pozoruje Vašek v jeho pohybující se soustavě.

Označme $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}'$ rychlost větru vzhledem k Vaškovi v prvním a v druhém případě. Rychlost větru vzhledem k cyklistovi získáme odečtením rychlosti cyklisty od rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli (jedná se vlastně o Galileovu transformaci rychlostí), neboli v obou případech platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}'\,. \tag{2}$$

Ze zadání víme, že vektor rychlosti větru $\mathbf{w}$, resp. $\mathbf{w}'$, svírá s vektorem rychlosti cyklisty úhel $\beta = 155^\circ$, resp. $\gamma = 165^\circ$, pokud na cyklistu fouká vítr zprava, viz obr. 1. Jestliže na něj fouká vítr zleva, platí $\beta = -155^\circ$, $\gamma = -165^\circ$. Rychlosti $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}'$ potom vyjádříme ve složkách jako $\mathbf{w} = (w\cos\beta,\, w\sin\beta)$ a $\mathbf{w}' = (w'\cos\gamma,\, w'\sin\gamma)$. Dosadíme-li do rovnic (1), (2) konkrétní složky, dostaneme 4 rovnice

$$w\cos\beta = u\cos\alpha - v\,, \tag{3}$$

$$w\sin\beta = u\sin\alpha\,, \tag{4}$$

$$w'\cos\gamma = u\cos\alpha - v'\,, \tag{5}$$

$$w'\sin\gamma = u\sin\alpha\,. \tag{6}$$

Vyřešením těchto rovnic nalezneme hledanou velikost u rychlosti větru vzhledem k zemi a jeho směr α vztažený na směr rychlosti cyklisty. Rovnic máme akorát, neboť ještě neznáme w a w'. Postupovat můžeme např. následovně. Nejdříve eliminujeme z rovnic w a w' a to tak, že rovnici (3) vydělíme rovnicí (4), a navíc vzniklou rovnici vynásobíme faktorem $u\sin\alpha$. Podobné upravy provedeme také s rovnicemi (5) a (6), což vede na soustavu rovnic

$$u\sin\alpha\cotg\beta = u\cos\alpha - v\,, \tag{7}$$

$$u\sin\alpha\cotg\gamma = u\cos\alpha - v'\,. \tag{8}$$

Nejdříve nalezneme u. Odečtením rovnice (8) od (7) dostaneme

$$u\sin\alpha(\cotg\beta - \cotg\gamma) = v' - v\,, \tag{9}$$

Dále rovnici (7) vynásobíme $\cotg\gamma$, rovnici (8) vynásobíme $\cotg\beta$ a obě rovnice od sebe odečteme, takže dostaneme

$$u\cos\alpha(\cotg\beta - \cotg\gamma) = v'\cotg\beta - v\cotg\gamma\,, \tag{10}$$

Umocnění rovnic (9) a (10) na druhou a jejich součet vede na

$$u^2(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma)^2 = (v' - v)^2 + (v'\operatorname{cotg}\beta - v\operatorname{cotg}\gamma)^2\,, \tag{11}$$

odkud plyne

$$u = \frac{\sqrt{(v' - v)^2 + (v'\operatorname{cotg}\beta - v\operatorname{cotg}\gamma)^2}}{|(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\gamma)|}\,, \tag{12}$$

kde jsme vyloučili záporné řešení.

Nyní nalezneme úhel α. Jednoduchými algebraickými úpravami rovnic (7), (8) dostaneme

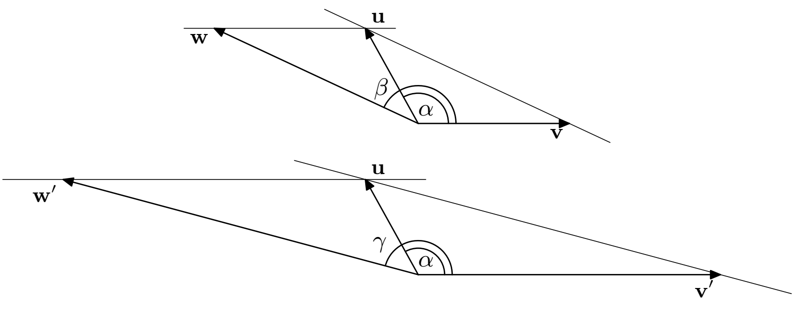
$$u(\cos\alpha - \operatorname{cotg}\beta\sin\alpha) = v\,, \tag{13}$$

$$u(\cos\alpha - \operatorname{cotg}\gamma\sin\alpha) = v'\,. \tag{14}$$

Dále vydělením rovnic (13), (14) dostaneme rovnici, ze které vyjádříme $\operatorname{tg}\alpha$ jako

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v' - v}{v'\operatorname{cotg}\beta - v\operatorname{cotg}\gamma}\,. \tag{15}$$

Fouká-li na Vaška vítr zprava, dostaneme po číselném dosazení hodnot ze zadání do rovnice (12) velikost rychlosti větru vzhledem k zemi $u \approx 7{,}2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Rovnice (15) vede v intervalu $(-\pi, \pi]$ pokývajícím všechny směry na dvě řešení, které po číselném dosazení hodnot ze zadání jsou $\alpha \approx 120\,^\circ$ a $\alpha \approx -60\,^\circ$. Řešení $\alpha \approx -60\,^\circ$ však odpovídá zápornému řešení u rovnice (11), a proto představuje stejný vektor $\mathbf{u}$ jako $\alpha \approx 120\,^\circ$ a $u \approx 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Na závěr doplňme, že v případě, kdy na Vaška fouká vítr zleva, dostaneme řešení $\alpha \approx -120\,^\circ$ a $u \approx 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 1: Skládání rychlostí. Nahoře má Vašek nižší rychlost, dole vyšší.

Ukážeme si také, jak lze dojít ke správnému řešení rychlejší cestou s pomocí sinové a kosinové věty. Obrázek 1 překreslíme dohromady tak, jak je znázorněno na obrázku 2. Místo úhlů β a γ budeme používat jejich doplňkové úhly $\beta' = 180\,^\circ - \beta = 25\,^\circ$ a $\gamma' = 180\,^\circ - \gamma = 15\,^\circ$. Aplikací sinové věty na pravý trojúhelník dostaneme rovnost

$$\frac{w}{\sin\gamma'} = \frac{v' - v}{\sin(\beta' - \gamma')}\,,$$

ze které plyne vztah

$$w = \frac{(v' - v)\sin\gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')}\,. \tag{16}$$

Dosazením hodnot ze zadání dostáváme $w \approx 14{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Z levého trojúhelníku už tedy známe w, ze zadání samozřejmě také v a úhel β', a chceme najít u a úhel α. V obou případech si poradíme kosínovou větou. Pro první případ použijeme kosínovou větu s úhlem β' ve tvaru

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cos\beta' \,. \tag{17}$$

Odmocněním a dosazením za w z rovnice (16) získáme vztah pro výpočet velikosti rychlosti větru vzledem k nehybnému pozorovateli

$$u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{(v' - v)\sin\gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')}\right)^2 - 2v\,(v' - v)\,\frac{\sin\gamma'\cos\beta'}{\sin(\beta' - \gamma')}} \,. \tag{18}$$

V našem konkrétním případě má velikost $u \approx 7{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, tedy výsledek se shoduje s prvním způsobem výpočtu. Jinou aplikací kosínové věty na levý trojúhelník v obr. 2 dostaneme vztah

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2vu\cos\alpha \,,$$

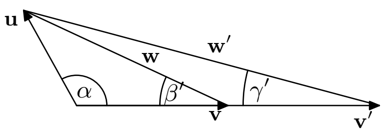
ze kterého jednoduše plyne

$$\cos\alpha = \frac{v^2 + u^2 - w^2}{2vu} \,.$$

Pravou stranu této rovnice můžeme ještě zjednodušit pomocí rovnice (17) následovně

$$\cos\alpha = \frac{v - w\cos\beta'}{u} \,,$$

čímž jsme získali vztah pro výpočet úhlu α. Dosadíme-li do něho za w z rovnice (16) a za u z rovnice (18) a poté číselné hodnoty ze zadání, dostáváme v rozsahu $(-180\,^\circ, 180\,^\circ]$ dvě řešení $\alpha \approx 120\,^\circ$ a $\alpha \approx -120\,^\circ$, které odpovídají případu, kdy fouká vítr na Vaška zprava a zleva. Zcela správně by řešení $\alpha \approx -120\,^\circ$ mělo odpovídat úhlům $\beta' - 25\,^\circ$, $\gamma' = -15\,^\circ$. Všimněte si však, že rovnice v druhém způsobu výpočtu nejsou k současné změně znamének úhlů β' a γ' citlivé. Tento postup je tedy v souladu s prvním způsobem výpočtu.



Obr. 2: Druhý způsob skládání rychlostí.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`