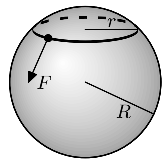
Úloha I.5 ... jak si navléci čepici jednou rukou? 8 bodů; (chybí statistiky)

Mějme kouli o poloměru R a cyklickou nehmotnou gumičku o poloměru r_0 s tuhostí k, přičemž $r_0 < R$. Třecí koeficient mezi gumičkou a koulí je f. Určete podmínku pro hodnoty těchto parametrů, aby bylo možné přetáhnout gumičku přes kouli tak, že se gumičky budeme dotýkat jenom v jednom bodě.



Pro jednoduchost uvažujte, že gumička je pružná pouze v tečném směru (takže vždy leží v jedné rovině).

Matěj měl plnou ruku a byla mu zima na hlavu.

Gumičku buď považujeme za nehmotnou a nebo neuvažujeme tíhové zrychlení, takže na gumičku působí kromě vnější síly F pouze síly třecí. Orientace v tomto případě nehraje roli, ale v rámci analogie s navlékáním čepice na hlavu si představme, že gumička je volně položená na horní části koule tak, jak je to na obrázku.

Nejjistější způsob navlékání gumičky přes kouli je takový, že gumičku v jednom bodě tlačíme směrem tečným ke kouli a kolmým ke gumičce. V případě, že se opačná část gumičky začne zvedat, máme problém a gumičku přes kouli nedokážeme přetáhnout. Aby bylo možné gumičku navléci, nesmí se pohnout protilehlý bod gumičky vůči působišti síly.

Kritické místo je přesně v tomto protilehlém bodě. V tomto bodě musí platit, že tečná síla je menší než normálová síla přenásobená třecím koeficientem. Hledáme tedy podmínku na to, kdy tento bod gumičky na kouli staticky drží a neprokluzuje. Případ vyšetřování jednoho kritického bodu si můžeme nahradit symetrickou situací, kdy jsou všechny body symetricky „také kritické“. To znamená, že budeme vyšetřovat případ, kdy je gumička na kouli navlečena tak, že její poloměr je $r > r_0$.

Situace je analogická s prokluzem tělesa na rovné podložce (např. na nakloněné rovině), tady těleso neproklouzne, když je splněna podmínka $\operatorname{tg}\alpha \leq f$, kde α je úhel, který svírá směr výslednice sil působících na těleso s normálou k podložce. Nezajímá nás tedy velikost síly, kterou je gumička napínána, ani velikost síly, kterou gumička tlačí do koule (značíme F_0). Stačí nám znát směr této síly – v každém bodě dotyku směřuje do středu gumičky (ne do středu koule).

V našem případě gumičky na kouli je úhel α sevřen v libovolném bodě dotyku mezi směrem do středu koule (tj. normála k povrchu) a směrem do středu gumičky (tj. směr působící síly F_0). Tento úhel je zřejmě největší pro nejkratší délku gumičky, postupným natahováním na kouli ho zmenšujeme. Nejkritičtější je proto případ hned na začátku natahování, když má gumička poloměr r_0.[1] Hledaný úhel snadno spočítáme s využitím poloviny rovnoramenného trojúhelníka, jehož ramena tvoří poloměry kuličky o délce R a základnu tvoří průměr gumičky $2r_0$, viz obrázek (1).

$$\cos\alpha = \frac{r_0}{R}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0}\,.$$

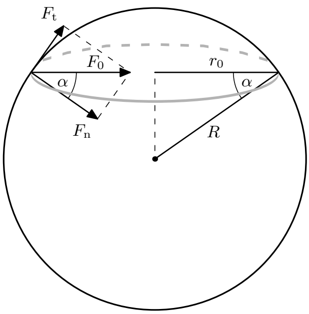
V poslední úpravě jsme využili vztahů mezi goniometrickými funkcemi stejného úhlu (nebo

[1] Aby gumička působila silou na kouli, musí být její poloměr o libovolně málo větší než r_0.

alternativně Pythagorovu větu). Po dosazení do podmínky pro neproklouznutí dostáváme

$$\frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0} \leq f \,,$$
$$r_0 \geq \frac{R}{\sqrt{f^2 + 1}} \,.$$

Tedy podmínka samozřejmě vůbec nezávisí na tuhosti gumičky, nýbrž pouze na poloměrech a třecím koeficientu. Všimněme si také, že pro velmi malé f se podmínka blíží k $r_0 \geq R$. To znamená, že pro nulové f nedokážeme přes kouli přetáhnout žádnou gumičku, která je menší než koule.



Obr. 1: Rozklad sil gumičky a polovina trojúhelníku pro výpočet úhlu.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz