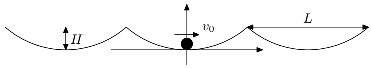
## Úloha I.S ... kmitáme

10 bodů; (chybí statistiky)

*Seriál začneme zkoumáním několika mechanických oscilátorů, u kterých nás bude zajímat především určení frekvence volných kmitů. Dále si zopakujeme, jak vypadá oscilátor ve fázovém prostoru.*




1. *Uvažujme dutý nehmotný kužel, do jehož špičky vložíme kámen o hmotnosti $M$. Kužel ponoříme špičkou napřed do vody o hustotě $\varrho$, ve které bude plovat. Určete rovnovážnou hloubku ponoru kužele měřenou od špičky $h$, pokud je celková výška kužele $H$ a poloměr základny $R$. Dále nalezněte úhlovou frekvenci malých vertikálních kmitů kuželu.*
2. *Představme si závaží o hmotnosti $m$ přidělané na nehmotné pružině o tuhosti $k$ a klidové délce $L$. Pokud pružinu na druhém konci upevníme, dostaneme kyvadlo. Spočítejte přirozenou úhlovou frekvenci jeho oscilací, přičemž předpokládejte, že délka pružiny se během pohybu nemění. Následně určete malý rozdíl v úhlové frekvenci $\Delta\omega$, o který se úhlová rychlost tohoto kyvadla liší od případu, ve kterém je pružina nahrazena nedeformovatelnou tyčí se stejnou klidovou délkou. Přitom předpokládejte $kL \gg mg$.*
3. *V terénu, který se skládá z periodicky se opakujících parabol s výškou $H$ a šířkou $L$, se nachází kostka cukru s hmotností $m$. Popište její potenciální energii jako funkci souřadnice v horizontálním směru a následně načrtněte možné trajektorie jejího pohybu ve fázovém prostoru v závislosti na rychlosti $v_0$, kterou má při průchodu vrcholem paraboly. Na náčrtku označte všechny významné vzdálenosti. Pro výchylku použijte horizontální souřadnici, vhodně přizpůsobte jednotky hybnosti v horizontálním směru. Při výpočtech zanedbejte kinetickou energii pohybu kostky ve vertikálním směru a předpokládejte, že stále zůstává v kontaktu s terénem.*

*Štěpán našel pár základních oscilátorů.*

### *Kužel*

Pokud je kužel ponořen do hloubky $h$, je jeho poloměr v úrovni hladiny roven

$$r = \frac{R}{H}h$$

a jeho objem pod hladinou bude

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}\,.$$

Vztlaková síla působící na kužel je tedy

$$F = -\varrho g V = -\frac{\pi \varrho g R^2 h^3}{3H^2}\,,$$

kde minusové znaménko značí, že síla působí v opačném směru vzhledem k směru ponoru $h$. Tíhová síla má velikost $Mg$ a působí ve směru souřadnice $h$, čili z nulové výslednice sil v rovnovážné poloze vyplývá

$$h^3 = \frac{3MH^2}{\pi\varrho R^2} \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{3MH^2}{\pi\varrho R^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

Při malé výchylce $\Delta h \ll h$, která zvětší ponor kužele, dojde ke zvětšení vztlakové síly, která má nyní velikost $F_\mathrm{v}$

$$F_\mathrm{v} = -\frac{\pi \varrho g R^2}{3H^2}(h+\Delta h)^3 = -\frac{\pi \varrho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)^3 \approx -\frac{\pi \varrho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1+\frac{3\Delta h}{h}\right) .$$

Výslednice sil působících na kužel je potom rovna

$$\Delta F = F_\mathrm{v} + F_g = F_\mathrm{v} - F = -\frac{\pi \varrho g R^2 h^3}{3H^2}\frac{3\Delta h}{h} = -\frac{\pi \varrho g R^2 h^2}{H^2}\Delta h \,.$$

Pro zrychlení kužele dostáváme

$$a = \frac{\Delta F}{M} = -\frac{\pi \varrho g R^2 h^2}{MH^2}\Delta h \,,$$

což je zřejmě základní rovnice pro harmonické kmity. Frekvence kmitů je

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi \varrho g R^2 h^2}{MH^2}} = \left(\frac{\pi \varrho g R^2}{MH^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3MH^2}{\pi \varrho R^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi \varrho g^3 R^2}{MH^2}\right)^{\frac{1}{6}} .$$

*Kyvadlo*

Prodloužení pružiny zřejmě bude

$$\Delta L = \frac{mg}{k} .$$

Frekvence oscilací kyvadla je dána jako

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{L+\Delta L}} = \sqrt{\frac{g}{L+\frac{mg}{k}}} = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(1+\frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Oproti kyvadlu s nedeformovatelnou tyčí tedy existuje rozdíl ve frekvenci, pro $kL \gg mg$ můžeme psát

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(1+\frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{g}{L}} \approx -\frac{mg}{2kL}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Důležité kvalitativní pozorování je, že s prodloužením délky tyče se také zmenší úhlová frekvence kmitů kyvadla.

*Kostka cukru*

V naznačeném souřadnicovém systému má parabola vrchol v počátku, čili má obecný předpis

$$y = cx^2 \,,$$

kde $x$ je horizontální souřadnice a $c$ je neznámá konstanta. Vzhledem k periodičnosti povrchu se můžeme omezit na interval

$$x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] .$$

Aby měla parabola výšku $H$ v bodě $x = \frac{L}{2}$, musí platit

$$H = c\frac{L^2}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4H}{L^2} .$$

Potenciální energie kostky má tvar

$$E_\mathrm{p} = mgy = \frac{4mgH}{L^2}x^2$$

Pro náčrt fázového prostoru je zapotřebí určit celkovou mechanickou energii, která bude rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_\mathrm{p} = \frac{p^2}{2m} + \frac{4mgH}{L^2}x^2 \,.$$

Energie se zachovává, přičemž v počátku platí

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \,.$$

Z toho dostáváme rovnici

$$x^2 + \frac{p^2}{2m} \cdot \frac{L^2}{4mgH} = \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot \frac{L^2}{4mgH} \,,$$
$$x^2 + \frac{p^2}{\frac{8m^2gH}{L^2}} = \frac{v_0^2L^2}{8gH} \,.$$

Odtud vidíme, že kostka ve fázovém prostoru opisuje kružnici s poloměrem

$$r = \frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}} \,,$$

za předpokladu, že hybnost udáváme v jednotkách

$$\sqrt{\frac{8m^2gH}{L^2}} \,.$$

Nyní už je snadné zobecnit pohyb kostky pro paraboly, které nemají střed v počátku – kostka bude ve fázovém prostoru opět opisovat kružnici, jejíž střed bude na ose $x$ v bodě, v němž má vrchol parabola, ve které se kostka nachází.

Důležitým poznatkem je, že toto platí pouze tehdy, pokud je počáteční kinetická energie menší než potenciální energie v nejvyšším bodě paraboly

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < mgH \,,$$

neboli

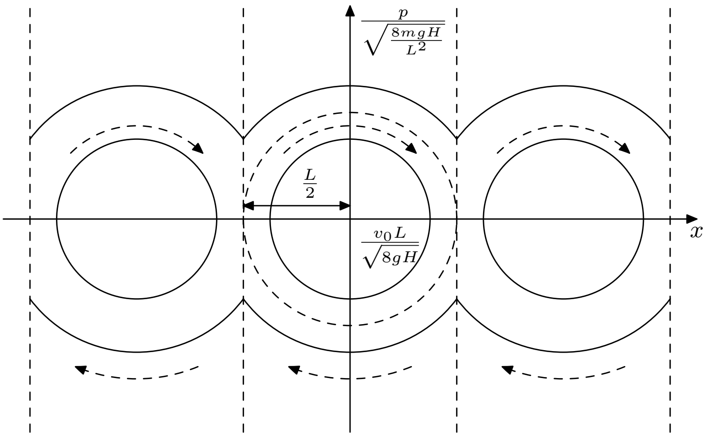
$$v_0 < \sqrt{2gH} \,.$$

Ve fázovém prostoru to odpovídá kritickému poloměru kružnice

$$r < \sqrt{2gH} \cdot \frac{L}{\sqrt{8gH}} = \frac{L}{2}$$

tak, jak očekáváme z geometrie zadané paraboly. Pokud je energie kostky vyšší, bude se vždy pohybovat po části kružnice s příslušným poloměrem v dané parabole. Poté, co přesáhne nejvyšší bod, bude pokračovat po části kružnice se středem ve středu vedlejší paraboly (viz obrázek 1).

Ve standardním prostoru jsou tyto dvě možnosti vidět následovně. Buď kostka osciluje okolo vrcholu paraboly, přičemž vždy zpomaluje, když se blíží do maximální výšky, které odpovídá




Obr. 1: Fázový diagram pro kostku v údolí. Čárkované vertikální čáry označují hranice parabol. Čárkovaná kružnice značí kružnici s kritickým poloměrem. Čárkované šipky označují směr pohybu ve fázovém prostoru.

výchylka $x = \pm \frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}}$. V ní se obrátí směr rychlosti a kostka tak začne vracet zpět k vrcholu paraboly. V tomto případě má kostka malou energii a je omezena na pohyb v rámci jediné paraboly.

Pokud má ale kostka dostatečnou energii (tedy $v_0 > \sqrt{2gH}$), může překonat nejvyšší bod paraboly a následně pokračovat v pohybu stejným směrem. Při výstupu bude sice stále zpomalovat, ale její rychlost nikdy neklesne na nulu a proto nikdy nezmění směr. Kostka se tak může volně pohybovat jedním směrem napříč parabolami.

***Štěpán Marek***
`stepan.marek@fykos.cz`