

Úloha II.P ... nákladný hokej

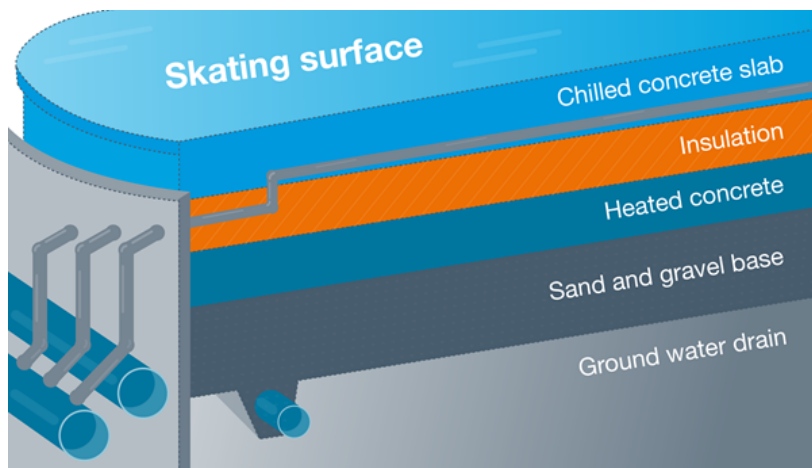
9 bodů; průměr 5,01; řešilo 74 studentů

Odhadněte, kolik stojí kompletní zalednění hokejového hřiště.

Danka nemá ráda hokej, ale bruslení ano.

Aby sme mohli vytvoriť odhad ceny založenia hokejového ihriska, musíme najprv zistiť, ako je vlastne celý proces realizovaný.

Hokejové ihrisko tvorí niekoľko vrstiev materiálov: ľadový povrch, vychladená betónová doska, izolácia, zohriaty betón, pieskový a štrkový podklad a odvod vody, viď obrázok 1 (zdroj¹). Ľadový povrch je vytváraný vo vrstvách. Tenká vrstva vody nanosená na vychladenú betónovú dosku zamrzne takmer okamžite a vytvorí tak základ pre ľadovú plochu, na ktorý sa postupne nanášajú ďalšie tenké vrstvy vody. Časť prvých ľadových vrstiev sa farbja požadovanými farbami, aby bolo vytvorené ihrisko. Vychladená betónová doska spočiatku zabezpečuje zamrzanie nanášaných vodných vrstiev a následne udržiava ľadový povrch zamrznutý, a to optimálne na teplote $T = -4\text{ }^{\circ}\text{C}$, ktorú ovplyvňuje mnoho faktorov, ako napríklad okolitá teplota v budove štadiónu, vonkajšia teplota a vlhkosť¹. Chladienie je realizované chladiacim systémom zabudovaným v betónovej doske, ktorý si podrobnejšie rozoberieme o chvíľu. Vrstva izolácie a ohriateho betónu udržiava zem pod ľadom nezamrznutú, pretože inak by mohlo dôjsť k expanzii a prípadnému poškodeniu ihriska. Celá konštrukcia ihriska je položená na podklade tvorenom pieskom a štrkom, ktorý obsahuje odvod vody.

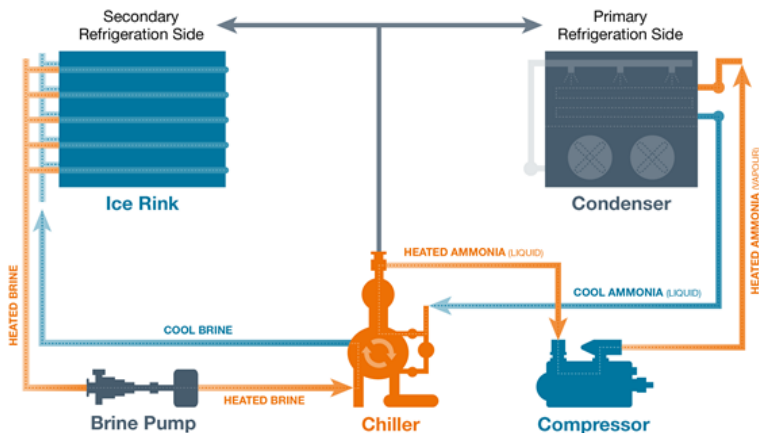


Obr. 1: Prierez ľadom a vrstvami podkladov hokejového ihriska

Samotné chladienie je realizované pomocou nepriameho chladiaceho systému¹. Ten používa tekutý chladič (zvyčajne amoniak), ktorý absorbuje teplo zo sekundárnej tekutiny (zvyčajne slaná voda, prípadne etylén či propylénglykol), ktorá zase absorbuje teplo zo zdroja. Sланá voda sa používa preto, lebo mrzne až pri teplote nižšej ako je bod mrazu čistej vody na povrchu. Pri teplote nižšej ako $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ môže voda stále tiecť cez potrubie, ale zároveň je dosť studená na to, aby mohla zabezpečiť zamrznutie vody na povrchu. V nepriamom chladiacom systéme sú tri hlavné

¹<https://www.howden.com/en-gb/articles/refrigeration/ice-rinks-refrigeration-on-a-big-scale>

komponenty: chladič, kompresor a kondenzátor. Proces chladienia je prehľadne znázornený na obrázku 2 (zdroj²), preto ho tu nebudeme slovne popisovať.



Obr. 2: Schéma nepriameho chladiaceho systému použitého na chladienie ľadovej plochy.

Z tohto popisu hokejového ihriska už máme celkom dobrú predstavu o tom, ako funguje chladienie hokejového ihriska, a čo je na vytvorenie ľadovej plochy potrebné. Poďme sa teda postupne pozrieť na jednotlivé náklady s tým spojené. Budeme pritom predpokladať, že nestavíme hokejové ihrisko nanovo, ale už máme kúpený kompletný chladiaci systém.

Na zaľadnenie ihriska budeme určite potrebovať vodu, a to nie malé množstvo. Na vytvorenie povrchu hokejového ihriska je potrebných 45 – 57 tisíc litrov vody, pričom ľadová vrstva má typicky hrúbku medzi 0,75 až 1,5 palca (cca 1,9 – 3,8 cm)². Hrúbka vrstvy nemôže byť tenšia, pretože by sa korčuľa mohla ľadom prerezať až k betónu. Nemôže byť ani hrubšia, pretože by pre väčšie množstvo ľadu nemuselo postačovať chladienie, a teda by sa ľad na povrchu roztápal. Oficiálna hokejová ľadová plocha by mala byť $l = 200$ stôp (teda 60,96 m) dlhá a $w = 85$ stôp (čiže 25,91 m) široká³. Ak by bola vrstva ľadu hrubá $h = 2,9$ cm (priemer typických hrúbok uvedených vyššie), a to na celej ploche ihriska, tak celkový objem ľadu na ihrisku by bol

$$V_1 \approx hlw \doteq 46 \text{ m}^3,$$

čo je teda 46 000 ℓ ľadu. Ako je všeobecne známe, hustota ľadu⁴ $\rho_l = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je menšia ako hustota vody $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Tento objem ľadu preto zodpovedá vode s objemom

$$V_v = \frac{\rho_l}{\rho_v} V_1 \doteq 42\,000 \ell.$$

Vidíme, že táto hodnota je o niečo menšia ako minimálna hodnota, ktorú sme uviedli vyššie. Nesmieme zabúdať ani na straty spôsobené napríklad vyparovaním vody počas procesu chladienia, keďže vyparovanie z povrchu prebieha v určitej miere pri všetkých teplotách kvapaliny.

²<https://www.howden.com/en-gb/articles/refrigeration/ice-rinks-refrigeration-on-a-big-scale>

³<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

⁴<https://cs.wikipedia.org/wiki/Led>

Uvažujme preto, že na vytvorenie požadovanej vrstvy ľadu spotrebujeme $V_v = 45\,000 \ell$ vody. Predpokladajme, že naše hokejové ihrisko zaľadňujeme niekde v Prahe. Je žiaduce, aby ľad na hokejovom ihrisku bol čo najčistejší, keďže práve taký ľad má optimálne vlastnosti pre korčuľovanie.⁵ Použijeme naň preto pitnú vodu a budeme predpokladať, že má dostatočne dobré vlastnosti a nemusíme preto kupovať prostriedky na čistenie vody. Cena pitnej vody v Prahe je v súčasnosti⁶ $c_v = 50,30 \text{ Kč}\cdot\text{m}^{-3}$. Číže za vodu, z ktorej vyrábame ľad celkovo zaplatíme

$$S_1 = c_v V_v \doteq 2\,270 \text{ Kč}.$$

Druhá vec, ktorá bude najviac prispievať do ceny zaľadnenia ihriska je elektrická energia spotrebovaná chladiacim systémom. Uvažujme, že chladiaci systém ako celok má príkon⁷ $P = 106 \text{ kW}$. Nech vytvorenie ľadovej plochy trvá⁸ $t = 48 \text{ h}$. Za túto dobu chladiaci systém spotrebuje energiu

$$E = Pt \doteq 5\,088 \text{ kWh}.$$

Pozrime sa na to, či naozaj bude toľkoto energie stačiť na premenu studenej vody na ľad. Hmotnostné skupenské teplo tuhnutia ľadu je⁹ $l_t = 334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. To je o dva rády viac ako energia prislúchajúca zmene teploty vody o 1°C , teda ak uvažujeme zamŕzanie vody s teplotou blízkou 0°C . Pre odhad nám stačí uvažovať iba teplo potrebné na zmenu skupenstva. To spočítame ako

$$Q = l_t V_v \rho_v \doteq 15 \text{ GJ} \doteq 4\,170 \text{ kWh}.$$

Takéto množstvo tepla potrebujeme z vody odobrať, aby sme ihrisko zaľadnili. Ak by sme jednoducho predpokladali, že chladiaci systém musí dostať na svoje fungovanie aspoň toľko elektrickej energie, koľko tepla musí odobrať vode, tak z našich výpočtov vyplýva, že táto energia bude postačovať. Samozrejme, situácia je oveľa komplikovanejšia. Zariadenia nemajú 100%-nú účinnosť, čo vyplýva už zo zákonov termodynamiky, a tiež nesmieme zabúdať na rôzne tepelné straty. V každom prípade môžeme zhodnotiť, že nami získaná energetická spotreba chladiaceho systému môže byť reálna. Teraz spočítajme, koľko nás bude táto energia stáť. Uvažujme priemernú cenu elektriny¹⁰ $c_E = 1,9 \text{ Kč}\cdot\text{kWh}^{-1}$. Potom za elektrinu spotrebovanú pri zaľadnení hokejového ihriska zaplatíme

$$S_2 = c_E E \doteq 9\,670 \text{ Kč}.$$

Dokopy za vodu, ktorú necháme premeniť na ľad a elektrickú energiu, ktorá sa spotrebuje chladiacim systémom, zaplatíme $S = S_1 + S_2 \doteq 12\,000 \text{ Kč}$.

Síce uvažujeme, že chladiaci obeh už obsahuje všetky potrebné komponenty a nie je potrebné ich preto nakupovať. Zo zaujímavosti si ale môžeme spočítať, koľko by mohla stáť slaná voda použitá v chladiacom obeh. Objem vody použitý na chladenie je asi $V_c = 9000$ galónov,¹¹ teda cca $34\,000 \ell$. Predpokladajme, že budeme opäť brať pôvodne pitnú vodu. Zaplatíme za ňu

$$S_3 = c_v V_c \doteq 1\,950 \text{ Kč}.$$

⁵<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

⁶<https://www.pvk.cz/vse-o-vode/cena-vodneho-a-stocneho/>

⁷https://www.alibaba.com/product-detail/100HP-air-cooled-screw-chiller-with_60668189235.html?spm=a2700.7724857.0.0.25e0775dfXaUuZ&s=p&fullFirstScreen=true

⁸<http://science.unctv.org/content/scienceblog/ice-hockey>

⁹https://sk.wikipedia.org/wiki/Mern%C3%A9_skupensk%C3%A9_teplo_topenia

¹⁰<https://www.usetreno.cz/energie-elektrina/cena-elektriny/>

¹¹<https://www.rsi.edu/blog/hvacr/ice-hockey-rink-refrigeration/>

Na výrobu slanej vody budeme ešte potrebovať soľ, pričom môžeme použiť NaCl pre priemyselné účely. Uvažujme, že slaný roztok bude čo najviac nasýtený, aby mal čo najnižšiu teplotu tuhnutia. V tom prípade bude hmotnostná koncentrácia soli vo vode¹² $k = 23,3\%$, teda musí platiť

$$k = \frac{m_s}{m_s + m_c},$$

kde m_s je hmotnosť soli a m_c hmotnosť vody v potrubí. Odtiaľ si úpravami vyjadríme hmotnosť soli, ktorú budeme potrebovať a dostaneme

$$m_s = m_c \frac{k}{1 - k} = V_c \rho_v \frac{k}{1 - k} \doteq 10\,330 \text{ kg}.$$

Nech kupujeme priemyselnú NaCl za cenu¹³ $c_s = 6 \text{ Rs} \cdot \text{kg}^{-1} \doteq 1,80 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$. Potom za soľ zaplatíme

$$S_4 = c_s m_s \doteq 18\,600 \text{ Kč}.$$

Slaná voda v chladiacom obehú by teda podľa našich odhadov stála asi 20 500 Kč. V porovnaní s cenou spotrebovanej elektrickej energie na jedno zaľadnenie a takisto ceny potrebnej vody vidíme, že keby sme mali nakupovať aj komponenty do chladiaceho obehú, tak aj cena zaľadnenia by značne vzrástla.

Ak by sme naozaj chceli hokejové ihrisko zaľadniť, potrebovali by sme na to určite aj nejakých odborných pracovníkov, ktorí by sa podieľali na realizácii celého procesu. Týchto pracovníkov by sme, samozrejme, tiež museli vyplatiť, čo by zdvihlo cenu zaľadnenia. Uvažujme, že títo technickí pracovníci majú v roku 2020 minimálnu mzdu¹⁴ (nepodarilo sa nám nájsť žiadne údaje o tom, koľko v ČR reálne zarábajú) $m = 87,30 \text{ Kč} \cdot \text{hod}^{-1}$. Zamestnávateľ musí ešte okrem tejto sumy za svojho zamestnanca odviesť ďalších 34% do zdravotnej a sociálnej poisťovne.¹⁵ Uvažujme, že počas celej doby zaľadňovania, sú v každej chvíli prítomní priemerne $n = 3$ zamestnanci. Potom celkovo za jedno zaľadnenie zaplatí zamestnancom

$$S_5 = 1,34 m n \doteq 16\,850 \text{ Kč}.$$

Na záver môžeme zhrnúť, že ak máme pripravené všetko vybavenie na zaľadnenie hokejového ihriska, tak zaň zaplatíme asi 12 000 Kč. Za odborných pracovníkov, ktorí zaľadnenie vykonajú, zaplatíme ďalších 16 850 Kč. Celkovo teda bude jedno zaľadnenie stáť odhadom 30 000 Kč.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Brine#Refrigerating_fluid

¹³<https://www.indiamart.com/proddetail/industrial-salt-sodium-chloride-16011737297.html>

¹⁴<https://www.kurzy.cz/kalkulacka/minimalni-mzda/>

¹⁵<https://www.migrace.com/cs/poradna/informace-pro-cizince/cizinci-ze-zemi-mimo-eu/pracovni-pomer/zamestnani-mimo-eu-odvody>