

## Úloha I.1 ... auta

3 body; průměr 2,48; řešilo 179 studentů

Dvě auta vyjedou ve stejný čas ze stejného bodu rychlostmi  $v_1 = 100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  a  $v_2 = 60 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Je možné, aby se auta od sebe vzdalovala některými z následujících rychlostí? Pokud ano, příslušné situace načrtněte.

$$\begin{aligned} v_a &= 160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, & v_b &= 40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \\ v_c &= 30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, & v_d &= 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \end{aligned}$$

*Ivo chtěl Dana srazit přesně definovanou rychlostí.*

Úlohu lze zřejmě řešit metodou „kouknu a vidím“, kdy si hned všimneme, že nejmenší rychlosti ( $v_b$ ) bude dosaženo při pohybu stejným směrem, největší rychlost ( $v_a$ ) dostaneme při pohybu od sebe, hodnota  $v_d$  bude odpovídat „něčemu mezi tím“ a varianta  $v_c$  není možná. Ukážeme si však také, k čemu dospějeme, jestliže se pokusíme poctivě ověřit všechny „samozřejmé“ kroky řešení.

Situaci budeme popisovat pomocí vektorů. Polohu prvního auta v čase  $t$  označíme  $\mathbf{r}_1(t)$ , potom

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 t.$$

Pro druhé auto platí obdobná rovnice. Vzájemnou rychlost aut spočítáme jako změnu velikosti jejich vzájemné vzdálenosti vydělenou časem, během kterého ke změně došlo. Po uplynutí času  $\Delta t$  bude platit

$$\mathbf{r}_1(t + \Delta t) = \mathbf{v}_1 \cdot (t + \Delta t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{v}_1 \Delta t.$$

Na toto místo je vhodné zařadit poznámku o použití značení. Závorky mohou mít dva významy – buď obsahují funkční argumenty (jako třeba u  $\mathbf{r}_1(t + \Delta t)$ ), anebo vyjadřují násobení (například u  $\mathbf{v}_1 \cdot (t + \Delta t)$ ). V tomto případě odlišujeme druhou variantu pro větší názornost tečkou. Zpravidla tomu tak nicméně není a mezi oběma variantami se rozlišuje pouze velikostí mezery, přičemž větší znamená násobení; konkrétním příkladem může být právě  $\mathbf{v}_1(t + \Delta t)$  či  $f(x)$  (srovnejte s  $f(x)$ ). Naneštěstí většina autorů ignoruje i toto pravidlo, a význam závorek je tak často nutné odhadovat pouze z kontextu.

Vzájemná vzdálenost bodů, kterou označíme  $s$ , není nic jiného než velikost jejich rozdílu

$$s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Pro hledanou vzájemnou rychlost dostáváme

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t + \Delta t)| - |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|}{\Delta t} = \\ &= \frac{|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (t + \Delta t)| - |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)t|}{\Delta t} = |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|. \end{aligned}$$

Tímto možná až zbytečně složitým výpočtem jsme ukázali to, co jsme byli schopni vytušit už na samém začátku svých úvah, a sice že vzájemná rychlost automobilů je rovna rozdílu jejich rychlostí. Nyní už jen stačí najít všechny vyhovující hodnoty.

Označme úhel mezi vektory rychlostí jako  $\varphi$ . Potom pro trojúhelník se stranami  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v$  platí kosinová věta

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi.$$

Kosinus  $\varphi$  nabývá všech hodnot mezi  $-1$  a  $+1$ . Pro  $-1$  vyjde  $v = v_1 + v_2 = 160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = v_a$ , pro  $+1$  dostaneme  $v = v_1 - v_2 = 40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = v_b$ . Rychlost  $v_c$  zřejmě leží mimo tento interval, protože jí není možné dosáhnout. Konečně rychlost  $v_d$  získáme při úhlu

$$\cos \varphi = \frac{v_1^2 + v_2^2 - v_d^2}{2v_1v_2} = \frac{11}{24},$$
$$\varphi \doteq 1,09 \doteq 63^\circ.$$

*Jáchym Bárták*  
tuaki@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.